Algebra II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2017
Harjoitus 1

Tehtävistä keskustellaan torstain tapaamisessa 26.1.
Ratkaisujen laatijat laittavat ratkaisuehdotuksensa Moodleen viimeistään keskiviikkona 25.1.

Voit tarpeen vaatiessa kerrata aiemmin opittuja algebran asioita luentomateriaalin luvusta ”Kertausta”, kirjasta Johdatus abstraktiin algebraan (Häsä & Rämö) tai kirjasta Algebra I (Metsänkylä & Näätänen).

Algebralliset rakenteet

1. (a) Kertaa seuraavien algebrallisten rakenteiden määritelmät: monoidi, ryhmä, rengas, kokonaisalue, kunta, vektoriavaruus.
   (b) Mitä yhteistä rakenteissa on? Miten voisit muistaa rakenteiden määritelmät helposti ilman, että sinun täytyy opetella ne ulkoa?
   (c) Kertaa rakenteita vastaavien alirakenteiden määritelmät. Mitä yhteistä niissä on? Miten voisit muistaa ne ulkoa opettelematta?

Tekijärakenteet

2. Tutustu luentomateriaalin sivulla 12 olevaan esimerkkiin, jossa käsitellään neliön symmetriaryhmää sekä sen aliryhmää N, joka koostuu kaikista neliön kierroista.
   (a) Määritä tekijäryhmän D_4/N alkiot ja kertotaulu.
   (b) Selitä omin sanoin, miten tekijäryhmän kertotaulusta näkee, että kahden peilauksen tulo on aina kierto.
   (c) Mitä on kahden kierron tulo? Miten se näkyy tekijäryhmässä?

3. Tutkitaan ryhmän $(\mathbb{R}^3, +)$ aliryhmää
$$A = \{a(1,5,2) + b(-3,0,1) \mid a, b \in R\}.$$
   (a) Kuvaile omin sanoin, miltä aliryhmä näyttää.
   (b) Määritä tekijäryhmä $\mathbb{R}^3/A$. Miltä sen alkiot näyttävät?
   (c) Ovatko sivuluokat $(-3,4,1) + A$ ja $(-4,7,1) + A$ samat? Yritä keksiä mahdollisimman helppo tapa tämän tarkistamiseen.

4. (a) Kompleksilukujen osajoukkoa $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ kutsutan Gaussin kokonaisluvuiksi. Se on renkaan $\mathbb{C}$ alirengas. Osoita, että joukko
$$I = \{2a + 2bi \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$
on renkaan $\mathbb{Z}[i]$ ideaali. (Käytä apuna edeltävien algebran kurssien materiaaleja. Ideaalin käsite on määritelty niissä.)

(b) Määritä ideaalin I sivuluokat.

(c) Mistä tiedetään, että sivuluokkien joukko R/Ion rengas?

(d) Määritä tekijärenkaan R/I yhteen- ja kertolaskutaulut.

5. Tutustu luentomateriaalin sivulla 12 olevaan esimerkkiin, jossa käsitellään rengasta $R = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ja sen ideaalia $I = \left\langle 3\sqrt{2} - 1 \right\rangle$.

   (a) Miltä ideaalin I alkiot näyttävät?

   (b) Miltä tekijärenkaan R/I alkiot näyttävät?

   (c) Selitä omin sanoin, mitä tarkoittaa, että renkaassa R/I pätee yhtälö $3\sqrt{2} = 1$.

6. (a) Tarkastellaan ryhmää $(\mathbb{Q}, +)$. Osoita, että relaatio

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}$$

   on ekvivalenssirelaatio, joka on yhteensopiva laskutoimituksen + kanssa.

   (b) Osoita, että ekvivalenssiluokkien joukko $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ on ääretön vaihdannainen ryhmä, jossa jokaisen alkion kertaluku on äärellinen.

Homomorfismit

7. (a) Kertaa ryhmä- ja rengashomomorfisien sekä lineaarikuvausten määritelmät. (Lineaarikuvaukset ovat vektoriavaruuksien välisiä homomorfismeja.) Mitä yhtäläisyyksiä määritelmissä on? Miten kunkin homomorfismin määritelmä littyy vastaavan algebrallisen rakenteen määritelmään?

   (b) Tutustu kurssimateriaalin alalukuun 0.5.

   (c) *Reaalinen matriisialgebra* on joukon $\mathbb{R}^{n \times n}$ osajoukko, joka on suljettu yhteenlaskun, skalaarikertolaskun ja matriisikertolaskun suhteen sekä sisältää yhteen- ja kertolaskun neutraalialkiot. Miten määrittelisit matriisialgebrahomomorfismin?

   (d) Miten voisit muistaa eri rakenteiden homomorfismien määritelmät helposti ilman, että niitä tarvitsee opetella ulkoa?

8. (a) Määrittääkö ehto $[x]_4 \mapsto [x]_5$ kuvauksen ryhmästä $\mathbb{Z}_4$ ryhmään $\mathbb{Z}_5$?

   (b) Määrittääkö ehto $[x]_8 \mapsto [x]_4$ kuvauksen ryhmästä $\mathbb{Z}_8$ ryhmään $\mathbb{Z}_4$?

   (c) Keksi ja muotoile tulos, joka kertoo, milloin on olemassa homomorfismi $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$, jolle pätee $f([x]_n) = [x]_m$. Tätä tulosta ei tarvitse vielä todistaa, vaan palaamme siihen myöhemmin.

9. Halutaan osoittaa, että ryhmät $\mathbb{Z}_{10}$ ja $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ ovat isomorfisia.

   (a) Todistuksen voisi periaatteessa tehdä osoittamalla, että kuvaus

$$g\colon \mathbb{Z}_{10} \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5, \quad g([a]_{10}) = ([a]_2, [a]_5)$$

   on isomorfismi. Listaa kaikki asiat jotka pitäisi osoittaa tässä tapauksessa. Sinun ei tarvitse kirjoittaa todistusta.

(b) Todistuksen voi myös tehdä ryhmien homomorfialauseen avulla. Listaa kaikki asiat, jotka pitäisi todistaa tässä tapauksessa.

(c) Miksi homomorfialauseen käyttäminen on kannattavampaa?

(d) Todista väite ryhmien homomorfilauseen avulla.

10. Mieti, minkä tutun ryhmän kanssa tehtävän 3 tekijäryhmä $\mathbb{R}^3/A$ on isomorfinen. Osoita tämä täsmällisesti ryhmien homomorfialauseen avulla.

Monoidit

11. Tutustu alalukuun 1.3, jossa käsitellään käänteisalkioiden lisäämistä monoidiin.

    (a) Osoita, että esimerkin relaatio $\sim$ on ekvivalenssirelaatio.

    (b) Osoita, että relaatio $\sim$ on yhteensopiva tulomonoidin yhteenlaskun kanssa.

    (c) Tutkitaan tapausta $M = \mathbb{N}$. Tällöin relaatio $\sim$ voidaan kirjoittaa yksinkertaisemmassa muodossa. Millaisessa?

    (d) Tutkitaan tapausta $M = \mathbb{N}$. Miltä näyttävät joukon $[(4, 11)]$ alkiot?

    (e) Tutkitaan tapausta $M = \mathbb{N}$. Mitä tekijämonoidin $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})/\sim$ alkiota kokonaisluku -3 vastaa?

    (f) Monoidin M alkiota s kutsutaan supistuvaksi, jos kaikilla $a, b \in M$ pätee seuraava ehto:

    $$\text{jos } a + s = b + s, \text{ niin } a = b.$$

    Osoita, että jos monoidin M jokainen alkio on supistuva, kuvaus η on injektio.

Lisää tehtäviä

12. Olkoot $m, n \in \mathbb{N}$ ja $m \geq 1$. Olkoon $R_{m,n}$ joukon $\mathbb{N}$ ekvivalenssirelaatio

    $$xR_{m,n}y \Leftrightarrow x = y \ \text{ tai } \ (x \geq n \text{ ja } y \geq n \text{ ja } m|x - y).$$

    Osoita, että monoidin $(\mathbb{N}, +)$ yhteenlasku ja relaatio $R_{m,n}$ ovat yhteensopivat ja kuvaile tekijämonoidia $\mathbb{N}/R_{m,n}$.

13. Olkoon G ryhmä, jolla on normaali aliryhmä N. Oletetaan, että $[G : N] = k$. Osoita, että $g^k \in N$ kaikilla $g \in G$.

14. Olkoon G äärellinen ryhmä, $\varphi\colon G \to M$ ryhmähomomorfismi ja $H \leq G$.

    (a) Osoita, että $\varphi(H) \leq \varphi(G) \leq M$.

    (b) Osoita, että indeksi $[\varphi(G) : \varphi(H)]$ jakaa indeksin $[G : H]$.

    (c) Osoita, että kertaluku $|\varphi(H)|$ jakaa kertaluvun $|H|$.