6. Tariffijärjestelmät ja vakavaraisuus

Klassisessa mallissa vakuutusmaksu P on deterministinen vakio. Vuotuinen tappio ξ_n on muotoa

$$\xi_n = X_n - P,$$

missä X_n on vuoden n kokonaisvahinkomäärä. Edelleen oletetaan, että $X_1, X_2, \ldots$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita ja että P sisältää positiivisen varmuuslisän eli että

$$P > \mathbb{E}(X_1).$$

Olkoon

$$c(t) = \log \mathbb{E}(e^{t\xi_1}).$$

Vararikkohetki $T = T(U_0)$ alkupääomalla $U_0 > 0$ määritellään ehdosta

$$T = \begin{cases} \inf\{n \mid \xi_1 + \cdots + \xi_n > U_0\} \\ \infty, \text{ jos } \xi_1 \le U_0, \xi_1 + \xi_2 \le U_0, \ldots \end{cases}$$

Kun U_0 on suuri, on approksimaatio

$$\mathbb{P}(T < \infty) \approx e^{-RU_0}$$

perusteltu, missä $R > 0$ on sellainen, että $c(R) = 0$. Saman kaltaisia karkeita arvioita voidaan esittää tyyppiä

$$\mathbb{P}(T \le x U_0)$$

olevalle todennäköisyydelle, kun $x \in \mathbb{R}$ on sopiva. Kts. Riskiteoria, luku 9.

Aiemmin esitetyn perusteella vuotuinen tappio on yleisemmin muotoa

$$\xi_n = X_n - P_n,$$

missä P_n on käytettävän tariffijärjestelmän mukainen vakuutusmaksu. Ilmeisesti yleensä ξ-muuttujat eivät ole riippumattomia eivätkä samoin jakautuneita. Klassiset tulokset eivät siis suoraan sovellu.

Tarkastellaan seuraavassa klassisen teorian yleistyksiä. Kuvatkoon prosessi $\{Y_n\}$ kumulatiivista tappiota vuoteen n mennessä ja olkoon U_0 edelleen alkupääoma. Vararikkohetki on nyt

$$(6.1) \qquad T = \begin{cases} \inf\{n \mid Y_n > U_0\} \\ \infty, \text{ jos } Y_1 \le U_0, Y_2 \le U_0, \ldots \end{cases}$$

Klassisessa mallissa $\{Y_n\}$ on satunnaiskulku,

$$Y_n = (X_1 - P) + \ldots + (X_n - P), \qquad X_1, X_2, \ldots \text{ i.i.d.}$$

Tästä oletuksesta tullaan siis luopumaan.

6.1. Gärtner-Ellisin lause

Taustaksi esitetään ensin suurten poikkeamien teoriasta Gärtner-Ellisin lause. Olkoot $Y_1, Y_2, \ldots$ todennäköisyyskentällä $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ määriteltyjä satunnaismuuttujia ja

$$(6.3) \qquad c_n(t) = n^{-1} \log \mathbb{E}(e^{tY_n}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Määritellään lisäksi $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ehdosta

$$(6.5) \qquad c(t) = \limsup_{n \to \infty} c_n(t).$$

Tunnetusti (6.3) määrittelee konveksin funktion. Myös c on konveksi konveksien funktioiden yläraja-arvona. Jatkossa tullaan aina olettamaan, että $c(t) > -\infty$, $\forall t$. Tähän riittää, että $c(t) < \infty$ jossain avoimessa joukossa. Konveksisuus merkitsee tällöin, että

$$c(\alpha t + (1-\alpha)u) \leq \alpha c(t) + (1-\alpha) c(u),$$

kaikilla $t, u \in \mathbb{R}$ ja $\alpha \in (0,1)$. Tässä sovitaan, että $\alpha \cdot \infty = \infty$, $\infty + b = \infty$, $\forall \alpha \in (0,1)$, $b \in \mathbb{R}$. Olkoon c^* funktion c konveksi konjugaatti,

$$c^*(v) = \sup\{tv - c(t);\ t \in \mathbb{R}\}, \quad \forall v \in \mathbb{R}.$$

Tällöin c^* on konveksi ja $c^*(v) \geq 0$, $\forall v \geq 0$. Lisäksi c^* on alhaalta puolijatkuva eli

$$\liminf_{v \to v_0} c^*(v) \geq c^*(v_0), \quad \forall v_0 \in \mathbb{R}.$$

Olkoon

$$D(c) = \{t \in \mathbb{R} ; c(t) < \infty\}$$

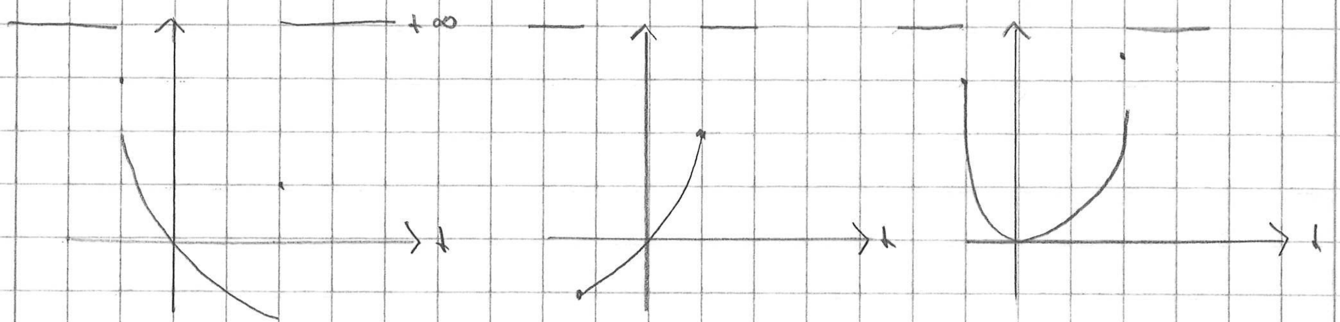
ja $\mathring{D}(c)$ joukon $D(c)$ sisäosa. Tällöin $D(c)$ on väli (voi olla myös $D(c) = \{0\}$). Funktio c on <u>sileä</u> (essentially smooth), jos

1) $\mathring{D}(c) \neq \emptyset$

2) $c'(t)$ on olemassa, $\forall t \in \mathring{D}(c)$

3) $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t \in \mathring{D}(c)}} |c'(t)| = \infty$ aina, kun t_0 on $D(c)$:n reunapiste.

Esimerkkejä c:stä



Vain oikeanpuolimmaisin c on sileä

Lause 6.1 (Gärtner-Ellis)

(i) Jos

$$\liminf_{t \to 0} c(t) \geq 0, \tag{6.6}$$

niin

$$\limsup_{n \to \infty} n^{-1} \log \mathbb{P}(Y_n/n \in F) \leq -\inf\{c^*(v); v \in F\} \tag{6.7}$$

kaikilla suljetuilla joukoilla $F \subseteq \mathbb{R}$.

(ii) Olkoon $t \in \mathring{D}(c)$ sellainen, että $c'(t)$ on olemassa ja $c(t)$ on raja-arvo,

$$c(t) = \lim_{n \to \infty} n^{-1} \log \mathbb{E}(e^{tY_n}). \tag{6.8}$$

Jos $G \subseteq \mathbb{R}$ on avoin joukko ja $c'(t) \in G$, niin

$$\liminf_{n \to \infty} n^{-1} \log \mathbb{P}(Y_n/n \in G) \geq -c^*(c'(t)), \tag{6.9}$$

(iii) Oletetaan, että c on sileä ja että $c(t)$ on raja-arvo (6.8) kaikilla $t \in \mathring{D}(c)$. Silloin

$$\liminf_{n \to \infty} n^{-1} \log \mathbb{P}(Y_n/n \in G) \geq -\inf\{c^*(v); v \in G\} \tag{6.10}$$

kaikilla avoimilla joukoilla $G \subseteq \mathbb{R}$.

Yleisen terminologian mukaisesti perhe $\{Y_n/n\}$ toteuttaa suurten poikkeamien periaatteen vauhtifunktiolla c^*, jos (6.7) ja (6.10) pätevät mainituille $\mathbb{R}$:n osajoukoille.

Esimerkki 6.1. Olkoon $\{Y_n\}$ satunnaiskulku. Tällöin

$$C_n(t) = C(t) = \log \mathbb{E}(e^{tY_1}), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Kumulantit generoiva funktio on kaikkialla alhaalta puolijatkuva, joten (6.6) ja siis (6.7) toteutuvat. Välttämättä C ei ole sileä, joten alarajatuloksia ei saada yleisesti lauseesta 6.1. Voidaan osoittaa muilla keinoin, että (6.10) pätee kaikille satunnaiskuluille.

Esimerkki 6.2. Olkoon $\{M_n\}$ Markovin ketju tila-avaruudella $S = \{1, \dots, N\}$ ja olkoon $M_0 = i_0 \in S$. Olkoon ξ_n vuoden n tappio. Oletetaan, että tämän jakauma riippuu Markovin ketjun tiloista M_{n-1} ja M_n, mutta $\xi_1, \dots, \xi_n$ ovat muuten riippumattomia. Täsmällisemmin, jos $M_n = i$ ja $M_{n+1} = j$ on

$$\mathbb{P}(\xi_{n+1} \leq x) = F_{ij}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

missä $\{F_{ij};\ i, j \in S\}$ on perhe kertymäfunktioita. Vielä täsmällisemmin,

$$\mathbb{P}(\xi_{n+1} \leq x, M_{n+1} = j \mid M_0, \dots, M_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$$

$$= p_{M_n j} \cdot F_{M_n j}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

missä $P = (p_{ij})$, $p_{ij} = \mathbb{P}(M_1 = j \mid M_0 = i)$. Ilmeisesti

$$\mathbb{P}(\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n)$$

$$= \sum_{i_1, \dots, i_n \in S} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n} F_{i_0 i_1}(x_1) F_{i_1 i_2}(x_2) \cdots F_{i_{n-1} i_n}(x_n)$$

kaikilla $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Tällöin $\{(M_n, \xi_n)\}$ on Markovin ketju (tila-avaruus on $S \times \mathbb{R}$, mutta olennaisesti ottaen $\{M_n\}$ määrää riippuvuudet).

Olkoon $Y_0 = 0$ ja

$$Y_n = \xi_1 + \dots + \xi_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tällöin $\{(M_n, Y_n)\}$ on Markov-additiivinen prosessi.

Olkoon $t \in \mathbb{R}$. Merkitään

$$\hat{p}_{ij}(t) = p_{ij} \int_{\mathbb{R}} e^{tx} dF_{ij}(x)$$

ja olkoon $\hat{P}(t)$ näistä muodostuva matriisi,

$$\hat{P}(t) = (\hat{p}_{ij}(t)).$$

Ilmeisesti

$$\mathbb{E}(e^{tY_2}) = \sum_{i_1, i_2 \in S} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \int_{\mathbb{R}} e^{tx_1} dF_{i_0 i_1}(x_1) \int_{\mathbb{R}} e^{tx_2} dF_{i_1 i_2}(x_2)$$

$$= (\hat{P}(t)^2 \mathbf{1})_{i_0} \quad \text{(ko. vektorin } i_0\text{. komponentti)},$$

missä $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$. Tämä yleistyy suoraviivaisesti:

$$\mathbb{E}(e^{tY_n}) = (\hat{P}(t)^n \mathbf{1})_{i_0}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Oletetaan nyt, että $\{M_n\}$ on jaksoton ja pelkistymätön ja olkoon t sellainen, että

$$\hat{p}_{ij}(t) < \infty, \quad \forall i, j.$$

Tällöin matriisilla $\hat{P}(t)$ on ns. Perron-Frobenius-ominaisarvo $\mathcal{X}(t)$, jolla on seuraavat ominaisuudet:

a) $\mathcal{X}(t)$ on yksinkertainen ja reaalinen. Jos $\tilde{\mathcal{X}}(t)$ on myös matriisin $\hat{P}(t)$ ominaisarvo ja $\mathcal{X}(t) \neq \tilde{\mathcal{X}}(t)$, niin $\mathcal{X}(t) > |\tilde{\mathcal{X}}(t)|$.

b) $\mathcal{X}(t)$:tä vastaa vasen ja oikea ominaisvektori, joiden kaikki komponentit ovat aidosti positiivisia.

Olkoon $h(t)$ vasen ja $m(t)$ oikea kohdan b) mukainen ominaisvektori. Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{X}(t)^{-n} \left(\hat{P}(t)^n\right)_{ij} = h_i(t) m_j(t).$$

Edellä esitetyt tulokset tunnetaan Perron-Frobeniuksen lauseena. Kts. esimerkiksi

Seneta, E. (1981) Non-negative matrices and Markov chains. Springer, New York.

Todetaan, että

$$c(t) = \begin{cases} \log \mathcal{X}(t), & \text{jos } t \in \mathcal{D} \\ \infty, & \text{muulloin,} \end{cases}$$

missä

$$\mathcal{D} = \{t \in \mathbb{R} ;\ \hat{p}_{ij}(t) < \infty,\ \forall i, j \in S\}.$$

6.2. Vararikkotodennäköisyyksien estimaatteja

Johdetaan tässä kappaleessa suurten poikkeamien teorian tyyppisiä estimaatteja vararikkohetkelle T, kts. (6.1).

Olkoon

(6.11) $$R = \sup\{t;\ c(t) \leq 0\} \in [0, \infty]$$

ja

(6.13) $$d(t) = \sup\{c_n(t);\ n \in \mathbb{N}\}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Lause 6.2. Oletetaan, että $c(t_0) < 0$ jollain $t_0 > 0$ ja että

(6.15) $$d(t) < \infty, \quad \forall t \in (0, R).$$

Silloin

(6.17) $$\limsup_{U_0 \to \infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty) = -R.$$

Parametria R kutsutaan usein Lundbergin eksponentiksi.

Huomautus 6.2.1. Myös (6.13) määrittelee konveksin funktion $d: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (konveksien funktioiden pisteittäinen supremum on konveksi).

Todistus. Konveksisuuden nojalla on ilmeistä, että $c(t) < 0$, $\forall t \in (0, R)$ (sillä $c(0) = 0$, $c(t_0) < 0$ ja $c(R-) \leq 0$). Olkoon

$$\bar{Y} = \sup\{0, Y_1, Y_2, \dots\}.$$

Osoitetaan ensin, että $\bar{Y}$ on satunnaismuuttuja eli että

$$\mathbb{P}(\bar{Y} < \infty) = 1.$$

Olkoon $t \in (0, R)$ kiinteä, jolloin siis $c(t) < 0$. Silloin

$$(6.18) \quad \mathbb{E}(e^{tY_n}) \geq \mathbb{E}(e^{tY_n} 1(Y_n > u_0))$$

$$\geq e^{tu_0} \mathbb{P}(Y_n > u_0),$$

joten

$$\mathbb{P}(Y_n > u_0) \leq e^{-tu_0} e^{nc_n(t)}.$$

Toisaalta

$$\mathbb{P}(\bar{Y} > u_0) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y_n > u_0)$$

$$\leq e^{-tu_0} \sum_{n=1}^{\infty} e^{nc_n(t)}.$$

Koska $c(t) < 0$, voidaan määrätä $\varepsilon > 0$ ja n_ε siten, että

$$c_n(t) \leq -\varepsilon, \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Oletuksen mukaan myös $d(t) < \infty$ ja siis

$$c_n(t) \le d(t) < \infty, \quad \forall n \le n_\varepsilon .$$

Seuraa

$$(6.19) \quad \begin{cases} \mathbb{P}(\bar{Y} > U_0) \le e^{-tU_0}\left[n_\varepsilon e^{n_\varepsilon |d(t)|} + A\right], \\ A = \sum_{n \ge n_\varepsilon} e^{-n\varepsilon} < \infty . \end{cases}$$

Nähdään, että $\mathbb{P}(\bar{Y} > U_0) \to 0$, kun $U_0 \to \infty$ ja siis $\mathbb{P}(\bar{Y} < \infty) = 1$.

Ilmeisesti $T < \infty$, jos ja vain jos $\bar{Y} > U_0$. Edellä saadun tuloksen (6.19) nojalla

$$\mathbb{P}(T < \infty) \le e^{-tU_0} D(t),$$

missä $D(t)$ on vakio. Siispä

$$(6.21) \quad \limsup_{U_0 \to \infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty) \le -t .$$

Tämä pätee kaikilla $t \in (0, R)$, joten myös

$$(6.23) \quad \limsup_{U_0 \to \infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty) \le -R .$$

Epäyhtälön kääntämiseksi palautetaan mieleen, että

$$\limsup_{u_0 \to \infty} u_0^{-1} \log \mathbb{P}(\bar{Y} > u_0) = -S,$$

missä

$$S = \sup\{t ; \mathbb{E}(e^{t\bar{Y}}) < \infty\}$$

(Riskiteoria, lemma 5.1).

Riittää siis näyttää, että $S \leq R$. Tätä varten on osoitettava, että

$$\mathbb{E}(e^{t\bar{Y}}) = \infty, \quad \forall t > R.$$

Erityisesti voidaan olettaa, että $R < \infty$. Jos $t > R$, niin välttämättä $c(t) > 0$. On siis olemassa $\varepsilon > 0$ ja osajono, jolle

$$c_{n_k}(t) \geq \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Tällöin

$$\mathbb{E}(e^{t\bar{Y}}) \geq \mathbb{E}(e^{tY_{n_k}})$$

$$= e^{n_k c_{n_k}(t)} \geq e^{n_k \varepsilon} \to \infty, \text{ kun } k \to \infty. \qquad \square$$

Lause 6.3. Oletetaan, että raja-arvo (6.8) pätee ja $c(t) < \infty$ kaikilla $t \in (R, R+h)$ eräälle $h > 0$. Silloin

$$(6.25) \qquad \liminf_{U_0 \to \infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty) \geq -R.$$

Todistus. Koska c on konveksi, ovat vasemman ja oikean puoleiset derivaatat $c'(t-)$ ja $c'(t+)$ olemassa kaikilla $t \in (R, R+h)$. Lisäksi $t \mapsto c'(t-)$ ja $t \mapsto c'(t+)$ ovat kasvavia ja $c'(t-) \leq c'(t+)$, $\forall t \in (R, R+h)$. Edelleen, jos $t \mapsto c'(t-)$ on jatkuva pisteessä $t = t_0$, niin $c'(t_0-) = c'(t_0+)$, joten $c'(t_0)$ on olemassa. Koska epäjatkuvuuskohtia on korkeintaan numeroituva määrä, voidaan määrätä jono (t_m) siten, että

$$t_m > R, \ \forall m, \quad c'(t_m) \text{ on olemassa ja } \lim_{m \to \infty} t_m = R.$$

(voidaan olettaa, että $R < \infty$, koska muuten (6.25) on triviaali). Ilmeisesti $c'(t_m) > 0$, $\forall m$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Silloin

$$\mathbb{P}(T((1-\varepsilon)U_0) < \infty) \geq \mathbb{P}(Y_{\lceil U_0/c'(t_m) \rceil} > (1-\varepsilon)U_0)$$

$$\geq \mathbb{P}(Y_{\lceil U_0/c'(t_m) \rceil} / \lceil U_0/c'(t_m) \rceil > (1-\varepsilon)c'(t_m)).$$

Lauseen 6.1 kohdan (ii) nojalla

$$\liminf_{U_0 \to \infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}(T((1-\varepsilon)U_0) < \infty)$$

$$\geq - \frac{c^*(c'(t_m))}{c'(t_m)}$$

$$= - \frac{t_m c'(t_m) - c(t_m)}{c'(t_m)} \geq -t_m.$$

Antamalla m:n kasvaa nähdään, että

$$\liminf_{U_0 \to \infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}(T((1-\varepsilon)U_0) < \infty) \geq -R$$

ja edelleen

$$\liminf_{U_0 \to \infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}(T(U_0) < \infty) \geq -\frac{R}{1-\varepsilon}.$$

Tästä seuraa (6.25) rajalla, kun $\varepsilon \to 0+$. $\square$

Lause 6.4. Olkoon $c(t) < \infty$ jollain $t > R$ ja $d(t) < \infty$, $\forall\, t \in (0,\infty) \cap \mathring{D}(c)$. Merkitään

$$\mu = \frac{1}{c'(R+)}.$$

Silloin kaikilla $x \in (0,\mu)$

(6.28) $$\limsup_{U_0 \to \infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}(T \leq x U_0) \leq -x c^*\left(\frac{1}{x}\right).$$

Todistus. Olkoon $t \in (R, \infty) \cap \mathring{D}(c)$ mielivaltainen. Silloin

$$\mathbb{P}(Y_n > U_0) \le e^{-tU_0} e^{n c_n(t)},$$

kts. (6.18). Siispä

$$\mathbb{P}(T \le x U_0) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n \le x U_0} \{Y_n > U_0\} \Big)$$

$$\le \sum_{n \le x U_0} e^{-tU_0} e^{n c_n(t)}.$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Oletusten nojalla voidaan määrätä vakio C' siten, että

$$e^{n c_n(t)} \le C' e^{n(c(t)+\varepsilon)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Siispä

$$\mathbb{P}(T \le x U_0) \le e^{-tU_0} \cdot C' \frac{e^{(\lfloor x U_0 \rfloor + 1)(c(t)+\varepsilon)} - 1}{e^{c(t)+\varepsilon} - 1}.$$

Nyt $c(t) > 0$, joten

$$\mathbb{P}(T \le x U_0) \le D e^{-tU_0 + x c(t) U_0}, \quad \forall U_0 > 0,$$

missä D on vakio. Edelleen

$$\limsup_{U_0 \to \infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}(T \le x U_0) \le -t + x c(t)$$

ja siis

$$(6.30) \quad \limsup_{U_0 \to \infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}(T \le x U_0) \le -\sup\{t - x c(t);\ t \in (R, \infty) \cap \mathring{D}(c)\}$$

$$= -x \sup\{t/x - c(t);\ t \in (R, \infty) \cap \mathring{D}(c)\}.$$

Jos $\bar{t}$ on $D(c)$:n oikea reunapiste, niin

$$\limsup_{t \to \bar{t}-} c(t) \leq c(\bar{t})$$

konveksisuuden nojalla. Siispä

$$(6.32) \quad \sup\{t/x - c(t);\, t \in (R, \infty) \cap \mathring{D}(c)\}$$

$$= \sup\{t/x - c(t);\, t > R\}.$$

Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $f(t) = t/x - c(t)$. Tällöin f on konkaavi ja

$$f'(R+) = 1/x - c'(R+) > 0.$$

Konkaavisuuden nojalla

$$\sup\{t/x - c(t);\, t > R\}$$

$$= \sup\{t/x - c(t);\, t \in \mathbb{R}\} = c^*(1/x).$$

Yhdistettynä tuloksiin (6.30) ja (6.32) saadaan (6.28). $\square$

Pyritään nyt kääntämään lauseen 6.4 tulos. Olkoon

$$\bar{t} = \sup\{t \mid c(t) < \infty\} \in [0, \infty].$$

Seuraavassa tullaan olettamaan, että c on derivoituva välillä $(R, \bar{t})$. Oletetaan tunnetuksi, että tällöin c' on jatkuva samalla välillä. Merkitään

$$\underline{x} = \lim_{t \to \bar{t}-} \frac{1}{c'(t)} \in [0, \infty).$$

Lause 6.5. Oletetaan, että raja-arvo (6.8) pätee kaikilla $t \in (R, \bar{t})$ ja että $c'(t)$ on olemassa samalla välillä. Jos

$$x \in (\underline{x}, \mu),$$

niin

$$\liminf_{U_0 \to \infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}(T \leq x U_0) \geq -x c^*\left(\frac{1}{x}\right).$$

Todistus. Olkoon $x > y > z$, missä myös $y, z \in (\underline{x}, \mu)$. Silloin

$$\mathbb{P}(T \leq x U_0) \geq \mathbb{P}(Y_{\lceil y U_0 \rceil} > U_0)$$

$$\geq \mathbb{P}\left(Y_{\lceil y U_0 \rceil} / \lceil y U_0 \rceil > \frac{1}{y}\right).$$

Koska $\frac{1}{z} \in (\frac{1}{y}, \infty)$ ja $\frac{1}{z} = c'(t_z)$ eräälle $t_z \in (R, \bar{t})$, niin lauseen 6.1 kohdan (ii) nojalla

$$\liminf_{U_0 \to \infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}(T \le x U_0) \ge -y c^*(1/z).$$

Koska c^* on äärellinen eräässä pisteen $\frac{1}{x}$ ympäristössä, niin se on jatkuva pisteessä $\frac{1}{x}$. Lauseen väite saadaan rajalla, kun $y, z \to x$. $\square$