

Tilastollinen päättely III, kevät 2016
Laskuharjoitukset 1, palautus 21.3.2016 klo 23:55 mennessä kurssin
Moodle-sivulle.

1. Olkoon Z, X_1, X_2, \dots reaaliarvoisia satunnaismuuttujia. Osoita käyttämättä kurssin lauseita: Jos $X_n \rightarrow Z$ stokastisesti kun $n \rightarrow \infty$, niin $X_n \rightarrow Z$ jakauman mielessä.
2. Jatkoa edelliseen tehtävään. Osoita: Jos $a \in \mathbb{R}$ vakio ja $X_n \rightarrow a$ jakauman mielessä kun $n \rightarrow \infty$, niin $X_n \rightarrow a$ stokastisesti.
3. Merkitään vektorin normia $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2}$, missä $x \in \mathbb{R}^k$. Todista ekvivalenssi

$$X_n \xrightarrow{p} X \Leftrightarrow \|X_n - X\| \xrightarrow{p} 0,$$

kun X_n on jono satunnaisvektoreita ($k \times 1$) ja X satunnaisvektori ($k \times 1$). *Huom: Vertaa luentomonisteen määritelmä: $X_n \xrightarrow{p} X$ jos $X_{n,i} \xrightarrow{p} X_i$ kaikilla $i = 1, \dots, k$.*

4. Olkoon parametriavaruus $\Theta \subset \mathbb{R}$ avoin väli, $\theta \in \Theta$ parametri ja θ_0 sen ”todellinen” arvo. Olkoon $\hat{\theta}_n$ jokin parametrin θ asymptoottisesti normaalin estimaattori, jolle pätee

$$\sqrt{n}(\tilde{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} \mathbf{N}(0, \sigma^2(\theta_0)),$$

missä $\sigma^2(\theta_0)$ on parametrissa θ riippuva (tuntematon) positiivinen reaaliluku. Osoita, että $\tilde{\theta}_n$ on tarkentuva, eli $\tilde{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta_0$. *Vihje: Kurssimonisteen seuraus 1.1 ja edeltävät tehtävät.*

5. Jatkoa edelliseen tehtävään: Todista luentomonisteessa esitetty delta-menetelmä: Jos $h : \Theta \mapsto \mathbb{R}$ on jatkuvasti derivoituva funktio ja $h'(\theta_0) \neq 0$, niin muunnoksen $h(\theta_0)$ estimaattorille $h(\hat{\theta})$ pätee

$$\sqrt{n}(h(\hat{\theta}_n) - h(\theta_0)) \xrightarrow{d} \mathbf{N}(0, [h'(\theta_0)]^2 \sigma^2(\theta_0)).$$

Vihje: Luentomonisteen huomiot sekä väliarvolause: $h(\hat{\theta}_n) - h(\theta_0) = h'(\theta_n^)(\hat{\theta}_n - \theta_0)$ jollakin θ_n^* , joka on $\hat{\theta}_n$:n ja θ_0 :n välissä.*