5. Yksilöllinen tariffointi

Tariffitekijöiden avulla vakuutusmaksut pystytään mitoittamaan oikeudenmukaisesti ainakin jollain tarkkuudella. Tariffiluokan kohteet asetetaan tällöin samanarvoisiksi: riskimaksu on sama kaikilla luokkaan kuuluvilla kohteilla. Selvää kuitenkin on, että tariffitekijät eivät kuvaa riskiä täsmällisesti.

Tarkastellaan esimerkkinä autovakuutusta. Luonnolliselta tuntuu, että esimerkiksi ajoneuvon 'kotipaikka' vaikuttaa riskin suuruuteen. Tämä on helposti saatavilla oleva tieto ja siten varteenotettava tariffitekijäehdokas. Auton omistajan ajotaito vaikuttaa ilmeisesti myös kolaririskiin. Tätä on kuitenkin vaikea mitata, eikä se siksi sovi tariffitekijäksi. Tietoa ajotaidosta saadaan kuitenkin epäsuorasti seuraamalla auton omistajan vahinkohistoriaa. Yksilöllisen tariffoinnin ideana onkin juuri ohjata vakuutusmaksua nojautuen kohteen omaan historiaan.

Ilmeisesti tariffin oikeudenmukaisuutta pystytään parantamaan yksilöllisten menetelmien avulla. Toisaalta vakuutusmaksu ei saisi vaihdella kovin paljon vuodesta toiseen. Tämä rajoittaa vahinkohistorian käyttömahdollisuuksia tariffoinnissa.

Taulukkotariffeilla on käytännössä aina oma merkityksensä, vaikka sovellettaisiinkin yksilöllisiä menetelmiä. Tyypillisesti uusi vakuutettava kohde hinnoitellaan nojautuen taulukkotariffiin. Laajemmin, usein maksu määräytyy kompromissina taulukkomaksusta ja omasta vahinkohistoriasta.

Vahinkohistoriaa voidaan hyödyntää monin tavoin tariffoinnissa. Seuraavassa tarkastellaan kolmea lähestymistapaa:

- credibility-teoria
- eksponentiaalinen tasoitus
- bonusjärjestelmät.

5.1. Credibility-teoriaa

Tarkastellaan vakuutuskantaa tai tariffiluokkaa, joka muodostuu samankaltaisista muttei kuitenkaan samanlaisista kohteista. Credibility-teorian lähtökohdaksi määritellään riskikollektiivin käsite:

1) Kukin yksittäinen kohde kuvataan muuttujilla

$\vartheta, X_1, \dots, X_n$, missä

ϑ = riskiparametri, ei havaita,

$X_1, \dots, X_n$ = havaitut kohteen vahinkomäärät vuosina $1, \dots, n$.

Ehdolla $\vartheta = v$, vahinkomäärät $X_1, \dots, X_n$ ovat riid.

2) Riskikollektiivi

Θ = mahdollisten ϑ:n arvojen joukko,

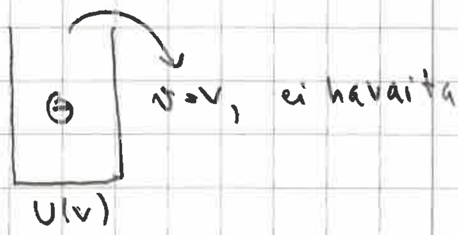
U = rakennefunktio, ϑ:n jakauma Θ:ssa,

$F(\cdot|v)$ = ϑ:n arvoa v vastaava vahinkomäärän kertymäfunktio, $v \in \Theta$.

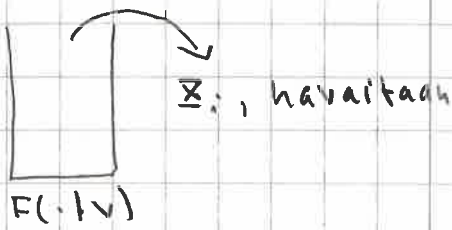
Riskiparametri voisi olla esimerkiksi kunkin kohteen vahinkomäärän odotusarvo eli riskimaksu. Mallissa tähän suhtaudutaan satunnaismuuttujana.

Seuraava uurnahavainnollistus antaa intuitiivisen kuvan mallista. Kullekin kohteelle

1) alussa poimitaan $\vartheta = v$ jakaumasta U



2) Kunakin vuonna i poimitaan X_i jakaumasta $F(\cdot\,|\,v)$



Yllä $F(x|v)$ on X_i:n ehdollinen kertymäfunktio,

$$F(x|v) = \mathbb{P}(X_i \leq x \mid \vartheta = v), \quad x \in \mathbb{R}$$

Kiinteälle kohteelle pätee

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n \mid \vartheta = v) = F(x_1|v) \cdots F(x_n|v).$$

Rakennefunktio U kuvaa kollektiivin heterogeenisyyttä. Voidaan ajatella, että $dU(v)$ ilmaisee, millä painolla riskiparametrin arvo v esiintyy vakuutuskannassa. Umpimähkään kannasta valitulle vakuutetulle pätee

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x) = \int_{\Theta} F(x|v)\, dU(v)$$

$$\doteq F(x).$$

Merkitään ehdollisia odotusarvoja ja variansseja symboleilla $\mu(v)$ ja $\sigma^2(v)$,

$$\mu(v) = \mathbb{E}(X_i \mid \vartheta = v) = \int_{\mathbb{R}} x \, dF(x \mid v),$$

$$\sigma^2(v) = \mathbb{E}((X_i - \mu(v))^2 \mid \vartheta = v)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} (x - \mu(v))^2 \, dF(x \mid v).$$

Umpimähkään valitulle kohteelle merkitään

$$\mu = \mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_i \mid \vartheta))$$

$$= \mathbb{E}(\mu(\vartheta)) = \int_{\Theta} \mu(v) \, dU(v),$$

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_i) = \mathbb{E}(\sigma^2(\vartheta)) + \mathrm{Var}(\mu(\vartheta))$$

$$= \int_{\Theta} \sigma^2(v) \, dU(v) + \int_{\Theta} (\mu(v) - \mu)^2 \, dU(v).$$

Ilmeisesti

$$\mu = \int_{\mathbb{R}} x \, dF(x), \quad \sigma^2 = \int_{\mathbb{R}} (x-\mu)^2 \, dF(x).$$

5.1.1. Yhden vakuutetun credibility-maksu

On mielenkiintoista tarkastella esimerkiksi tariffiluokkaa ja mallintaa vakuutettujen heterogeenisyyttä riskiparametrin avulla. Tarkastellaan tässä kappaleessa asiaa kuitenkin vain yhden vakuutetun näkökulmasta.

Tavoitteena on minimoida keskineliöpoikkeama (5.2). Ainoastaan vakuutetun oma vahinkohistoria siis on käytettävissä.

Perusongelmana on estimoida kohteen riskiparametri, kun vuotuiset vahinkomäärät $X_1, \dots, X_n$ on havaittu, tai pikemminkin tähän liittyvä riskimaksu. Luonnollinen estimaattori on

$$R_0 = \mathbb{E}(\mu(\vartheta) \mid X_1, \dots, X_n).$$

Tätä kutsutaan usein Bayes-estimaattoriksi tai Bayes-maksuksi. Tunnetusti R_0 minimoi keskineliöpoikkeaman

$$\mathbb{E}\left([\mu(\vartheta) - f(X_1, \dots, X_n)]^2\right)$$

$$= \int_{\Theta \times \mathbb{R}^n} [\mu(v) - f(x_1, \dots, x_n)]^2 \, dF(x_1 \mid v) \cdots dF(x_n \mid v) \, dU(v)$$

yli kaikkien mitallisten kuvausten $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Yksinkertaisuuden vuoksi valitaan keskineliöpoikkeaman mielessä paras lineaarinen $f = f_L$ (oikeastaan affiini),

$$f_L(x_1, \dots, x_n) = a + b_1 x_1 + \dots + b_n x_n.$$

Parametrit $a, b_1, \dots, b_n$ määrätään siten, että keskineliöpoikkeama

$$(5.2) \quad \mathbb{E}\left([\mu(\vartheta) - f_L(X_1, \dots, X_n)]^2\right)$$

minimoituu. Optimaalisilla parametrien arvoilla määräytyvää maksua kutsutaan credibility-maksuksi.

Lause 5.1. Olkoon $\mathfrak{z}^2 \in (0, \infty)$. Silloin (5.2) minimoituu, kun

$$a = (1-z)\mu,$$

$$b_1 = \dots = b_n = z/n,$$

missä

$$z = \frac{ns}{ns+m},$$

$$m = \mathbb{E}(\mathfrak{z}^2(\vartheta)),$$

$$s = \mathrm{Var}(\mu(\vartheta)).$$

Todistus. Tarkastellaan aluksi joitakin malliin liittyviä momentteja. Olkoon $i \neq j$. Silloin

$$(5.4) \qquad \mathbb{E}(\underline{X}_i \underline{X}_j) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\underline{X}_i \underline{X}_j | \vartheta))$$
$$= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\underline{X}_i | \vartheta)\,\mathbb{E}(\underline{X}_j | \vartheta)) = \mathbb{E}(\mu(\vartheta)^2)$$

ja

$$(5.5) \qquad \mathrm{Cov}(\underline{X}_i, \underline{X}_j) = \mathbb{E}(\underline{X}_i \underline{X}_j) - \mathbb{E}(\underline{X}_i)\mathbb{E}(\underline{X}_j)$$
$$= \mathbb{E}(\mu(\vartheta)^2) - \mu^2 = \mathrm{Var}(\mu(\vartheta)) = s.$$

Samaan tapaan nähdään, että

$$(5.6) \qquad \mathbb{E}(\underline{X}_i^2) = \mathrm{Var}(\underline{X}_i) + \mu^2$$
$$= m + s + \mu^2.$$

Olkoon aluksi $m > 0$. Merkitään

$$g(a, b_1, \ldots, b_n) = \mathbb{E}\left(\left[\mu(\vartheta) - (a + b_1 \bar{X}_1 + \cdots + b_n \bar{X}_n) \right]^2 \right).$$

Tavoitteena on siis minimoida g yli joukon

$$(a, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Olkoon $\gamma > 0$ suuri. Silloin

$$g(\gamma a, \gamma b_1, \ldots, \gamma b_n)$$
$$= \gamma^2 \, \mathbb{E}\left(\left[\frac{\mu(\vartheta)}{\gamma} - (a + b_1 \bar{X}_1 + \cdots + b_n \bar{X}_n) \right]^2 \right)$$
$$= \gamma^2 \, \mathbb{E}\left(\left[a + b_1 \bar{X}_1 + \cdots + b_n \bar{X}_n \right]^2 \right) + o(1)\gamma^2, \quad \gamma \to \infty.$$

Todetaan, että $g(\gamma a, \gamma b_1, \ldots, \gamma b_n) \to \infty$ tasaisesti joukossa $\|(a, b_1, \ldots, b_n)\| = 1$. Nimittäin $\mathbb{E}\left(\left[a + b_1 \bar{X}_1 + \cdots + b_n \bar{X}_n \right]^2 \right)$ saavuttaa miniminsä yksikköympyrällä ja minimiarvo on aidosti positiivinen. Siis g saavuttaa minimiarvonsa eräässä pisteessä. Tässä toteutuvat välttämättömät optimaalisuusehdot,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial a} g = -2\,\mathbb{E}\left(\mu(\vartheta) - a - b_1 \bar{X}_1 - \cdots - b_n \bar{X}_n \right) = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial b_i} g = -2\,\mathbb{E}\left(\bar{X}_i \left(\mu(\vartheta) - (a + b_1 \bar{X}_1 + \cdots + b_n \bar{X}_n) \right) \right) = 0, \end{cases}$$

$i = 1, \ldots, n.$

Tarkastellaan osittaisderivaattoja b-muuttujien suhteen. Selvästi

$$\mathbb{E}(Z_i\,\mu(\vartheta)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z_i\,\mu(\vartheta)\,|\,\vartheta)) = \mathbb{E}(\mu(\vartheta)^2).$$

Optimaalisuusehto ja kaavat (5.4) – (5.6) antavat

$$\mathbb{E}(\mu(\vartheta)^2) - a\mu - \mathbb{E}(\mu(\vartheta)^2)\sum_{j\neq i} b_j - (m+s+\mu^2)\,b_i$$

$$= \mathbb{E}(\mu(\vartheta)^2) - a\mu - \mathbb{E}(\mu(\vartheta)^2)\sum_{j=1}^{n} b_j - m b_i = 0.$$

Vähentämällä saatuja yhtälöitä pareittain toisistaan nähdään, että optimipisteessä

$$b_1 = \dots = b_n \doteq b.$$

Optimointitehtävä on siis saatu muotoon: määrättävä a ja b siten, että

$$\begin{cases} a + b\mu n = \mu, \\ a\mu + b\,(n\,\mathbb{E}(\mu(\vartheta)^2) + m) = \mathbb{E}(\mu(\vartheta)^2). \end{cases}$$

Ratkaisu on

$$b = \frac{\mathbb{E}(\mu(\vartheta)^2) - \mu^2}{n\,\mathbb{E}(\mu(\vartheta)^2) + m - n\mu^2} = \frac{s}{m+ns} = \frac{z}{n},$$

$$a = \mu(1-bn) = \frac{\mu m}{m+ns} = (1-z)\mu.$$

Lause on siis todistettu, jos $m > 0$. Jos taas $m = 0$, niin $\mathbb{P}(\sigma^2(\vartheta) = 0) = 1$ ja

$$\mathbb{P}(\bar{X}_i = \mu(\vartheta)) = \mathbb{E}(\underbrace{\mathbb{P}(\bar{X}_i = \mu(\vartheta) \mid \vartheta)}_{=1 \text{ m.v.}}) = 1.$$

Siis keskineliöpoikkeama (5.2) minimoituu (ja on $=0$), kun valitaan $z = 1$. Lauseen väite pätee siis myös, kun $m = 0$. $\square$

Odotusarvoa μ kutsutaan usein <u>manuaalimaksuksi</u>. Lauseen 5.1 nojalla credibility-maksu on muotoa

$$(1-z)\mu + z\bar{\mu},$$

missä $\bar{\mu} = (\bar{X}_1 + \dots + \bar{X}_n)/n$ on kohteen vahinkomäärien otoskeskiarvo. Kerroin z kutsutaan <u>credibility-kertoimeksi</u>. Nähdään, että aina $0 \le z \le 1$ ja että z kasvaa kohti ykköstä, kun havaintovuosien määrä n kasvaa kohti ääretöntä.

Credibility-kertoimen muoto on mielekäs seuraavasti:

1) Jos kollektiivi on hyvin epähomogeeninen eli $\mu(\vartheta)$ vaihtelee suuresti kohteesta toiseen, on intuitiivisesti perusteltua antaa painoa kohteen omalle vahinkohistorialle. Tässä tilanteessa

$$s = \operatorname{Var} \mu(\vartheta)$$

on suuri ja siis myös

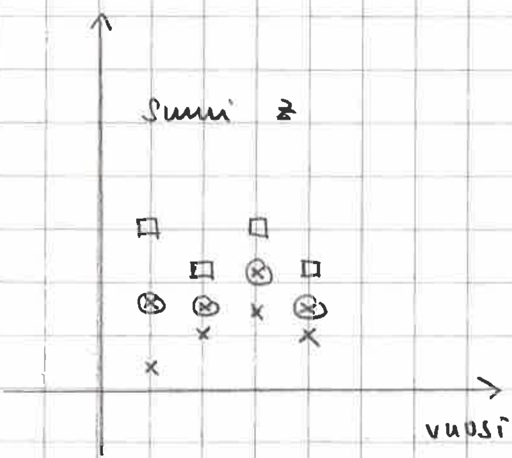
$$z = \frac{n}{n + m/s}$$

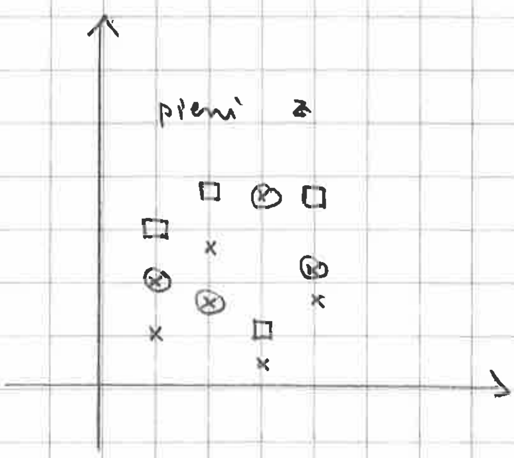
on suuri kuten pitääkin.

2) Jos yksittäisen kohteen vahinkomäärän vuotuinen heilahtelu on vähäistä, on myös perusteltua antaa painoa kohteen omalle vahinkohistorialle. Nyt

$$m = \mathbb{E}(\sigma^2(\vartheta))$$

on pieni ja siis jälleen z on suuri.





Vahinkomäärät kohteille □, ⊗ ja ×.

Esimerkki 5.1. Olkoon $\underline{X}_1$:n ehdollisella kertymäfunktiolla $F(\cdot|v)$ tiheysfunktio,

$$f(x|v) = \frac{\partial}{\partial x} F(x|v) = \frac{a(x)\, e^{-vx}}{g(v)}, \quad x \in A = (\underline{x}, \bar{x}),$$

missä $v \in \Theta = (\underline{v}, \bar{v})$ ja $a(x) \geq 0$, $\forall x$. Päätepisteiden $\underline{x}$, $\bar{x}$, $\underline{v}$ ja $\bar{v}$ ei tarvitse olla äärellisiä. Luonnollisesti oletetaan, että

$$g(v) = \int_A a(x)\, e^{-vx}\, dx \in (0, \infty), \quad \forall v \in \Theta.$$

Olkoon myös rakennefunktiolla U tiheysfunktio,

$$u(v) = U'(v) = \frac{e^{-\alpha v}}{h\, g(v)^\beta}, \quad v \in \Theta,$$

missä $\alpha, \beta > 0$ ovat vakioita ja

$$h = \int_\Theta \frac{e^{-\alpha v}}{g(v)^\beta}\, dv \in (0, \infty).$$

Oletetaan vielä, että $\forall x \in A$,

$$u(\underline{v}+|x) = u(\bar{v}-|x) = 0,$$

missä

$$u(v|x) = \frac{u(v)\, f(x|v)}{f(x)}$$

ja

$$f(x) = \int_\Theta u(v) f(x|v)\, dv \in (0, \infty).$$

Bayesin kaavan nojalla $u(\cdot|x)$ on Θ:n ehdollinen tiheysfunktio ehdolla $\underline{X}_1 = x$. Kokonaistodennäköisyysteoreeman nojalla f on $\underline{X}_1$:n tiheysfunktio.

Olkoon $\mu = \mathbb{E}(\underline{X}_1)$ äärellinen.

Määrätään vakuutusmaksun Bayes-estimaattori

$$R_0 = \mathbb{E}(\mu(\vartheta) \mid \underline{X}_1)$$

olettaen siis, että $n = 1$. Näytetään, että

$$(5.8) \qquad R_0 = \frac{\alpha}{\beta+1} + \frac{\underline{X}_1}{\beta+1}.$$

Koska tämä on lineaarinen $\underline{X}_1$:n suhteen, on se minimaalisuusominaisuutensa perusteella myös credibility-maksu (edellyttäen, että Lauseen 5.1 oletukset ovat täytetyt). Erityisesti credibility-kerroin on

$$Z = \frac{1}{\beta+1}.$$

Todistetaan (5.8). Ehdollinen odotusarvo voidaan määrätä käyttäen ehdollista tiheysfunktiota, joten

$$\mathbb{E}(\mu(\vartheta) \mid \underline{X}_1 = x) = \int_\Theta \mu(v)\, u(v|x)\, dv.$$

Todetaan, että $\forall\, v \in \Theta,\ x \in A,$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[u(v|x)\right] = \frac{a(x)}{h f(x)} \frac{\partial}{\partial v}\left[g(v)^{-\beta-1} e^{-(\alpha+x)v}\right]$$

$$= \frac{a(x)}{h f(x)}\Big[-(\beta+1)g'(v)g(v)^{-\beta-2}e^{-(\alpha+x)v}$$

$$-(\alpha+x)\,g(v)^{-\beta-1}e^{-(\alpha+x)v}\Big]$$

$$= u(v|x)\left[-\frac{(\beta+1)g'(v)}{g(v)} - (\alpha+x)\right].$$

Toisaalta

$$g'(v) = -\int_A x\, a(x) e^{-vx}\, dx$$

$$= -g(v) \int_A x\, f(x|v)\, dx = -g(v)\,\mu(v).$$

Siispä

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[u(v|x)\right] = u(v|x)\left[(\beta+1)\mu(v) - (\alpha+x)\right].$$

Integroimalla puolittain saadaan

$$0 = u(\bar{v}-|x) - u(\underline{v}+|x)$$

$$= (\beta+1)\int_\Theta u(v|x)\mu(v)\,dv - (\alpha+x)\int_\Theta u(v|x)\,dv$$

$$= (\beta+1)\,\mathbb{E}(\mu(\vartheta)|\, \underline{X}_1 = x) - (\alpha+x).$$

Tästä seuraa (5.8).

Esimerkki 5.2. Tarkastellaan esimerkkitapausta, jossa

$$A = (0,\infty), \quad a(x) = 1, \ \forall x \in A \quad \text{ja} \quad \Theta = (0,\infty).$$

Nyt

$$g(v) = \int_0^\infty e^{-vx}\,dx = \frac{1}{v},$$

$$f(x|v) = v e^{-vx},$$

$$h = \int_0^\infty v^{\beta} e^{-\alpha v}\,dv \in (0,\infty),$$

$$u(v) = h^{-1} v^{\beta} e^{-\alpha v},$$

$$f(x) = \int_0^\infty h^{-1} v^{\beta+1} e^{-(\alpha+x)v}\,dv \in (0,\infty),$$

$$\mu = \mathbb{E}(X_1) = \int_0^\infty x f(x)\,dx \in (0,\infty),$$

$$u(v|x) = f(x)^{-1} h^{-1} v^{\beta+1} e^{-(\alpha+x)v},$$

$$u(0+|x) = u(\infty|x) = 0, \quad \forall x \in A.$$

Siis X_1:n ehdollinen jakauma ehdolla $\vartheta = v$ on eksponenttijakauma parametrilla v. Riskiparametrilla ϑ on gamma-$(\beta+1,\alpha)$-jakauma. Esimerkin 5.1 nojalla

$$\mathbb{E}(\mu(\vartheta) \mid X_1 = x) = \frac{\alpha}{\beta+1} + \frac{x}{\beta+1}.$$

Todennetaan suoraan laskemalla, että $z = \frac{1}{\beta+1}$ on lauseen 5.1 esityksen mukainen credibility-kerroin.

Määrätään siis μ, m ja s:

$$\mu(v) = \int_0^\infty x v e^{-vx}\,dx = \frac{1}{v},$$

$$\sigma^2(v) = \int_0^\infty (x-\mu(v))^2 v e^{-vx}\,dx = \frac{1}{v^2},$$

$$m = \mathbb{E}(\sigma^2(\vartheta)) = \int_0^\infty v^{-2} u(v)\,dv$$

$$= \int_0^\infty v^{-2} \alpha^{\beta+1} v^{\beta} e^{-\alpha v}/\Gamma(\beta+1)\,dv$$

$$= \frac{\alpha^2}{(\beta-1)\beta} \int_0^\infty \alpha^{\beta-1} v^{\beta-2} e^{-\alpha v}/\Gamma(\beta-1)\,dv = \frac{\alpha^2}{(\beta-1)\beta},$$

$$\mu = \mathbb{E}(\mu(\vartheta)) = \int_0^\infty v^{-1} \alpha^{\beta+1} v^{\beta} e^{-\alpha v}/\Gamma(\beta+1)\,dv = \frac{\alpha}{\beta}.$$

$$s = \mathrm{Var}(\mu(\vartheta)) = \int_0^\infty \mu(v)^2 u(v)\,dv - \mu^2$$

$$= \frac{\alpha^2}{(\beta-1)\beta} - \frac{\alpha^2}{\beta^2}.$$

Siis

$$z = \frac{s}{s+m} = \frac{1}{\beta+1},$$

Tulee myös olla

$$(1-z)\mu = \frac{\alpha}{\beta+1}.$$

Näin on, koska $\mu = \frac{\alpha}{\beta}$.

Lauseen 5.1 uskottavuus-kaava on ongelmallinen, jos suurvahingot ovat mahdollisia. Mekaaninen kaavan soveltaminen johtaa tällöin toisinaan suuriin vakuutusmaksun vuosivaihteluihin. Tämä ongelma voidaan ratkaista esimerkiksi katkaisemalla vuotuiset kokonaisvahinkomäärät. Oikean maksutason saavuttamiseksi katkaisut täytyy kompensoida esimerkiksi kollektiivisella lisämaksulla.

Toinen ongelma liittyy rakennefunktion U ja ehdollisten jakaumien $F(\cdot|v)$ valintaan ja estimointiin. Lauseessa 5.1 riittää kuitenkin tuntea parametrit μ, m ja s. Näille voidaan esittää harhattomat estimaattorit perustuen usean vuoden aineistoon.

5.1.2. Tariffiluokan credibility-maksut

Tarkastellaan tariffiluokkaa, jossa on N kappaletta samankaltaista vakuutettua. Erityisesti ajatellaan, että riskimaksu on kaikilla sama a priori (ennen vahinkomäärien havaitsemista). Käsitystä korjataan havaintojen perusteella.

Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että tarkastelukaudella kustakin vakuutetusta on käytettävissä n kappaletta vuotuista vahinkohavaintoa. Vakuutetun i havainnot olkoot

$$X_{i1}, \ldots, X_{in}, \quad i=1,\ldots,N.$$

Vakuutettuun i liitetään riskiparametri ϑ_i. Merkitään lyhyesti

$$Y_i = (X_{i1},\ldots,X_{in}).$$

Oletetaan, että vektorit

$$(\vartheta_1, Y_1),\ldots,(\vartheta_N, Y_N), (\vartheta, Y)$$

ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita. Muuten tehdään samat oletukset kuin kohdassa 5.1.1 (merkinnällisesti vastaten geneeristä vektoria (ϑ, Y)).

Luonnollinen credibility-maksu on muotoa

$$a + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \bar{X}_{ij}.$$

Kertoimet a, b_{ij}, $i=1,\dots,N$, $j=1,\dots,n$, määrätään siten, että keskineliöpoikkeama

$$(5.8.1) \quad \mathbb{E}\left(\left[\mu(\vartheta_k) - \left(a + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \bar{X}_{ij}\right)\right]^2 \right)$$

minimoituu, $k = 1,\dots,N$.

Lause 5.1.1. Keskineliöpoikkeama (5.8.1) minimoituu, kun $b_{ij} = 0$, $\forall\, i \neq k$, $j = 1,\dots,n$, ja

$$a = (1-z)\mu, \quad b_{k1} = \dots = b_{kn} = z/n,$$

missä μ ja z ovat kuten lauseessa 5.1.

Todistus. Jos $b_{k1},\dots,b_{kn}$ ovat kiinteitä, niin riippumattomuusoletusten nojalla (5.8.1) on vähintään

$$\mathrm{Var}\Big(\mu(\vartheta_k) - \big(a + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\bar{X}_{ij}\big)\Big)$$
$$+ \Big[\mathbb{E}(\mu(\vartheta_k)) - a - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\mu\Big]^2$$

$$= \mathrm{Var}\Big(\mu(\vartheta_k) - \sum_{j=1}^{n} b_{kj}\bar{X}_{kj}\Big)$$
$$+ \mathrm{Var}\Big(\sum_{i\neq k}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\bar{X}_{ij}\Big)$$
$$+ \Big[\mathbb{E}(\mu(\vartheta_k)) - a - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\mu\Big]^2$$

$$\geq \mathrm{Var}\Big(\mu(\vartheta_k) - \sum_{j=1}^{n} b_{kj}\bar{X}_{kj}\Big).$$

Yhtäsuuruus pätee, kun

$$\begin{cases} b_{ij} = 0, \quad \forall\, i\neq k,\ j=1,\dots,n, \\ a = \mu - \sum_{j=1}^{n} b_{kj}\mu. \end{cases}$$

Nähdään, että on yhtäpitävää minimoida keskineliöpoikkeamaa

$$\mathbb{E}\Big(\big[\mu(\vartheta_k) - \big(a + \sum_{j=1}^{n} b_{kj}\bar{X}_{kj}\big)\big]^2\Big).$$

Tämän ratkaisu tiedetään lauseesta 5.1. $\square$