5.3. Bonusjärjestelmistä

Bonusjärjestelmät ovat paljon käytettyjä liikenne- ja autovakuutuksessa. Ajatuksena on ottaa vakuutetun ajotaito huomioon vahinkohistorian avulla. Tässä mielessä ollaan lähellä credibility-teorian asetelmaa. Maksuja ohjaavina havaintoina käytetään kuitenkin yleensä vahinkojen lukumääriä. Lisäksi mahdollisten maksujen määrä on rajattu esimerkiksi 10 kappaleeseen.

Bonusjärjestelmä muodostuu seuraavista osista.

1) Bonusluokat $1, \ldots, I$, aloitusluokka i_1,

2) Bonusskaala $(b_1, \ldots, b_I)^T$; b_i on vakuutusmaksu luokassa i,

3) Bonussäännöstö $T_0, T_1, T_2, \ldots$: $T_k(i) = j$, jos vakuutettu siirtyy luokasta i luokkaan j, kun edellisenä vuotena on sattunut k vahinkoa.

Uusi vakuutettu aloittaa luokasta i_1. Tämän jälkeen luokka määräytyy kuvausten T_k mukaisesti sattuneiden vahinkojen lukumäärän perusteella. Seuraavassa ajatuksena on, että hyvät riskit ajautuvat korkeisiin bonusluokkiin ja huonot mataliin. Tulisi siis olla

$$b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_{I-1} \geq b_I .$$

Luonnollista on myös vaatia, että

$$T_k(i) \geq T_{k+1}(i) \quad \text{ja} \quad T_k(i) \leq T_k(i+1).$$

Kuvaus T_k voidaan myös esittää matriisina $T_k = (t_{ij}^{(k)})$,

$$t_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 1, & \text{jos } T_k(i) = j \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

5.3.1 Bonusluokan jakauma ja kehitys ajassa

Tarkastellaan kiinteä vakuutettua, johon liitetään riskillisyyttä kuvaava parametri v. Oletetaan, että vuosien $1, 2, \ldots$ vahinkojen lukumäärät $K_1, K_2, \ldots$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita. Merkitään

$$p_k(v) = \mathbb{P}(K_1 = k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Olkoon G_n vuoden n bonusluokka. Vuoden n vakuutusmaksu on siis b_{G_n}. Erityisesti $G_1 = i_1$ ja $b_{G_1} = b_{i_1}$.

Lause 5.4. Prosessi (G_n) on homogeeninen Markovin ketju. Siirtymätodennäköisyysmatriisi $P(v)$ määräytyy yhtälöistä

$$P_{ij}(v) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(v)\, t_{ij}^{(k)}, \qquad i, j = 1, \ldots, I.$$

Todistus. Ensinnäkin

$$\mathbb{P}(G_{n+1} = j \mid G_n = i) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(G_{n+1} = j, K_n = k \mid G_n = i)$$

$$= \sum_{\substack{k=0 \\ T_k(i) = j}}^{\infty} \mathbb{P}(K_n = k \mid \underbrace{G_n = i}_{\in \mathcal{G}(K_1, \ldots, K_{n-1})})$$

$$\overset{\text{II}}{=} \sum_{\substack{k=0 \\ T_k(i) = j}}^{\infty} \mathbb{P}(K_n = k) = \sum_{\substack{k=0 \\ T_k(i) = j}}^{\infty} p_k(v).$$

Tämä ei riipu vuodesta n. Lisäksi

$$\mathbb{P}(G_{n+1}=j \mid G_n=i_n, \dots, G_1=i_1)$$

$$= \sum_{\substack{k=0 \\ T_k(i_n)=j}}^{\infty} \mathbb{P}(K_n=k \mid \underbrace{G_n=i_n, \dots, G_1=i_1}_{=\delta(K_1, \dots, K_{n-1})})$$

$$= \sum_{\substack{k=0 \\ T_k(i_n)=j}}^{\infty} p_k(v) = \mathbb{P}(G_{n+1}=j \mid G_n=i_n). \quad \square$$

Oletetaan nyt, että järjestelmä on sellainen, että mielivaltaisesta tilasta siirrytään luokkaan I riittävän monen vahingottoman vuoden jälkeen ja että lisäksi luokassa I pysytään vahingottoman vuoden jälkeen. Olkoon A luokan I kanssa kommunikoivien tilojen joukko (usein $A=\{1, \dots, I\}$). Ilmeisesti ketju absorboituu luokkaan A m.v. Tällöin ketjulla on tasapainojakauma, joka keskittyy luokkaan A. Olkoon tämä

$$\pi(v) = (\pi_1(v), \dots, \pi_I(v)).$$

Tällöin tunnetusti

$$\begin{cases} \pi(v)P(v) = \pi(v) \\ \sum_{i=1}^{I} \pi_i(v) = 1 \end{cases}$$

ja

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(G_n=j \mid G_1=i_1) = \pi_j(v).$$

Vakuutusmaksun pitkän aikavälin keskiarvoa kuvaa raja-arvo

$$(5.36) \quad B(v) \doteq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{I} b_j \, \mathbb{P}(C_n = j \mid C_1 = i_1)$$
$$= \sum_{j=1}^{I} b_j \, \pi_j(v).$$

Vahvemminkin, olkoon

$$e_j(n) = \#\{m \le n \mid C_m = j\}/n.$$

Silloin $e_j(n) \overset{m.v.}{\to} \pi_j(v)$, kun $n \to \infty$. Hetkeen n mennessä maksettujen vakuutusmaksujen summa on

$$\sum_{m=1}^{n} b_{C_m} = \sum_{m=1}^{n} \sum_{j=1}^{I} b_j \, 1(C_m = j)$$
$$= \sum_{j=1}^{I} b_j \sum_{m=1}^{n} 1(C_m = j)$$
$$= n \sum_{j=1}^{I} b_j \, e_j(n).$$

Vuotta kohti maksettavaa tulee siis rajalla määrä

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{m=1}^{n} b_{C_m} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{I} b_j e_j(n)$$
$$= \sum_{j=1}^{I} b_j \, \pi_j(v) = B(v).$$

Esimerkki 5.3. Olkoon bonusluokkia 2 ja aloitusluokka $i_1 = 1$. Bonussäännöstö olkoon

$$\begin{cases} T_0(1) = T_0(2) = 2 \\ T_k(1) = T_k(2) = 1, \quad k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Toisin sanoen vahingottoman vuoden jälkeen ollaan luokassa 2, muuten luokassa 1. Oletetaan, että K_1 on Poisson-jakautunut parametrilla v. Tällöin

$$P(v) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1-e^{-v} & e^{-v} \\ 1-e^{-v} & e^{-v} \end{pmatrix} \end{array}$$

ja

$$\pi(v) = \begin{pmatrix} 1-e^{-v} & e^{-v} \end{pmatrix}.$$

Vakuutusmaksu tasapainotilassa on

$$B(v) = b_1(1-e^{-v}) + b_2 e^{-v}$$

$$= b_1 + (b_2 - b_1)e^{-v}.$$

5.3.2. Bonusskaalasta

Tarkastellaan tilannetta, jossa bonusluokat ja -säännöstö on annettu ja pyritään määräämään bonusskaala 'optimaalisesti'. Vakuutusmaksu saa riippua vahinkohistoriasta vain tuoreimman käytettävissä olevan bonusluokan kautta. Analyysin pohjaksi tarvitaan jonkinlainen kuvaus vakuutuskannan heterogeenisuudesta. Seuraavassa tämä tehdään tapahtumaan riskikollektiivin käsitteen avulla (ja sen muunnelmilla). Kriteereitä ja lähestymistapoja on esitetty runsaasti probleemaan.

1) Kiinteä tariffiluokka, jossa i.i.d. vahinkojen summat ja kiinteä määrä havaintovuosia.

Vakuutetuilla oletetaan olevan eroja vain vahinkojen lukumäärissä mutta ei vahinkojen summissa. Olkoon ϑ riskiparametri. Ehdolla $\vartheta = v$, vuotuiset vahinkojen lukumäärät K_n ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita ja

$$\mathbb{P}(K_n = k \mid \vartheta = v) = p_k(v), \quad k = 0, 1, \ldots$$

Kokonaisvahinkomäärät ajatellaan yhdistetyiksi muuttujiksi (ehdolla $\vartheta = v$) ja vahingon summasjakauma riippumattomaksi riskiparametrista.

Olkoon X_n kokonaisvahinkomäärä ja

$$\mu(v) = \mathbb{E}(X_n \mid v) = a_1 \mathbb{E}(K_n \mid v),$$

missä a_1 kuvaa vahingon summan odotusarvoa ja oletetaan tunnetuksi. Tällöin eräs ehdokas bonusskaalaksi saadaan yhtälöistä

$$b_i = \mathbb{E}(\mu(\vartheta) \mid C_n = i) = \frac{\int_{\mathbb{R}} \mu(v)\, \mathbb{P}(C_n = i \mid \vartheta = v)\, dU(v)}{\mathbb{P}(C_n = i)},$$

$i = 1, \dots, I$, missä U on ϑ:n jakauma kuten aiemminkin. Kutsutaan tätä <u>Bayes-skaalaksi</u>. Yksinkertaistettu versio saadaan määräämällä vakiot α_n ja β_n siten, että

$$\mathbb{E}\left([\mu(\vartheta) - (\alpha_n + \beta_n C_n)]^2 \right)$$

minimoituu. Ratkaisu on

$$\begin{cases} \alpha_n = \mathbb{E}(\mu(\vartheta)) - \dfrac{\mathrm{Cov}(\mu(\vartheta), C_n)}{\mathrm{Var}\, C_n}\, \mathbb{E}(C_n), \\[2ex] \beta_n = \dfrac{\mathrm{Cov}(\mu(\vartheta), C_n)}{\mathrm{Var}\, C_n}. \end{cases}$$

Kutsutaan tätä <u>credibility-skaalaksi</u>. Ollakseen mielekäs, on oltava $\beta_n < 0$ ja $\alpha_n + \beta_n I > 0$. Bonusluokan nousu yhdellä yksiköllä laskee mallissa vakuutusmaksua määrän $-\beta_n$.

2) Kiinteä tariffiluokka, jossa i.i.d. vahingot ja vaihteleva määrä havaintovuosia.

Yleensä bonusskaala ei riipu havaintovuosien lukumäärästä, jolloin edellä esitetty ei ole suoraan käyttökelpoinen. Sopiva ratkaisu on suhtautua havaintovuosien lukumäärään satunnaismuuttujana. Olkoon tämä N ja

$$w_n = \mathbb{P}(N = n), \; n = 1, 2, \ldots$$

Luonnollisimmin N kuvaa tariffiluokan todellista 'ikäjakaumaa'. Umpimähkään valitun kohteen vakuutusmaksu perustuu nyt bonusluokkaan C_N. Credibility-skaalassa minimoidaan keskineliöpoikkeamaa

$$\mathbb{E}\left([\mu(\vartheta) - (\alpha + \beta\, C_N)]^2 \right).$$

Ratkaisu on

$$\begin{cases} \alpha = \mathbb{E}(\mu(\vartheta)) - \dfrac{\mathrm{Cov}(\mu(\vartheta), C_N)}{\mathrm{Var}\, C_N}\, \mathbb{E}(C_N), \\[2ex] \beta = \dfrac{\mathrm{Cov}(\mu(\vartheta), C_N)}{\mathrm{Var}\, C_N}. \end{cases}$$

Oletetaan, että N on riippumaton muista satunnaismuuttujista. Tällöin

$$\mathrm{Cov}(\mu(v), C_N) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \, \mathrm{Cov}(\mu(v), C_n)$$

ja

$$\mathrm{Var}\, C_N = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \, \mathbb{E}(C_n^2) - \Big[\sum_{n=1}^{\infty} w_n \, \mathbb{E}(C_n) \Big]^2.$$

Bonusluokkaa j vastaava vakuutusmaksu on

$$b_j = \alpha + \beta j.$$

3) Yhdistelmä kohdan 1) mukaisia tariffiluokkia.

Bonusluokka riippuu edelleen vain vahinkojen lukumääristä, mutta sallitaan eri jakaumia vahingon summille eri tariffiluokissa. Sopivaa voisi olla edetä kuten kohdassa 1) (ja 2)) ja määrätä ensin optimaalinen bonusskaala vastaten yksikön summisia vahinkoja. Tariffiluokissa tehtäisiin samansuuruisia suhteellisia muutoksia vahinko-kehityksen mukaisesti, mutta todelliset skaalat olisivat tyyppiä

$$b_j(T) = d_T(\alpha + \beta j),$$

missä d_T riippuu tariffiluokasta T kuvaten vahingon summien odotusarvoa.

4) Myös vahinkojen summat voisivat riippua riskiparametristä, kohteen tariffiluokka voidaan tariffoitaessa satunnaistaa jne.

Esimerkki 5.4. Olkoon bonussäännöstö kuten esimerkissä 5.3. Oletetaan, että ehdolla $\vartheta = v$, vahinkojen lukumäärä on Poisson-jakautunut parametrilla v ja että ϑ on gamma-(m, a)-jakautunut, missä $m \in \mathbb{N}$ ja $a > 0$. Määrätään credibility-kertoimet α_n ja β_n kohdan 1) tilanteessa.

Poisson-parametrin ollessa v pätee

$$\begin{cases} \mathbb{P}(C_n = 1 \mid \vartheta = v) = \mathbb{P}(K_{n-1} \geq 1 \mid \vartheta = v) = 1 - e^{-v}, \\ \mathbb{P}(C_n = 2 \mid \vartheta = v) = e^{-v}, \quad n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Lisäksi $\mu(v) = a_1 v$, missä a_1 on vahingon summan odotusarvo. Siis

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mu(\vartheta) C_n) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mu(\vartheta) C_n \mid \vartheta)) \\ &= \mathbb{E}(\mu(\vartheta) \mathbb{E}(C_n \mid \vartheta)) \\ &= \mathbb{E}(\mu(\vartheta)(1 - e^{-\vartheta} + 2e^{-\vartheta})) \\ &= a_1 \left(\frac{m}{a} + \frac{m a^m}{(a+1)^{m+1}} \right). \end{aligned}$$

Samoin

$$\mathbb{E}(\mu(\vartheta)) = a_1 \mathbb{E}(\vartheta) = \frac{a_1 m}{a},$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(C_n) &= \mathbb{E}(1 + e^{-\vartheta}) \\ &= 1 + \int_0^\infty a^m v^{m-1} e^{-av} / (m-1)! \, dv \\ &= 1 + \frac{a^m}{(a+1)^m} \end{aligned}$$

ja

$$\mathrm{Cov}(\mu(\vartheta), C_n) = -\frac{a_1 m a^{m-1}}{(a+1)^{m+1}}.$$

Selvästi

$$\mathrm{Var}\, C_n = \mathbb{E}(1 - e^{-\vartheta} + 4e^{-\vartheta}) - \left[1 + \frac{a^m}{(a+1)^m}\right]^2$$

$$= \frac{a^m}{(a+1)^m}\left[1 - \frac{a^m}{(a+1)^m}\right].$$

Credibility-kertoimet ovat

$$\begin{cases} \alpha_n = a_1 \left[\dfrac{m}{a} + \dfrac{m\left(1 + \frac{a^m}{(a+1)^m}\right)}{a(a+1)\left(1 - \frac{a^m}{(a+1)^m}\right)} \right], \\[2ex] \beta_n = -\dfrac{a_1 m}{a(a+1)\left(1 - \frac{a^m}{(a+1)^m}\right)}. \end{cases}$$

Koska kertoimet eivät riipu iästä n, on myös

$$\alpha = \alpha_n, \quad \beta = \beta_n,$$

kts. kohta 2).