6.3. Tariffijärjestelmien Lundbergin eksponentteja

Oletetaan, että kokonaisvahinkomäärät $X, X_1, X_2, \ldots$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita. Olkoon P_n vuoden n riskimaksu, $v > 0$ varmuuslisä,

$$\xi_n = X_n - P_n - v$$

ja

$$Y_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n .$$

Vakuutusmaksu P_n määräytyy ehdosta

a) $P_n = (1-z)\mu + z X_{n-1}, \quad z \in (0,1), \quad \mu = \mathbb{E}(X), \quad P_1 = \mu$

b) $P_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i ,$

c) $P_n = \alpha X_{n-1} + (1-\alpha) P_{n-1}, \quad \alpha \in (0,1), \quad P_0 = \mu$

d) P_n = bonusjärjestelmän mukainen kokonaismaksutulo.

Pyritään määräämään prosessiin $\{Y_n\}$ liittyvä Lundbergin eksponentti mainituissa hinnoittelujärjestelmissä.

Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että $\mathbb{E}(e^{tX}) < \infty$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Ehto $d(t) < \infty$ lauseessa 6.2 ei tällöin aiheuta ongelmia. Myös ehto $c(t_0) < 0$, $t_0 > 0$, tulee seuraavassa sivutuotteena.

Olkoon $R_0 \in (0,\infty)$ klassiseen malliin liittyvä Lundbergin eksponentti ($z=0$ kohdassa a). Merkitään

$$C_{\mathbb{X}}(t) = \log \mathbb{E}\left(e^{t\mathbb{X}}\right).$$

Periaatteessa voisi olla $R_0 = \infty$. Oletetaan siis kuitenkin, että näin ei ole. Tällöin

(6.34) $$C_{\mathbb{X}}(R_0) - (\nu+\mu)R_0 = 0.$$

a) Ilmeisesti

$$Y_n = (1-z)\sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{X}_j + \mathbb{X}_n - n(\nu+(1-z)\mu) - z\mu$$

ja

$$c_n(t) = n^{-1}\log \prod_{j=1}^{n-1} \mathbb{E}\left(e^{t(1-z)\mathbb{X}_j}\right)$$

$$+ n^{-1}\log \mathbb{E}\left(e^{t\mathbb{X}_n}\right) - t(\nu+(1-z)\mu) - n^{-1}z\mu t.$$

Siis

$$c(t) = C_{\mathbb{X}}((1-z)t) - (1-z)\mu t - \nu t, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Yhtälön (6.34) nojalla

$$c(R_0) = \underbrace{C_{\mathbb{X}}((1-z)R_0) - (\nu+\mu)(1-z)R_0}_{\substack{\leq 0, \text{ koska} \\ (1-z)R_0 \leq R_0}} - \nu z R_0 < 0.$$

Nähdään, että $R > R_0$. Jos T_0 on klassiseen malliin liittyvä varailuhetki, niin

$$\mathbb{P}(T < \infty) < \mathbb{P}(T_0 < \infty),$$

kun V_0 on suuri.

b) Kirjoitetaan Y_n riippumattomien termien summana:

$$Y_n = \sum_{j=1}^{n} X_j - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} X_i - nv$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left[1 - \sum_{i=j}^{n} \frac{1}{i}\right] X_j - nv.$$

Tunnetusti

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \log n + E + o(1), \quad n \to \infty,$$

missä E on Eulerin vakio. Saadaan approksimaatio

$$c_n(t) = n^{-1}\left[\sum_{j=1}^{n} c_X\left(\left(1 - \sum_{i=j}^{n} \frac{1}{i}\right)t\right)\right] - vt$$

$$= n^{-1}\left[\sum_{j=1}^{n} c_X\left(\left(1 + \log \frac{j}{n}\right)t\right)\right] - vt + o(1)$$

$$\to \int_0^1 c_X((1 + \log u)t)\, du - vt, \quad n \to \infty.$$

Osoitetaan, että $R \geq R_0$ siinä tapauksessa, että X noudattaa yhdistettyä Poisson-jakaumaa. Olkoon Poisson-parametri λ ja vahingon suuruuden Z momentit generoiva funktio M. Tällöin

$$c_X((1+\log u)t) = \lambda(M((1+\log u)t) - 1)$$

$$= \lambda \mathbb{E}(u^{tZ} e^{tZ}) - \lambda.$$

Fubinin lauseen nojalla

$$c(t) = \int_0^1 \lambda \mathbb{E}(u^{tZ} e^{tZ}) du - \lambda - vt$$

$$= \mathbb{E}\left(\int_0^1 \lambda u^{tZ} e^{tZ} du\right) - \lambda - vt$$

$$= \lambda \mathbb{E}\left(\frac{e^{tZ}}{tZ+1}\right) - \lambda - vt.$$

Riittää näyttää, että

$$c(t) < \lambda(M(t) - 1) - (v+\mu)t, \quad \forall t \in (0, R_0),$$

eli että

$$\lambda \mathbb{E}\left(\frac{e^{tZ}}{tZ+1} - e^{tZ}\right) + \mu t < 0, \quad \forall t \in (0, R_0).$$

Nyt vasen puoli on

$$-\lambda \mathbb{E}\left(\frac{tZ e^{tZ}}{tZ+1}\right) + \lambda \mathbb{E}(Z) t,$$

joka on negatiivinen jos ja vain jos

$$\mathbb{E}\left(\frac{Z e^{tZ}}{tZ+1}\right) > \mathbb{E}(Z).$$

Näin on, koska

$$e^{tZ} \geq 1 + tZ$$

ja erisuuruus on aito positiivisella todennäköisyydellä.

c) Nyt

$$Y_n = \sum_{i=0}^{n-1} (1-\alpha)^i X_{n-i} - \sum_{i=0}^{n-1} P(1-\alpha)^i - nv$$

ja

$$c_n(t) = n^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} c_X((1-\alpha)^i t) - n^{-1} Pt \sum_{i=0}^{n-1} (1-\alpha)^i - vt$$

$$\to -vt, \text{ kun } n \to \infty,$$

sillä jos $t > 0$ on kiinteä, niin

$$c_X((1-\alpha)^i t) = c_X(0) + (1-\alpha)^i t c_X'(0) + o(1), \quad i \to \infty,$$

ja

$$\left| n^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} c_X((1-\alpha)^i t) \right|$$

$$\leq n^{-1} \left(\left| t c_X'(0) \cdot \frac{1}{\alpha} \right| + o(1) n \right) \to 0.$$

Nähdään, että $R = \infty$.

d) Oletetaan, että käytössä on bonusjärjestelmä, jossa bonusluokat ovat $S = \{1, \ldots, I\}$ ja bonusskaala $b_1, \ldots, b_I$. Tarkastellaan ensin yhtä vakuutettua k. Olkoon vuotuinen kokonaisvahinkomäärä $X_n^{(k)}$ ja vakuutusmaksu $P_n^{(k)}$, sekä

$$\xi_n^{(k)} = X_n^{(k)} - P_n^{(k)} - v.$$

Oletetaan, että $X_1^{(k)}, X_2^{(k)}, \ldots$ ovat riippumattomia ja noudattavat samaa yhdistettyä Poissonjakaumaa. Vahingon suuruudet olkoot $Z, Z_1, Z_2, \ldots$

Olkoon $C_n^{(k)}$ bonusluokka ja $K_n^{(k)}$ vahinkojen lukumäärä vuonna n. Merkitään

$$M_1^{(k)} = (i_1, K_1^{(k)})$$

ja

$$M_{n+1}^{(k)} = (T_{K_n^{(k)}}(C_n^{(k)}), K_{n+1}^{(k)}),$$

missä T kuvaa bonussäännöstöä. Ilmeisesti $\{M_n^{(k)}\}$ on Markovin ketju ja

$$\{(M_n^{(k)}, Y_n^{(k)})\},$$

$$Y_n^{(k)} = \xi_1^{(k)} + \ldots + \xi_n^{(k)}$$

on Markov-additiivinen prosessi. Erityisesti

$$\mathbb{P}\left(\xi_{n+1}^{(k)} \le y,\ M_{n+1}^{(k)} = (j,m) \mid M_n^{(k)} = (i,r)\right)$$

$$= 1(T_r(i) = j)\ \mathbb{P}(K_{n+1}^{(k)} = m)\ \mathbb{P}(Z_1 + \dots + Z_m - b_j - r \le y).$$

Sopivin säännöllisyysoletuksin

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \log \mathbb{E}\left(e^{tY_n^{(k)}}\right) = \begin{cases} \log \varkappa^{(k)}(t), & \text{jos } \mathbb{E}(e^{tZ}) < \infty \\ \infty, & \text{muuten,} \end{cases}$$

missä $\varkappa^{(k)}(t)$ on Perron-Frobeniuksen ominaisarvo, ks. esimerkki 6.2.

Jos vakuutuskannassa on N riippumatonta edellä esitetyn tyyppistä kohdetta ja

$$Y_n = Y_n^{(1)} + \dots + Y_n^{(N)},$$

niin

$$c(t) = \begin{cases} \log \varkappa^{(1)}(t) + \dots + \log \varkappa^{(N)}(t), & \text{jos } \mathbb{E}(e^{tZ}) < \infty, \\ \infty, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Tila-avaruus edellä on numeroituva eikä äärellinen kuten esimerkissä 6.2. Perron-Frobenius-teoria soveltuu kuitenkin nytkin. Tila-avaruus voidaan myös redusoida äärelliseksi, koska bonusluokkia on vain äärellinen määrä.

6.4. Jälleenvakuutukseen liittyviä Lundbergin eksponentteja

Olkoon alkuperäinen kokonaisvahinkomäärä vuosina 1, 2, ... kuten kohdassa 6.3 ja vakuutusmaksu P deterministinen. Oletetaan, että yhtiö ottaa vuosittain SL-jälleenvakuutuksen omavastuumäärällä M. Olkoon P^{jv} jälleenvakuutusmaksu ja

$$P^{ov} = P - P^{jv}.$$

Olkoot $X^{ov}, X_1^{ov}, X_2^{ov}, \dots$ omalla vastuulla olevat kokonaisvahinkomäärät,

$$X^{ov} = \min(X^{ov}, M), \quad X_n^{ov} = \min(X_n^{ov}, M), \quad n \geq 1.$$

Oletetaan, että $P^{ov} > E(X^{ov})$. Olkoon $x > 0$ premi ja kiinteä. Tarkastellaan todennäköisyyksiä $P(T \leq x \mid U_0)$. Samantyyppiseen asetelmaan päädytään asettamalla sopimuksiin vakuutusmäärärajoituksia, kts. luku 2.

Olkoon

$$\bar{x} = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid P(X > x) > 0\} \in [0, \infty].$$

Jälleenvakuuttaja joutuu korvaamaan maksimissaan määrän $\bar{x} - M$, joten voidaan olettaa, että

$$(6.40) \quad P^{jv} < \bar{x} - M.$$

Oletetaan lisäksi, että

$$D = \{t \in \mathbb{R} \mid c_X(t) < \infty\}$$

on avoin ja että $R_0 \in (0, \infty)$, kts. (6.34).

Olkoon

$$c_M(t) = \log \mathbb{E}(e^{t\bar{X}^{ov}}) - p^{ov} t.$$

Tällöin

$$c_M'(t) \to M - p^{ov}, \quad t \to \infty,$$

kts. riskiteoria 2011. Samoin

$$c'(t) \to \bar{\kappa} - p, \quad t \to \infty.$$

On siis olemassa $t_0 \in D$ siten, että

$$c(t) > c_M(t), \quad \forall\, t > t_0.$$

Jos $y > c'(t_0)$, niin

$$c^*(y) = \sup_{t \geq t_0} \{ty - c(t)\}$$

$$\leq \sup_{t \geq t_0} \{ty - c_M(t)\} \leq c_M^*(y).$$

Jos siis $x < 1/c'(t_0)$ on sopiva, niin lauseiden 6.4 ja 6.5 nojalla

$$\lim_{U_0 \to \infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}(T \leq x U_0)$$

$$\geq \lim_{U_0 \to \infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}(T_M \leq x U_0),$$

missä T_M on SL-sopimusten jälkeinen vararikkohetki.

Lisälähteitä kohtaan 6:

Dembo, A., Zeitouni, O. (1998). Large deviations techniques and applications. Springer.

Rockafellar, R. T. (1970). Convex analysis. Princeton Univ. Press.

Lähdeluettelo

Dickmann, H. (1978) Einsatz der Clusteranalyse bei Klassifikationsproblemen in der Versicherungswirtschaft, BDGVM Vol. XIII, No. 4

Pentikäinen, T., Rantala, J. (1982) Solvency of insurers and equalization reserves, Vol I and II. The insurance publishing company, Helsinki.

Rao, C.R. (1952) Advanced statistical methods in biometric research, John Wiley & Sons Inc.

Sisällysluettelo