Muiden vakuutettujen mukaanottaminen ei siis vaikuta hinnoittelukaavaan. Tämä johtuu tehdyistä riippumattomuusoletuksista. Asia muuttuu, jos kollektiivin odotusarvo μ ei ole tunnettu. Tällöin luontevalta tuntuisi korvata μ otoskeskiarvolla

$$\bar{x} = \frac{1}{Nn} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} X_{ij}$$

Lauseesta 5.1.1.

Samaan lopputulokseen päästään tarkastelemalla homogeenista credibility-estimaattoria. Tällöin määrätään kertoimet b_{ij}, $i=1,\dots,N$, $j=1,\dots,n$, siten, että

$$(5.8.2) \quad \mathbb{E}\Big(\Big[\mu(\omega_k) - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} X_{ij}\Big]^2\Big)$$

minimoituu ja estimaattori on harhaton siinä mielessä, että

$$(5.8.3) \quad \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} X_{ij}\Big) = \mathbb{E}(\mu(\omega_k)).$$

Lause 5.1.2. Keskineliöpoikkeama (5.8.2) sidosehdolla (5.8.3) minimoituu, kun

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} X_{ij} = (1-z)\bar{x} + \frac{z}{n}(X_{k1} + \dots + X_{kn}),$$

missä z on kuten lauseessa 5.1.

Todistus. Sidosehto (5.8.3) toteutuu, jos ja vain jos

(5.8.4) $$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} = 1.$$

Lauseen 5.1 todistuksen tapaan nähdään, että (5.8.2) saavuttaa miniminsä eräässä ehdon (5.8.4) täyttävässä pisteessä. Olkoon

$$L = \mathbb{E}\left(\left[\mu(v_k) - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} Z_{ij} \right]^2 \right) + \lambda \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} - 1 \right),$$

missä $\lambda \in \mathbb{R}$. Lagrangen kertoimien menetelmän nojalla minimipisteessä

$$\frac{\partial L}{\partial b_{ij}} = 0, \quad \forall i, j,$$

ja tietysti (5.8.4) toteutuu. Olkoon $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$ kiinteä.

Tällöin lauseen 5.1 mukainnöin

(5.8.5) $$\frac{\partial L}{\partial b_{kj_0}} = -2s + 2m b_{kj_0} + 2s \sum_{j=1}^{n} b_{kj} + \lambda.$$

Nähdään, että optimaalinen b_{kj} on sama kaikille $j \in \{1, \ldots, n\}$. Jos $h \neq k$, niin

(5.8.6) $$\frac{\partial L}{\partial b_{hj_0}} = 2m b_{hj_0} + 2s \sum_{j=1}^{n} b_{hj} + \lambda.$$

Siis nytkin optimaalinen b_{hj} on sama kaikille $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Olkoon c_h parametrien $b_{h1}, \ldots, b_{hn}$ yhteinen arvo optimissa, $h = 1, \ldots, n$. Tällöin

$$
\begin{cases}
(m+ns)c_k - s + \frac{\lambda}{2} = 0 \\
(m+ns)c_h + \frac{\lambda}{2} = 0, \quad \forall h \neq k \\
c_1 + \dots + c_N = \frac{1}{n}.
\end{cases}
$$

Nähdään, että $\lambda = -\frac{2m}{nN}$. Tämän jälkeen c-parametrit määräytyvät ja saadaan lauseen tulos. $\square$

5.1.3. Hierarkisesta credibilitystä

Tarkastellaan pidemmälle vietyä riskikollektiivin mallia, jossa epävarmuutta liitetään myös riskiparametrin jakaumaan. Olkoon vakuutuskannassa N vakuutettua. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että jokaisesta vakuutetusta i on käytettävissä yksi vahinkohavainto X_i.

Tarkastellaan seuraavaa asetelmaa.

Taso 2 : laatumuuttuja φ, kertymäfunktio G

Taso 1 : riskiparametrit $\vartheta_1, \dots, \vartheta_N$, kertymäfunktioperhe $\{U(\cdot|y) \mid y \in \mathbb{R}\}$

Taso 0 : vahinkomäärät $X_1, \dots, X_N$, kertymäfunktioperhe $\{F(\cdot|v) \mid v \in \mathbb{R}\}$.

Tulkinnallisesti φ:n arvo kuvaa koko kannan laatua. Siitä saadaan informaatiota havainnoista $X_1, \dots, X_N$. Oletetaan, että ehdolla $\varphi = y$, parit

$$(X_1, \vartheta_1), \dots, (X_N, \vartheta_N)$$

ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita. Kokonaisvahinkomäärän jakauma määräytyy pelkästään riskiparametrista siten, että

$$(5.9) \quad \mathbb{P}(X_i \le x, \vartheta_i \le v, \varphi \le y)$$

$$= \int_{w \le y} \left[\int_{u \le v} F(x|u)\, dU(u|w) \right] dG(w).$$

Erityisesti

$$\mathbb{P}(\vartheta_j \le v, \varphi \le y) = \int_{w \le y} U(v\,|\,w)\, d\,G(w),$$

joten $\{U(\cdot\,|y)\,|\,y \in \mathbb{R}\}$ on ϑ_j:in säännöllinen ehdollinen kertymäfunktio φ:n suhteen.

Olkoon

$$\mu(\vartheta_1) = \mathbb{E}(X_1\,|\,\vartheta_1) = \int_{\mathbb{R}} x\, dF(x\,|\,\vartheta_1).$$

Tavoitteena on määrätä parametrit $a, b_1, \ldots, b_N$ siten, että keskineliöpoikkeama

$$(5.10) \quad \mathbb{E}\left([\mu(\vartheta_1) - (a + b_1 X_1 + \cdots + b_N X_N)]^2 \right)$$

minimoituu. Symmetrian nojalla voitaisiin tietysti tarkastella mitä tahansa kohdetta j kohteen 1 sijaan.

Jos φ on deterministinen, ovat parit $(X_1, \vartheta_1), \ldots, (X_N, \vartheta_N)$ riippumattomia. Tällöin (5.10) minimoituu, kun valitaan $b_2 = \cdots = b_N = 0$. Päädytään siis Lauseen 5.1 credibility-maksuun.

Merkitään

$$\begin{cases} L(\varphi) = \mathbb{E}(\mu(\vartheta_1)\,|\,\varphi) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_1\,|\,\vartheta_1)\,|\,\varphi) \\ \quad\;\; = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_1\,|\,\vartheta_1,\varphi)\,|\,\varphi) = \mathbb{E}(X_1\,|\,\varphi), \\ M = \mathbb{E}(\mathrm{Var}(\mu(\vartheta_1)\,|\,\varphi)), \\ S = \mathrm{Var}(\mathbb{E}(\mu(\vartheta_1)\,|\,\varphi)) = \mathrm{Var}\,L(\varphi). \end{cases}$$

Olkoot lisäksi μ, m ja s kuten lauseessa 5.1. Sivutuotteena seuraavassa lauseessa saadaan paras lineaarinen ennuste ehdolliselle odotusarvolle $L(\varphi)$ ts. löydetään parametrit $c, d_1, \dots, d_N$ siten, että

$$(5.12) \qquad \mathbb{E}\left([L(\varphi) - (c + d_1 X_1 + \dots + d_N X_N)]^2\right)$$

minimoituu.

Lause 5.2. Olkoon $M \in (0, \infty)$. Silloin (5.12) minimoituu, kun

$$c = c^* \doteq \mu \cdot \frac{M}{M + NSZ},$$

$$d_1 = \dots = d_N = d^* \doteq \frac{SZ}{M + NSZ},$$

missä

$$Z = \frac{s - S}{m + s - S} = \frac{M}{m + M}.$$

Olkoon

$$L^* = c^* + d^* \sum_{j=1}^{N} X_j.$$

Silloin L^* on minimointitehtävän (5.12) ratkaisu ja (5.10) minimoituu, kun

$$a + \sum_{j=1}^{N} b_j X_j = Z X_1 + (1 - Z) L^*.$$

Toisin sanoen minimissä

$$\begin{cases} a = (1 - Z) c^* \\ b_1 = Z + (1 - Z) d^* \\ b_j = (1 - Z) d^*, \; j = 2, \dots, N. \end{cases}$$

Todistuksen taustaksi tarkastellaan minimointitehtävää (5.10) Hilbertin avaruuden projektiona.

Tunnetusti todennäköisyyskentän neliöintegroituvat satunnaismuuttujat muodostavat Hilbertin avaruuden, ns. L^2-avaruuden,

$$\xi \in L^2 \Leftrightarrow \mathbb{E}(\xi^2) < \infty$$

($\xi, \eta \in L^2$ samaistetaan, jos $\xi = \eta$ m.v.). Erityisesti L^2 on lineaariavaruus yli $\mathbb{R}$:n luonnollisten laskutoimitusten suhteen. Sisätulo määritellään ehdosta

$$\xi \cdot \eta = \mathbb{E}(\xi\eta), \quad \xi, \eta \in L^2.$$

Tämä määrää normin L^2:ssa,

$$\|\xi\| = \sqrt{\xi \cdot \xi} = \mathbb{E}(\xi^2)^{\frac{1}{2}}$$

ja edelleen metriikan,

$$d(\xi, \eta) = \|\xi - \eta\| = \mathbb{E}((\xi - \eta)^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Tällöin L^2 on metrisenä avaruutena täydellinen. Olkoon

$$A = \langle 1, X_1, \dots, X_N \rangle \subseteq L^2$$

muuttujien $1, X_1, \dots, X_N$ generoima L^2:n aliavaruus (oletetaan, että $X_1, \dots, X_N \in L^2$). Tällöin A on suljettu ja generaattoriensa lineaariyhdistelmien muodostama joukko. Määritellään projektio $p(\cdot|A) : L^2 \to A$ ehdosta

$$\xi - p(\xi|A) \perp A, \quad \forall \xi \in L^2.$$

Toisin sanoen

$$(\xi - p(\xi|A))\cdot\eta = 0, \ \forall \eta \in A.$$

Voidaan näyttää, että $p(\cdot|A)$ on hyvin määritelty ja että $p(\xi|A)$ minimoi etäisyyden

$$d(\xi,\eta) = \mathbb{E}((\xi-\eta)^2)^{\frac{1}{2}}$$

yli muuttujien $\eta \in A$. Siispä $p(\mu(\nu_1)|A)$ minimoi keskineliöpoikkeaman (5.10). Edellä esitetyt projektion ominaisuudet pätevät kaikille A:n tyyppisille aliavaruuksille.

Olkoot A_1 ja A_2 Hilbertin avaruuden suljettuja aliavaruuksia ja $A_1 \subseteq A_2$. Silloin

(i) $\quad p(\alpha\xi + \beta\eta|A_1) = \alpha p(\xi|A_1) + \beta p(\eta|A_1),$

$\quad \forall \xi,\eta \in L^2, \ \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ (lineaarisuus)

(ii) $\quad p(\xi|A_1) = p(p(\xi|A_2)|A_1), \ \forall \xi \in L^2$
(iteratiivisuus).

Lauseen 5.2 todistus. Todistus etenee seuraavasti:

a) määrätään projektio $p(\mu(v_1) | \langle \Xi_1, L(\varphi) \rangle)$,

b) osoitetaan, että

$p(\mu(v_1) | \langle \mathcal{D}, L(\varphi), 1 \rangle) = p(\mu(v_1) | \langle \Xi_1, L(\varphi) \rangle)$,

missä $\mathcal{D} = \{ \Xi_1, \ldots, \Xi_N \}$,

c) määrätään $p(\mu(v_1) | \langle \mathcal{D}, 1 \rangle) = p(\mu(v_1) | A)$,

joka antaa tehtävän ratkaisun.

a) On siis määrättävä γ ja β siten, että

$$\mathbb{E}\left(\left[\mu(\vartheta_1) - \gamma L(\varphi) - \beta \bar{X}_1\right]^2 \right)$$

minimoituu. Derivointi parametrien suhteen antaa

$$\begin{cases} \gamma\, \mathbb{E}\left(L(\varphi)^2\right) + \beta\, \mathbb{E}\left(\bar{X}_1 L(\varphi)\right) = \mathbb{E}\left(\mu(\vartheta_1) L(\varphi)\right), \\ \gamma\, \mathbb{E}\left(\bar{X}_1 L(\varphi)\right) + \beta\, \mathbb{E}\left(\bar{X}_1^2\right) = \mathbb{E}\left(\bar{X}_1 \mu(\vartheta_1)\right). \end{cases}$$

Malliolettuksen (5.9) nojalla

$$\mathbb{E}\left(\bar{X}_1 \mid \vartheta_1, \varphi\right) = \mu(\vartheta_1).$$

Siispä

$$(5.14) \quad \mathbb{E}\left(\bar{X}_1 L(\varphi)\right) = \mathbb{E}\left(L(\varphi)\, \mathbb{E}\left(\bar{X}_1 \mid \vartheta_1, \varphi\right)\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(L(\varphi)\mu(\vartheta_1)\right) = \mathbb{E}\left(L(\varphi)\, \mathbb{E}\left(\mu(\vartheta_1) \mid \varphi\right)\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(L(\varphi)^2\right).$$

Nähdään myös, että $\mathbb{E}\left(\mu(\vartheta_1) L(\varphi)\right) = \mathbb{E}\left(L(\varphi)^2\right)$. Lisäksi

$$(5.15) \quad \mathbb{E}\left(\bar{X}_1^2\right) = m + s + \mu^2$$

ja

$$(5.16) \quad \mathbb{E}\left(\bar{X}_1 \mu(\vartheta_1)\right) = s + \mu^2.$$

Optimaaliset parametrien arvot ovat

$$\beta = \frac{s + \mu^2 - \mathbb{E}\left(L(\varphi)^2\right)}{m + s + \mu^2 - \mathbb{E}\left(L(\varphi)^2\right)}$$

ja

$$\gamma = \frac{m}{m + s + \mu^2 - \mathbb{E}\left(L(\varphi)^2\right)}.$$

Todetaan vielä, että $\mathbb{E}(L(\varphi)) = \mu$, joten

$$\mathbb{E}(L(\varphi)^2) = s + \mu^2$$

ja

(5.18) $$p(\mu(\vartheta_1) \mid \langle X_1, L(\varphi)\rangle) = (1-Z)L(\varphi) + Z X_1 .$$

b) Olkoon p^* edellä saatu projektio,

$$p^* = (1-Z)L(\varphi) + Z X_1 .$$

Riittää näyttää, että

(5.19) $$(\mu(\vartheta_1) - p^*) \cdot 1 = 0,$$

(5.20) $$(\mu(\vartheta_1) - p^*) \cdot X_j = 0, \quad j = 2, \dots, N.$$

Nyt

$$(\mu(\vartheta_1) - p^*) \cdot 1 = \mathbb{E}(\mu(\vartheta_1) - p^*)$$

$$= \mu - \frac{m}{m+s-S}\mu - \frac{s-S}{m+s-S}\mu = 0.$$

Suoraviivaisesti nähdään, että

(5.21) $$\mathbb{E}(X_1 X_j) = \mathbb{E}(L(\varphi)^2) = S + \mu^2, \quad j = 2, \dots, N,$$

(5.22) $$\mathbb{E}(X_j \mu(\vartheta_1)) = S + \mu^2, \quad j = 2, \dots, N.$$

Yhdistämällä nämä tulokseen (5.14) saadaan

$$(\mu(v_1)-p^*)\cdot \bar{X}_i = \mathbb{E}((\mu(v_1)-p^*)\bar{X}_i)$$
$$= (\mathcal{S}+\mu^2)\left[1-\frac{m}{m+s-\mathcal{S}}-\frac{s-\mathcal{S}}{m+s-\mathcal{S}}\right]=0.$$

c) Projektion ominaisuuksien (i) ja (ii) nojalla

(5.24) $$p(\mu(v_1)\,|\,\langle \mathcal{D},1\rangle)$$
$$= p(p(\mu(v_1)\,|\,\langle \mathcal{D}, L(\varphi),1\rangle)\,|\,\langle \mathcal{D},1\rangle)$$
$$\overset{a,b}{=} p((1-\mathcal{Z})L(\varphi)+\mathcal{Z}\,\bar{X}_1\,|\,\langle \mathcal{D},1\rangle)$$
$$= (1-\mathcal{Z})p(L(\varphi)\,|\,\langle \mathcal{D},1\rangle)+\mathcal{Z}\,\bar{X}_1.$$

Tarkastellaan projektiota $p(L(\varphi)\,|\,\langle \mathcal{D},1\rangle)$. Suoritetaan ensin projisointi avaruuteen

$$\langle \mathcal{D}, \mu(v_1),\dots,\mu(v_N),1\rangle.$$

Tämä on sama kuin projisointi avaruuteen

$$\langle \mu(v_1),\dots,\mu(v_N),1\rangle.$$

On siis määrättävä parametrit $\alpha,\beta_1,\dots,\beta_N$ siten, että

$$\mathbb{E}([L(\varphi)-(\alpha+\beta_1\mu(v_1)+\dots+\beta_N\mu(v_N))]^2)$$

minimoituu. Ratkaisu on

$$\alpha = \alpha^* \doteq \frac{\mu M}{NS + M},$$

$$\beta_1 = \dots = \beta_N \doteq \beta^* = \frac{S}{NS + M}.$$

Projisoidaan edelleen avaruuteen $\langle \mathcal{D}, 1 \rangle$ ja hyödynnetään projektiota (5.24). Saadaan

$$p(L(\varphi) \mid \langle \mathcal{D}, 1 \rangle) = \alpha^* + \beta^* \sum_{j=1}^{N} p(\mu(\vartheta_j) \mid \langle \mathcal{D}, 1 \rangle)$$

$$= \frac{\mu M}{NS + M} + \frac{NS}{NS + M} \left[(1 - \mathcal{Z}) p(L(\varphi) \mid \langle \mathcal{D}, 1 \rangle) + \frac{\mathcal{Z}}{N} \sum_{j=1}^{N} \bar{X}_j \right].$$

Ratkaistaan $p(L(\varphi) \mid \langle \mathcal{D}, 1 \rangle)$ tästä yhtälöstä. Nähdään, että L^* on väitettyä muotoa. Yhtälöstä (5.24) seuraa myös lauseen toinen väite. $\square$

Lisälähteitä kohtaan 5.1.

Bühlmann, H. (1967) Experience rating and credibility, AB.

Bühlmann, H. and Jewell, J. (1987) Hierarchical credibility revisited, Mitt. Verein. Schweiz. Vers. Math, Heft 2.

Jewell, J. (1974) Credible means and exact Bayesian for exponential families, AB.

Lonka, H. (1980) Katsaus credibility-teoriaan. Tilastoaineiston analysointi. Suomen Aktuaariyhdistys ja Insinööritieto Oy, Helsinki.

5.2. Eksponentiaalisesta tasoituksesta

Olkoon kohteen vuotuiset kokonaisvahinkomäärät $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots$ ja vakuutusmaksut $P_1, P_2, \ldots$ <u>Eksponentiaalisessa tasoituksessa</u> vakuutusmaksut määräytyvät ehdoista

$$P_1 = P \quad \text{(deterministinen)},$$

$$P_n = \alpha \bar{X}_{n-1} + (1-\alpha) P_{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

missä $\alpha \in [0,1]$ on <u>tasoitusparametri</u>. Jatkossa α on yleensä vakio, mutta tarvetta on myös päivityksille.

Eksponentiaalinen tasoitus voidaan nähdä tapana muuntaa voimakkaasti heilahteleva vahinkoprosessi vähemmän heilahtelevaksi vakuutusmaksuksi. Kuten credibility-maksuissa, on tässäkin usein tarvetta rajoittaa vakuutusmaksujen heilahtelua tasoituksesta huolimatta. Toisaalta parametrin α suuruutta säätelemällä voidaan vaikuttaa maksujen heilahteluun. Voidaan myös ajatella, että lähellä ykköstä oleva α ottaa nopeasti huomioon kohteen vahinkohistorian ja lähellä nollaa oleva hitaasti. Seuraavassa osoitetaan, että pitkällä tähtäimellä maksutaso on oikea riippumatta α:n koosta.

Lemma 5.2.1. Eksponentiaalisessa tasoituksessa

$$P_n = \alpha \sum_{i=0}^{n-2} (1-\alpha)^i \, X_{n-i-1} + (1-\alpha)^{n-1} P_1 .$$

Todistus. Määritelmän mukaisesti

$$\begin{aligned} P_n &= \alpha X_{n-1} + (1-\alpha) P_{n-1} \\ &= \alpha X_{n-1} + (1-\alpha)\left[\alpha X_{n-2} + (1-\alpha) P_{n-2}\right] \\ &= \alpha X_{n-1} + \alpha(1-\alpha) X_{n-2} + (1-\alpha)^2 P_{n-2} \\ &= \cdots \\ &= \alpha X_{n-1} + \alpha(1-\alpha) X_{n-2} + \alpha(1-\alpha)^2 X_{n-3} \\ &\quad + \cdots + \alpha(1-\alpha)^{n-2} X_1 + (1-\alpha)^{n-1} P_1 . \quad \square \end{aligned}$$

Lause 5.3. Oletetaan, että $\mathbb{E}(X_n) = \mu$, $n = 1, 2, \ldots$
Silloin

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(P_n) = \mu .$$

Jos lisäksi $\operatorname{Var} X_n = \sigma^2$, $n = 1, 2, \ldots$ ja $X_1, X_2, \ldots$ ovat riippumattomia, niin

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Var}(P_n) = \frac{\alpha}{2-\alpha} \sigma^2 .$$

Nähdään, että maksun odotusarvo yhtyy riskimaksuun asymptoottisesti riippumatta alkumaksusta P. Varianssi on pienempi kuin vahinkomäärien yhteinen varianssi (yhtä suuri, jos $\alpha = 1$).

Lauseen 5.3 todistus. Lemman 5.2.1 nojalla

$$\mathbb{E}(P_n) = \alpha\mu \sum_{i=0}^{n-2} (1-\alpha)^i + (1-\alpha)^{n-1} p$$

$$= \alpha\mu \frac{1-(1-\alpha)^{n-1}}{\alpha} + (1-\alpha)^{n-1} p$$

$$\to \mu, \quad \text{kun} \quad n \to \infty.$$

Vastaavasti

$$\operatorname{Var}(P_n) = \alpha^2 \sum_{i=0}^{n-2} (1-\alpha)^{2i} \sigma^2$$

$$= \alpha^2 \frac{1-(1-\alpha)^{2(n-1)}}{1-(1-\alpha)^2} \sigma^2$$

$$\to \frac{\alpha}{2-\alpha} \sigma^2, \quad \text{kun} \quad n \to \infty. \qquad \square$$

5.2.1 Kontrollinäkökulma

Ajatellaan, että yhtiö käyttää samaa eksponentiaalista tasoitusta hinnoittelussaan kaikille vakuutuksille. Myös α on siis kaikille yhteinen. Tämä on tietysti yksinkertaistus, mutta tuo konkreettisimmin esiin järjestelmään liittyvän kontrollinäkökulman.

Olkoon yhtiön alkupääoma U_0 ja pääoma vuoden n lopussa U_n. Rajoitetaan tarkastelu seuraavassa pelkästään vakuutusmaksuihin ja vahinkomääriin. Tällöin

$$
\begin{aligned}
U_n &= U_{n-1} + P_n - X_n \\
&= U_{n-2} + P_{n-1} - X_{n-1} + P_n - X_n \\
&= \dots = U_0 + \sum_{i=1}^{n} (P_i - X_i).
\end{aligned}
$$

Eksponentiaalisessa tasoituksessa taas

$$
\begin{aligned}
P_n &= \alpha X_{n-1} + (1-\alpha) P_{n-1} \\
&= \alpha (X_{n-1} - P_{n-1}) + P_{n-1} \\
&= \alpha (X_{n-1} - P_{n-1}) + \alpha (X_{n-2} - P_{n-2}) + P_{n-2} \\
&= \dots = \alpha \sum_{i=1}^{n-1} (X_i - P_i) + P.
\end{aligned}
$$

Nähdään, että

$$
P_n = \alpha (U_0 - U_{n-1}) + P. \tag{5.28}
$$

Jos siis yhtiön kumulatiivinen tulos $U_{n-1} - U_0$ on positiivinen, palautetaan tästä osa $\alpha(U_{n-1} - U_0)$ vuoden n vakuutusmaksuissa. Jos taas tulos on negatiivinen, nostetaan maksua määrällä $\alpha(U_0 - U_{n-1})$. Yhtiö siis ottaa hinnoittelussa huomioon liikkeensä aiemman kehityksen. Tässä mielessä järjestelmällä on kontrolloiva rooli esimerkiksi yhtiön vakavaraisuuteen. Kontrolli tulee vuoden viiveellä ts. perustuu edellisen vuoden tilanteeseen. Käytännössä kontrolli on yleensä vain osittainen. Esimerkiksi kilpailutilanne saattaa estää täysimääräisen maksunkorotuksen.

Tarkastellaan vielä varallisuusprosessin $\{U_n\}$ varianssejа. Oletetaan, että $X_1, X_2, \dots$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita. Olkoon $\sigma^2 = Var(X_1)$ äärellinen. Klassisessa mallissa $(\alpha = 0)$

$$Var(U_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(P - X_i)$$

$$= n\sigma^2 \to \infty, \quad \text{kun} \quad n \to \infty.$$

Osoitetaan, että tapauksessa $\alpha \in (0, 1]$,

$$Var(U_n) \leq \frac{\sigma^2}{2\alpha - \alpha^2}.$$

Kontrolli siis pitää varallisuusprosessin 'kurissa' varianssimielessä. Olkoon kumulatiivinen ylijäämä Y_n,

$$Y_n = U_n - U_0.$$

Tällöin

$$Y_n = U_{n-1} + P_n - X_n - U_0$$

$$\overset{(5.28)}{=} U_{n-1} + \alpha(U_0 - U_{n-1}) + P - X_n - U_0$$

$$= (1-\alpha)Y_{n-1} + P - X_n$$

$$= \dots = \sum_{i=0}^{n-1} (1-\alpha)^i (P - X_{n-i}).$$

Nähdään, että

$$\mathrm{Var}(Y_n) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{n-1} (1-\alpha)^{2i}$$

$$\leq \frac{\sigma^2}{1-(1-\alpha)^2} = \frac{\sigma^2}{2\alpha - \alpha^2}.$$

Edellinen laskelma osoittaa myös, että $\{Y_n\}$ on autoregressiivinen prosessi,

$$\begin{cases} Y_0 = 0, \\ Y_n = (1-\alpha)Y_{n-1} + P - X_n, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

5.2.2. Tasoitusparametrin mitoittamisesta

Luonnollista on pyrkiä mitoittamaan tasoitusparametri siten, että vakuutettujen kokema hintojen vuotuinen heilahtelu olisi jollain lailla kaikille samanlaista. Seuraavassa esitetään eräs esimerkki tällaisesta.

Oletetaan, että vakuutettujen kokonaisvahinkomäärät noudattavat yhdistettyä Poisson-jakaumaa. Oletetaan edelleen, että vahingon suuruusjakauma on kaikilla vakuutetuilla sama. Olkoon

$$a_1 = \mathbb{E}(Z), \qquad a_2 = \mathbb{E}(Z^2),$$

missä Z kuvaa vahingon suuruutta. Vakuutetut eroavat toisistaan Poisson-parametrin osalta.

Olkoon Poisson-parametri λ. Vakuutusmaksun heilahtelu vuodesta toiseen kuvaa suure

$$\mathrm{Var}(P_{n+1} - P_n \mid P_n)$$

$$= \mathrm{Var}(\alpha(X_n - P_n) \mid P_n)$$

$$= \alpha^2 \sigma^2 = \alpha^2 \lambda a_2.$$

Vaaditaan, että tätä vastaava hajonta suhteessa riskimaksuun on vakuutetusta riippumaton vakio C eli että

$$\frac{\alpha\sqrt{\lambda a_2}}{\mu} = \frac{\alpha\sqrt{a_2}}{a_1\sqrt{\lambda}} = C,$$

missä μ on vakuutetun riskimaksu. Siis

$$\alpha = \frac{a_1 C}{\sqrt{a_2}}\sqrt{\lambda} = C'\sqrt{\mu},$$

missä C' on vakio. Lisäksi vaaditaan, että $\alpha \leq 1$.

Koska μ ei ole tarkasti tiedossa, syntyy houkutus määrätä tasoitusparametri ehdosta

$$\alpha = \alpha_n = C'\sqrt{P_n}\,.$$

Tässä on se hyvä puoli, että λ saattaa muuttua ajan mittaan, jolloin on mahdollista muuttaa myös tasoitusparametria. Menettely johtaa yllättäen virheelliseen maksutasoon pitkällä tähtäimellä. Perustellaan tätä seuraavassa heuristisesti.

Oletetaan yleisemmin, että vuoden n tasoitusparametri α_n on muotoa

$$\alpha_n = h(P_n),$$

missä $h: \mathbb{R} \to [0,1]$ on kasvava funktio. Vuoden n vakuutusmaksu on siis

$$P_n = \alpha_{n-1} X_{n-1} + (1-\alpha_{n-1}) P_{n-1}$$

$$= h(P_{n-1}) X_{n-1} + (1-h(P_{n-1})) P_{n-1}.$$

Oletetaan, että $X_1, X_2, \dots$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita. Maksuprosessi $\{P_n\}$ on Markovin ketju (yleisellä tila-avaruudella): vuoden n maksu riippuu vain edeltävästä maksusta ja tästä riippumattomasta vahinkomäärästä X_{n-1}. Markovin ketjujen teoriaan nojautuen voidaan olettaa, että $\{P_n\}$ suppenee kohti tasapainojakaumaa. Olkoon P_∞ illä tämä jakauma. Silloin

$$P_\infty =_L h(P_\infty) X + (1-h(P_\infty)) P_\infty,$$

missä X on jakautunut kuten X_1 ja $X \perp\!\!\!\perp P_\infty$.

Ottamalla odotusarvot puolittain saadaan

$$\mathbb{E}(P_\infty) = \mathbb{E}(h(P_\infty))\mu + \mathbb{E}(P_\infty) - \mathbb{E}(h(P_\infty)P_\infty),$$

missä $\mu = \mathbb{E}(X)$. Nähdään, että

(5.34) $$(\mu - \mathbb{E}(P_\infty))\,\mathbb{E}(h(P_\infty)) = \mathrm{Cov}(h(P_\infty), P_\infty).$$

Osoitetaan, että $\operatorname{Cov}(h(P_\infty), P_\infty) \geq 0$. Ensinnäkin

$$\mathbb{E}\left(h(P_\infty)(P_\infty - \mathbb{E}(P_\infty))\, 1(P_\infty \geq \mathbb{E}(P_\infty))\right)$$

$$\geq \mathbb{E}\left(h(\mathbb{E}(P_\infty))(P_\infty - \mathbb{E}(P_\infty))\, 1(P_\infty \geq \mathbb{E}(P_\infty))\right)$$

$$= h(\mathbb{E}(P_\infty))\, \mathbb{E}\left((P_\infty - \mathbb{E}(P_\infty))\, 1(P_\infty \geq \mathbb{E}(P_\infty))\right).$$

Samoin nähdään, että

$$\mathbb{E}\left(h(P_\infty)(P_\infty - \mathbb{E}(P_\infty))\, 1(P_\infty \leq \mathbb{E}(P_\infty))\right)$$

$$\geq h(\mathbb{E}(P_\infty))\, \mathbb{E}\left((P_\infty - \mathbb{E}(P_\infty))\, 1(P_\infty \leq \mathbb{E}(P_\infty))\right).$$

Siis

$$\mathbb{E}\left(h(P_\infty)(P_\infty - \mathbb{E}(P_\infty))\right)$$

$$\geq h(\mathbb{E}(P_\infty))\, \mathbb{E}(P_\infty - \mathbb{E}(P_\infty)) = 0.$$

Lopulta

$$\operatorname{Cov}(h(P_\infty), P_\infty) = \mathbb{E}\left((h(P_\infty) - \mathbb{E}(h(P_\infty)))(P_\infty - \mathbb{E}(P_\infty))\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(h(P_\infty)(P_\infty - \mathbb{E}(P_\infty))\right) - \mathbb{E}(h(P_\infty))\, \mathbb{E}(P_\infty - \mathbb{E}(P_\infty))$$

$$\geq 0.$$

Yleensä $\operatorname{Cov}(h(P_\infty), P_\infty) > 0$, jolloin $\mu > \mathbb{E}(P_\infty)$ tuloksen (5.34) nojalla.

Lisälähteitä kohtaan 5.2.

Bonsdorff, H. (1990) On comparison of the ordinary and a varying parameter exponential smoothing. J. Appl. Prob. 27, 784-792.

Rantala, J. (1984) An application of stochastic control theory to insurance business. PhD thesis, University of Tampere.