Tilastollinen päättely III, kevät 2016
Laskuharjoitukset 5, palautus 25.4.2016 klo 23:55 mennessä kurssin Moodle-sivulle.

Tehtävissä 1-2 tarkastellaan muistiinpanojen sivuilla 21-22 esitettyä lineaarista mallia.

1. Osoita kurssimateriaalin sivulla 28 käytetty yhtäsuuruus (3.1)

$$\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i Z_i'\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} Z_i Y_i = \beta + \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i Z_i'\right)^{-1} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i \varepsilon_i.$$

2. Tarkastellaan su-estimaattoreita $\hat{\beta} = \hat{\beta}_n$ sekä $\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}_n^2$ yhtälössä (2.18). Oletetaan, että satunnaisvektorit Z_i ja virheet ε_i toteuttavat sivulla 28 mainitut ehdot: $\frac{1}{n}\sum_i Z_i Z_i' \xrightarrow{p} Q$ (jossa Q on kiinteä ja positiivisesti definiitti) ja $\frac{1}{n}\sum_i Z_i \varepsilon_i \xrightarrow{p} 0$, kun $n \to \infty$. Sivulla 28 on todettu, että tällöin $\hat{\beta}$ on tarkentuva. Osoita, että myös $\hat{\sigma}^2$ on tarkentuva eli $\hat{\sigma}^2 \xrightarrow{p} \sigma^2$.

3. Satunnaismuuttujan (tai -vektorin) Y ptf/tf $f(y;\theta)$ riippuu parametrista $\theta \in \Theta$ ja mitkään kaksi eri θ:n arvoa eivät vastaa samaa jakaumaa. Olkoon $l(\theta; y) = \log f(y;\theta)$, ja oletetaan, että odotusarvo $l^*(\theta) = \mathsf{E}_{\theta_0}\big[l(\theta;Y)\big]$ on olemassa kaikilla $\theta \in \Theta$, kun θ_0 on todellinen parametriarvo. Todista, että $l^*(\theta)$ saa suurimman arvonsa täsmälleen pisteessä $\theta = \theta_0$.

4. Tarkastellaan mallia $Y_1, \ldots, Y_n \sim \mathsf{Tas}(0,\theta) \perp\!\!\!\perp$, jossa $\theta > 0$. Palauta mieleen, että θ:n su-estimaattori on $\hat{\theta}_n = Y_{(n)} = \max(Y_1, \ldots, Y_n)$. Osoita, että

$$n(\theta - \hat{\theta}_n) \xrightarrow{d} \mathsf{Exp}(1/\theta),$$

eli symbolisesti

$$\hat{\theta}_n \underset{as}{\sim} \theta - \tfrac{1}{n}\mathsf{Exp}(1/\theta),$$

jossa $\mathsf{Exp}(1/\theta)$ viittaa eksponenttijakaumaan, odotusarvona θ.

Opetus. Kyseessä on klassinen esimerkki epäsäännöllisestä mallista (miksi?). Tavanomainen asymptotiikka (esim. lauseen 3.2 tulos) ei siinä toteudu. Huomionarvoista on sekin, että $\hat{\theta}_n$:n varianssi lähestyy nollaa samaa vauhtia kuin $1/n^2$, kun $n \to \infty$. Säännöllisissä iid-malleissa vauhti on vain $1/n$. Estimaattori $\hat{\theta}_n$ on siis ”ylitehokas”.