Tariffiteorian laskuharjoitus 6, 2.3.2016

1. Olkoon yhtiön vuoden n kokonaisvahinkomäärä $X_n, n = 1, 2, \ldots$. Vakuutusmaksut määrätään käyttäen eksponentiaalista tasoitusta tasoitusparametrilla $\alpha \in (0, 1)$. Olkoon P_n vuoden n vakuutusmaksu, missä $P_1 = P$ on deterministinen. Hetkeen n mennessä kertynyt ylijäämä olkoon Y_n,

$$Y_n = (P_1 - X_1) + \cdots + (P_n - X_n). \tag{1}$$

Olkoot $N \in \mathbb{N}$ ja $a > 0$ kiinteitä. Merkitään $\bar{X}_n = X_n$, kun $n \neq N$ ja $\bar{X}_N = X_N + a$. Olkoon $\bar{P}_1 = P$,

$$\bar{P}_n = \alpha \bar{X}_{n-1} + (1 - \alpha)\bar{P}_{n-1}, \quad n \geq 2,$$

ja

$$\bar{Y}_n = (\bar{P}_1 - \bar{X}_1) + \cdots + (\bar{P}_n - \bar{X}_n), \quad n \geq 1.$$

Määrää $\lim_{n\to\infty}(\bar{P}_n - P_n)$ ja $\lim_{n\to\infty}(\bar{Y}_n - Y_n)$.

2. Olkoot määritelmät muuten kuten edellisessä tehtävässä, mutta nyt $\bar{X}_n = X_n$, kun $n < N$ ja $\bar{X}_n = X_n + a$, kun $n \geq N$. Määrää $\lim_{n\to\infty}(\bar{P}_n - P_n)$ ja $\lim_{n\to\infty}(\bar{Y}_n - Y_n)$.

3. Vuoden n kokonaisvahinkomäärä olkoon X_n, $n = 1, 2, \ldots$. Oletetaan, että

$$\mathbb{E}(X_n) = \mu \in (0, \infty)$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Olkoon $P > 0$ deterministinen vakio. Vuoden n vakuutusmaksu P_n määräytyy ehdoista $P_1 = P_2 = P$ ja

$$P_n = P - \alpha Y_{n-2}, \quad n \geq 3,$$

missä $\alpha \in (0, 1/4)$ on vakio ja Y_n on kuten kaavassa (1). Osoita, että

$$P_n = a_1 P_{n-1} + a_2 P_{n-2} + a_3 X_{n-2}, \quad \forall n \geq 3,$$

kun vakiot a_1, a_2 ja a_3 valitaan sopivasti.

4. (jatkoa) Olkoot y_1 ja y_2 annettuja reaalilukuja ja määräytköön $y_n, n \geq 3$, differenssiyhtälöstä

$$y_n = b_1 y_{n-1} + b_2 y_{n-2},$$

missä b_1 ja b_2 ovat tunnettuja vakioita. Oletetaan, että *karakteristisen yhtälön*

$$1 - b_1 x - b_2 x^2 = 0$$

juuret ovat reaaliset ja erisuuret. Tunnetusti y_n on tällöin muotoa

$$y_n = C_1 x_1^{-n} + C_2 x_2^{-n}, \quad n \geq 1,$$

missä C_1 ja C_2 ovat sopivia reaalilukuja ja x_1 ja x_2 ovat karakteristisen yhtälön juuret.

Osoita edellä esitettyjen tulosten avulla, että $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(P_n) = \mu$.

5. (jatkoa) Osoita, että

$$Y_n = c_1 Y_{n-1} + c_2 Y_{n-2} + c_3(P - X_n), \quad n \geq 3,$$

kun vakiot c_1, c_2 ja c_3 valitaan sopivasti ja määrää $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Y_n)$.