5.3.3. Bonusjärjestelmien mittareita

Olkoon bonusjärjestelmä kiinnitetty. Valitaan riskiparametriksi ϑ vahinkojen lukumäärän odotusarvo vuodessa. Mikäli vahingon suuruuden odotusarvo a_1 on sama kaikilla kohteilla, on oikeudenmukainen maksutaso $a_1 v$, kun $\vartheta = v$. Pitkällä tähtäimellä toteutuvaa maksutasoa kuvaa taas

$$B(v) = \sum_{j=1}^{J} b_j \pi_j(v),$$

kts. (5.36). Ideaalitilanteessa muutosta

$$\vartheta = v \longmapsto v + \Delta$$

vastaa maksutason muutos

$$a_1 v \longmapsto a_1 (v + \Delta).$$

Mikäli yllä esitetty $B(v)$ olisi tällainen, olisi siis

$$\frac{B(v+\Delta) - B(v)}{B(v)} = \frac{\Delta}{v}$$

eli

$$\frac{B(v+\Delta) - B(v)}{\Delta} = \frac{B(v)}{v}.$$

Antamalla $\Delta \to 0$ saadaan

$$B'(v) \cdot \frac{v}{B(v)} = 1.$$

Tyypillisesti kuitenkin

$$\frac{B(v+\Delta)-B(v)}{B(v)} < \frac{\Delta}{v},$$

jolloin

$$B'(v)\cdot\frac{v}{B(v)} < 1.$$

Vasen puoli mittaa sitendemmunkaiscuntta riskiparametrin arvolla v. Asymptoottinen tehokkuus (tai elastisuus) pisteessä v on määritelmän mukaan

$$\eta(v) = B'(V)\cdot\frac{V}{B(V)}.$$

Toivottavaa olisi, että $\eta(v)$ olisi lähellä ykköstä erityisesti tyypillisillä kannassa esiintyvillä riskiparametrin arvoilla. Käsite on peräisin Loimarannalta (Astin Bulletin (1972), s. 233-245).

Edellä esitetty mittari ja monet muutkin tarkastelut nojautuvat vakuutusmaksujen asymptoottiseen käyttäytymiseen. Tämä on parhaiten perusteltua 'iäkkäässä' vakuutuskannassa. Hyödyllistä on erityisesti tietää, miten nopeasti suppeneminen kohti tasapainojakaumaa tapahtuu. Konvergenssinopeus pisteessä $\vartheta = v$ määritellään sellaisena reaalilukuna $\rho(v) \in [0,1]$, että

1) mielivaltaiselle $r > \varrho(v)$ on olemassa reaaliluku $c(r)$ siten, että

$$\max_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} \left| p_{ij}^{(n)}(v) - \pi_j(v) \right| \leq c(r) r^n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

missä $p_{ij}^{(n)}(v)$ on n askeleen siirtymätodennäköisyys,

$$p_{ij}^{(n)}(v) = \left(P(v)^n\right)_{ij},$$

2) mielivaltaiselle $r < \varrho(v)$ kohdan 1) mukaista reaalilukua $c(r)$ ei ole olemassa.

Voidaan näyttää, että

$$\varrho(v) = \max\{ |\gamma_1(v)|, \dots, |\gamma_{I-1}(v)| \},$$

missä $\gamma_1(v), \dots, \gamma_{I-1}(v)$ ovat matriisin $P(v)$ ykkösestä eroavat ominaisarvot. Konvergenssinopeuden käsitteen bonussysteemien kuvaamiseksi on esittänyt Bonsdorff (Astin Bulletin (1992), s. 217-223).

Esimerkki 5.5. Olkoon bonussäännöstö kuten esimerkissä 5.3 sekä $b_1 = 4$ ja $b_2 = 3$. Määrätään asymptoottiset tehokkuudet ja konvergenssinopeudet riskiparametrin arvoille $v \in (0, \infty)$. Esimerkin 5.3 nojalla

$$\pi(v) = (1 - e^{-v} \quad e^{-v})$$

ja siis

$$B(v) = 4(1 - e^{-v}) + 3e^{-v} = 4 - e^{-v}.$$

Tehokkuus on

$$\eta(v) = \frac{v}{4e^{v} - 1}.$$

Konvergenssinopeuden selvittämiseksi todetaan, että matriisin $P(v)$ ominaisarvot ovat 0 ja 1. Siis $\rho(v) = 0, \ \forall\, v > 0.$

Lisälähteitä kohtaan 5.3.3:

Lemaire, J. (1995) Bonus-Malus systems in automobile insurance. Kluwer Academic Publishers.

5.3.4. Bonusnälästä

Olkoon bonusjärjestelmä annettu ja vakuutetun riskiparametri v kiinnitetty. Oletetaan, että tulevien vuosien vahinkojen lukumäärät ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita. Vuotuiset kokonaisvahinkomäärät olkoot yhdistettyjä muuttujia ja myös toisistaan riippumattomia ja samoin jakautuneita. Olkoon K yleinen vahinkojen lukumäärää, Z vahingon summaa ja X kokonaisvahinkomäärää kuvaava satunnaismuuttuja. Vahingon summien kertymäfunktio olkoon S ja

$$p_k(v) = \mathbb{P}(K=k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Pitkällä tähtäimellä vakuutettu maksaa vuotta kohden vakuutusmaksua määrän

$$B(v) = \sum_{j=1}^{I} b_j \, \pi_j(v)$$

tiettyjen säännöllisyysehtojen ollessa täytetyt, kts. kohta 5.3.1.

Vakuutettu voi vaikuttaa kustannuksiinsa jättämällä pienet vahingot ilmoittamatta ja maksamalla ne siis itse. Ilmiötä kutsutaan bonusnäläksi.

Tarkastellaan aluksi seuraavaa yksinkertaista strategiaa. Liitetään jokaiseen bonusluokkaan i kynnys y_i. Jos vakuutettu on sattumisvuonna luokassa i, ilmoitetaan yhtiölle vain tätä suuremmat vahingot ja muut maksetaan itse. Olkoon

$$\bar{y} = (y_1, \dots, y_I)$$

kynnyksistä muodostuva vektori. Vahingon summajakauma oletetaan seuraavassa jatkuvaksi.

Olkoon vakuutetun kynnysluokka i ja

$$q_i = \mathbb{P}(Z \leq y_i) = S(y_i).$$

Olkoon edelleen K_i^{ov} niiden vahinkojen lukumäärä, jotka vakuutettu maksaa itse vuoden aikana sekä

$$m_i = \mathbb{E}(Z \mid Z \leq y_i) = \frac{1}{q_i} \int_0^{y_i} z \, dS(z).$$

Lause 5.5. Tarkasteltavana vuotena

$$\mathbb{P}(K_i^{ov} = k) = \sum_{h=k}^{\infty} \binom{h}{k} q_i^k (1-q_i)^{h-k} \, \mathbb{P}(K=h)$$

ja kokonaiskustannusten odotusarvo on

$$E_i = b_i + q_i \, \mathbb{E}(K) \, m_i$$

(kokonaiskustannus tarkoittaa vakuutusmaksua lisättynä itse maksettujen vahinkojen kokonaismäärällä).

Todistus. Kts. Riskiteoria, lause 7.1.1. Muutokset lauseen 5.5 tilanteeseen ovat pieniä. $\square$

Oletetaan, että vakuutettu jatkaa vuodesta toiseen käyttäen samoja kynnyksiä. Kahden ensimmäisen vuoden kokonaiskustannusten diskontattu odotusarvo on ($K_i^!$ kuvaa yhtiölle ilmoitettuja vahinkoja)

$$E_i + \beta \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(K_i^! = k) \, E_{T_k(i)},$$

missä $\beta \in (0,1)$ on diskonttaustekijä. Tätä jatkamalla saadaan esitys mielivaltaisen monen vuoden kustannuksille.

Tarkastellaan nyt hypoteettista vakuutettua, joka pysyy kannassa ikuisesti. Oletetaan myös, että vahinkoja sattuu Poisson-prosessin mukaisesti intensiteetillä ν ja että kokonaisvahinkoprosessi on yhdistetty Poisson-prosessi. Olkoon v_i kokonaiskustannusten diskontattu odotusarvo, kun alussa ollaan tilassa i. Ilmeisesti (vuosia on nyt ääretön määrä)

$$(5.40) \qquad v_i = E_i + \beta \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(K_i' = k)\, v_{T_k(i)}, \quad i = 1, \dots, I.$$

Tästä $v_1, \dots, v_I$ on ratkaistavissa.

Pyritään nyt optimoimaan kynnykset eopivin yksinkertaistuksin. Oletetaan, että heti vuoden alussa sattuu vahinko suuruudeltaan u. Jos vakuutettu ei ilmoita vahinkoa ja käytössä on optimaaliset kynnykset $y_1, \dots, y_I$, on kokonaiskustannusten diskontattu odotusarvo

$$A_1 = E_i + u + \beta \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(K_i' = k)\, v_{T_k(i)}.$$

Jos taas vahinko ilmoitetaan, on vastaava odotusarvo

$$A_2 = E_i + \beta \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(K_i' = k)\, v_{T_{k+1}(i)}.$$

Jos $u < y_i$, ei vahinkoa ilmoiteta, joten optimaalisuuden nojalla $A_1 \le A_2$. Vastaavasti, jos $u > y_i$, on oltava $A_1 \ge A_2$. Ilmeisesti siis välttämättä A_1 ja A_2 yhtyvät, kun $u = y_i$. Täten

$$(5.42) \qquad y_i = \beta \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(K_i' = k)\left[v_{T_{k+1}(i)} - v_{T_k(i)} \right], \quad i = 1, \dots, I.$$

Saatu ratkaisu ei ole yksinkertainen, sillä $P(k_i' = k)$ ja ν_i riippuvat kynnyksestä y_i. Ratkaisua voidaan hakea ainakin iteratiivisesti.

1) asetetaan kokeellisesti jotkin kynnykset, esimerkiksi $y_i = 0$, $\forall i$. Ratkaistaan kustannukset $\nu_1, \ldots, \nu_I$ yhtälöstä (5.40)

2) Määrätään $y_1, \ldots, y_I$ yhtälöstä (5.42) käyttäen edellä saatuja kustannuksia. Jatketaan kohdasta 1) käyttäen saatuja kynnyksiä.

Ainakin kokeellisesti on todettu, että algoritmi suppenee ja tuottaa laskevan jonon kustannuksia.

Todettakoon, että edellä tehtiin runsaasti oletuksia ja siten jouduttiin tyytymään yksinkertaistuksiin. Esimerkiksi vahingon oletettiin sattuvan heti vuoden alussa. Tulos epäilemättä riippuu sattumishetken valinnasta sekä siitä montako vahinkoa on jo ilmoitettu sattuneeksi.

Esimerkki 5.6. Olkoon bonussysteemi kuten esimerkissä 5.3. Oletetaan, että valmentetun vahinkoprosessi on yhdistetty Poisson prosessi. Olkoon intensiteetti v ja vahingon suuruus eksponentiaalisesti jakautunut parametrilla a. Tällöin

$$q_i = 1 - e^{-ay_i}, \qquad m_i = \frac{1}{q_i}\left(a^{-1} - a^{-1}e^{-ay_i} - y_i e^{-ay_i}\right).$$

Siis

$$E_i = b_i + v\left(a^{-1} - a^{-1}e^{-ay_i} - y_i e^{-ay_i}\right).$$

Koska $\mathbb{P}(K_i' = k) = e^{-vq_i'} \frac{(vq_i')^k}{k!}$, $q_i' = 1 - q_i$, saadaan

$$(5.44) \quad \begin{cases} \nu_1 = E_1 + \beta\left[e^{-vq_1'}\nu_2 + (1 - e^{-vq_1'})\nu_1\right] \\ \nu_2 = E_2 + \beta\left[e^{-vq_2'}\nu_2 + (1 - e^{-vq_2'})\nu_1\right]. \end{cases}$$

Samoin (5.42) typistyy muotoon

$$\begin{cases} y_1 = \beta e^{-vq_1'}\left[\nu_1 - \nu_2\right] \\ y_2 = \beta e^{-vq_2'}\left[\nu_1 - \nu_2\right]. \end{cases}$$

Nähdään, että välttämättä

$$y_1 e^{vq_1'} = y_2 e^{vq_2'},$$

joten $y_1 = y_2$ ainakin, jos $v \le e$, ja

$$\nu_1 - \nu_2 = E_1 - E_2 = b_1 - b_2.$$

Yhtälöparista (5.44) voidaan ratkaista v_1 ja asettamalla $y_1 = y_2 = y$ saadaan v_1 esitettyä yhden muuttujan funktiona. Tämän minimikohta antaa optimaalisen levyn ksen. Sama y minimoi v_2:in, koska $v_2 = v_1 - b_1 + b_2$.

Lähde: Lemaire, J. (1995) Bonus-Malus systems in Automobile insurance,