**Tariffiteorian laskuharjoitus 9, 6.4.2016**

Tehtävissä 3 – 5 on merkitty $\xi_n = X_n - P_n$, $Y_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ ja

$$T = \inf\{n; Y_n > U_0\} \quad (T = \infty, \text{ jos } Y_n \leq U_0, \forall n).$$

1. Luovutaan lauseessa 6.2 oletuksesta $d(t) < \infty, \forall t \in (0, R)$. Merkitään

$$R_d = \sup\{t \geq 0; d(t) < \infty\}$$

ja oletetaan, että $0 \leq R_d < R$. Osoita, että $\limsup_{U_0 \to \infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty) \leq -R_d$.

2. (jatkoa) Osoita, että $\limsup_{U_0 \to \infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty) = -R_d$.

3. Olkoot kokonaisvahinkomäärät $X, X_1, X_2, \ldots$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia ja vuoden $n$ vakuutusmaksu

$$P_n = a_1 X_{n-1} + \cdots + a_k X_{n-k} + v,$$

missä $k \in \mathbb{N}$ ja $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ ovat vakioita ja $a_1 + \cdots + a_k = 1$. Lisäksi $v > 0$ ja $X_0, X_{-1}, \ldots, X_{-k+1}$ ovat deterministisiä vakioita. Olkoon edelleen

$$c_X(t) = \log \mathbb{E}\left(e^{tX}\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Oletetaan, että $c_X(t) < \infty, \forall t \in \mathbb{R}$. Määrää

$$\lim_{U_0 \to \infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty).$$

4. Olkoot kokonaisvahinkomäärät $X, X_1, X_2, \ldots$ riippumattomia eksponenttijakautuneita satunnaismuuttujia parametrina $a$ ja vuoden $n$ vakuutusmaksu

$$P_n = \frac{X_{n-1} + \cdots + X_{n-k}}{k} + v,$$

missä $v > 0$, $k \in \mathbb{N}$ ja $X_0, X_{-1}, \ldots, X_{-k+1}$ ovat deterministisiä vakioita. Määrää

$$\limsup_{U_0 \to \infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty).$$

5. Yhtiön vuotuiset kokonaisvahinkomäärät $X_1, X_2, \ldots$ ovat riippumattomia yhdistettyä Poisson-jakaumaa noudattavia satunnaismuuttujia. Olkoon yksittäisen vahingon suuruuden momentit generoiva funktio $M$ kaikkina vuosina. Oletetaan, että $M$ on äärellinen koko $\mathbb{R}$:ssä. Vuoden $n$ Poisson-parametri $\lambda_n$ on

$$\lambda_n = \left(1 + a \sin\left(\frac{2\pi n}{k}\right)\right) \lambda,$$

missä $a \in (0, 1)$, $k \in \mathbb{N}$ ja $\lambda > 0$ ovat vakioita. Vuoden $n$ vakuutusmaksu olkoon $P_n = (1 + v)\mu$, missä $\mu = \lambda m$ ja $m > 0$ on yksittäisen vahingon suuruuden odotusarvo sekä $v > 0$ on vakio. Osoita, että

$$\lim_{U_0 \to \infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty) = -R,$$

missä $R$ on yhtälön

$$M(t) - 1 - (1 + v)mt = 0$$

yksikäsitteinen positiivinen juuri.