Tilastollinen päättely III, kevät 2016
Laskuharjoitukset 2, palautus 4.4.2016 klo 23:55 mennessä kurssin Moodle-sivulle.

1. Oletetaan, että $|X_n(\theta) - c(\theta)| \xrightarrow{p} 0$ kaikilla $\theta \in \Theta$, missä $\{X_n(\theta)\}_{n=1}^{\infty}$ on jono riippumattomia, parametrista θ riippuvia satunnaismuuttujia ja $c(\theta)$ jokin ei-satunnainen funktio. Osoita, ettei oletus takaa tulosta $|X_n(\theta_n) - c(\theta_n)| \xrightarrow{p} 0$, missä $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ on jokin parametriavaruuden Θ jono.

2. Olkoon $Y_1, Y_2, \ldots$ jono riippumattomia Poisson-jakautuneita satunnaismuuttujia odotusarvolla $\mu > 0$. Johda estimaattorin $\hat{\mu}_n = \overline{Y}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} Y_i$ asymptoottinen jakauma. Selvitä lisäksi muunnosten $\log(\hat{\mu}_n)$ ja $\sqrt{\hat{\mu}_n}$ asymptoottiset jakaumat. Mikä miellyttävä piirre viimeiseen liittyy?

3. Olkoon $X_1, \ldots, X_n$ riippumaton otos jakaumasta, jolla on äärellinen neljäs momentti. Merkitään $\mu = \mathrm{E}(X_1)$, $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$ ja $\mu_4 = \mathrm{E}[(X_1 - \mu)^4]$ (neljäs keskusmomentti) sekä

$$\tilde{S}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2, \quad \hat{S}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2, \quad S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2,$$

jossa $\overline{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$.

a) Osoita, että $\tilde{S}_n^2 \xrightarrow{p} \sigma^2$ ja $\sqrt{n}(\tilde{S}_n^2 - \sigma^2) \xrightarrow{d} \mathsf{N}(0, \nu)$, jossa $\nu = \mathrm{Var}[(X_1 - \mu)^2] = \mu_4 - \sigma^4$.

b) Osoita, että $\sqrt{n}(\tilde{S}_n^2 - \hat{S}_n^2) \xrightarrow{p} 0$, ja päättele, että a-kohdan tulokset pätevät myös $\hat{S}_n^2$:lle.

c) Totea, että a-kohdan tulokset pätevät niin ikään S_n^2:lle.

4. Oletetaan, että mallin parametrivektorille θ (d-ulotteinen) on käytettävissä asymptoottisesti normaalinen estimaattori $\hat{\theta}_n$, jolle

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} \mathsf{N}(0, \Sigma(\theta_0)),$$

jossa $\Sigma(\theta_0)$ on positiivisesti definiitti (erityisesti kääntyvä) ja θ_0 on parametrin "todellinen" arvo. Osoita yksityiskohtaisesti, että jos funktio $\theta \mapsto \Sigma(\theta)$ on jatkuva pisteessä θ_0, niin

$$n(\hat{\theta}_n - \theta_0)'\Sigma(\hat{\theta}_n)^{-1}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} \chi_d^2.$$

Miten tämän avulla voisi johtaa approksimatiivisen testin nollahypoteesille $\theta = 0$?

5. Osoita, että luentomonisteen esimerkin 1.1. (s.12) jonot ii) ja iii) MD -jonoja. Perustele huolellisesti ehdollisen odotusarvon ominaisuuksien EO1–4 avulla. Huom: jonoja $\{X_i\}$ ja $\{Z_i\}$ koskeva riippumattomuusoletus on ymmärrettävä siten, että kumpikin jonoista koostuu riippumattomista satunnaismuuttujista ja lisäksi jonot ovat riippumattomat toisistaan.