

**Tilastollinen päättely III, kevät 2016**  
**Laskuharjoitukset 3, palautus 11.4.2016 klo 23:55 mennessä kurssin**  
**Moodle-sivulle.**

Tehtävät 2-4 liittyvät luentomonisteen esimerkkeihin sivuilla 13 - 16.

1. Olkoon  $X_1, X_2, \dots$  satunnaisvektoreista koostuva jono, joka on martingaalidifferenssi informaatiojoukon  $\mathcal{F}_i$  suhteen. Merkitään  $M_n = \sum_{i=1}^n X_i$  ja oletetaan, että  $X_1 = 0$ . Todista kurssimonisteen sivulla 12 mainittu tulos

$$\text{Cov}(M_n) = \sum_{i=1}^n \text{Cov}(X_i).$$

*Vihje:*  $\text{Cov}(X) = \text{E}[(X - \text{E}(X))(X - \text{E}(X))']$

2. Tarkastellaan autoregressiivistä AR(1)-mallia, kun  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  on havaintovektori ja  $\theta = (\phi, \sigma^2)$  on parametrivektori. Oletetaan luentomonisteen esimerkin tapaan, että  $y_0$  on tunnettu vakio. Osoita, että yhteistiheysfunktio voidaan kirjoittaa muodossa

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}; \theta) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \phi y_{i-1})^2\right\}.$$

*Vihje:* Merkitään  $\mathbf{Y}_n = (Y_1, \dots, Y_n)$ . Etene induktiolla  $n:n$  suhteen. Jos  $f_{\mathbf{Y}_{n-1}}$  on jo löydetty, esitä  $\mathbf{Y}_n = (\mathbf{Y}_{n-1}, Y_n)$  lineaarisena muunnoksena sv:sta  $(\mathbf{Y}_{n-1}, \varepsilon_n)$ , jossa  $\mathbf{Y}_{n-1} \perp \varepsilon_n$  (tämän muunnoksen Jacobin determinantti on 1). Palauta mieleen todennäköisyyslaskennasta ytf:n muunnoskaava.

3. Muodosta edellisessä tehtävässä tarkastellulle mallille log-uskottavuusfunktio, pistemääräfunktio ja havaittu informaatiomatriisi. Ovatko parametrivektorin komponentit ortogonaalisia?
4. Olkoon

$$Y_i = Z_i \beta_i + \varepsilon_i, i = 1, \dots, N,$$

missä  $Z_j$  on  $(n_j \times p)$ -ulotteinen (tunnettu) selittäjämatrisi,  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N$  riippumattomia,  $\varepsilon_i \sim N_{n_j}(0, \sigma^2 I_{n_j})$ ,  $\sigma^2 > 0$ . Oletetaan nyt, että  $p$ -ulotteiset kerroinvektorit  $\beta_j$  ovat satunnaisia ja niille pätee oletukset

- i)  $\beta_i \sim N(\beta, \Sigma)$  kaikilla  $i = 1, 2, \dots$
- ii)  $\beta_i \perp \beta_j$  kaikilla  $i \neq j$
- iii)  $(\beta_1, \dots, \beta_N) \perp (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)$ .

Johda satunnaisvektorin  $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)$  yhteistiheysfunktio.

*Vihje:* Mikä on  $Z_i \beta_i$ :n jakauma?