Tariffiteorian laskuharjoitus 8, 23.3.2016

Tarkastellaan riskikollektiivia, jossa riskiparametri ϑ on vahinkojen lukumäärän odotusarvo. Vakuutetun vuotuiset vahinkojen lukumäärät ehdolla $\vartheta = v$ ovat riippumattomia Poisson-jakautuneita satunnaismuuttujia parametrina $v > 0$. Vuotuiset kokonaisvahinkomäärät ovat vastaavalla tavalla riippumattomia ja noudattavat ehdollisesti samaa yhdistettyä Poisson-jakaumaa. Vahingon suuruusjakauma on yhteinen kaikilla vakuutetuilla. Olkoon $a_1 \in (0, \infty)$ vahingon suuruuden odotusarvo.

Yhtiöllä on käytössä seuraava bonusjärjestelmä. Bonusluokat ovat $\{1, \ldots, I\}$. Vakuutettu aloittaa luokassa 1. Vahingottoman vuoden jälkeen vakuutettu siirtyy yhden luokan ylöspäin, mikäli mahdollista, ja muuten yhden luokan alaspäin, mikäli mahdollista. Bonusskaala on $b_1, \ldots, b_I$. Oletetaan, että $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_I > 0$.

Kiinteää riskiparametrin arvoa v vastaten merkitään

$$\begin{aligned} \pi_j(v) &= \text{ tasapainojakauman mukainen tilan } j \text{ todennäköisyys,} \\ B(v) &= \sum_{j=1}^{I} \pi_j(v) b_j, \\ B_n(v) &= \mathbb{E}\left(b_{C_n} | \vartheta = v\right), \quad \text{missä } C_n \text{ on bonusluokka vuonna } n, \\ \eta(v) &= \text{asymptoottinen tehokkuus.} \end{aligned}$$

1. Määrää bonusluokan kehitystä kuvaava siirtymätodennäköisyysmatriisi ja tasapainojakauma riskiparametrin funktiona.

2. Osoita, että B_n on kasvava v:n funktio.

3. Määrää

$$\lim_{v \to 0+} B(v) \quad \text{ja} \quad \lim_{v \to \infty} B(v)$$

ja osoita, että yhtälöllä $B(v) = a_1 v$ on ainakin yksi positiivinen juuri.

4. Olkoon v_0 sellainen, että $B(v_0) = a_1 v_0$. Osoita, että kaikilla $v \in (0, v_0)$,

$$B(v) = a_1 v e^{\int_v^{v_0} \frac{1-\eta(s)}{s}} ds.$$

5. (jatkoa) Oletetaan lisäksi, että $\eta(v) < 1$ kaikilla riskiparametrin v arvoilla. Osoita, että $B(v)$ alittaa riskiparametrin arvoa v vastaavan vuotuisen kokonaisvahinkomäärän odotusarvon, jos $v > v_0$.