3. Yleisiä näkökohtia vakuutusmaksuista

Tarkastellaan yleisesti vakuutusten hinnoitteluun liittyviä näkökohtia. Keskeisesti vakuutusmaksulla katetaan vahingoista aiheutuvia taloudellisia menetyksiä. Maksuun sisällytetään kuitenkin muitakin eriä, kuten myöhemmin todetaan.

Lähtökohtana on lähes poikkeuksetta, että vakuutusmaksun tulisi kattaa sovittuna ajanjaksona sattuneiden vahinkojen aiheuttamat korvaukset. Näin on siksi, että yhtiön korvausvelvollisuus perustuu tavallisesti sattumishetkeen. Mikäli vakuutusmaksu mitoitettaisiin vastaamaan sovittuna ajanjaksona maksettuja korvauksia, päädyttäisiin esimerkiksi seuraaviin ongelmiin:

1) Vakuutusmaksu olisi ensimmäisinä vuosina alimitoitettu korvausviiveiden vuoksi

2) Inflaation vaikutuksesta sattumisvuoden jälkeen maksettavat korvaukset ovat sattumisvuonna maksettavia summempia (ainakin usein). Tämä korostaa kohdan 1) alimitoitusta.

Jatkossa kaikki esiintyvät korvaukset tulkitaan sattumisvuoden lopullisiksi korvauksiksi (todellisuudessa nämä ovat estimaatteja, mutta ne oletetaan oikean tasoisiksi).

Mikäli korvauksia maksetaan pitkään vahingon sattumisesta, voidaan absoluuttisten korvausmäärien sijasta tarkastella diskontattuja korvausmääriä. Tällä on suuri merkitys esimerkiksi eläketyyppisissä korvauksissa. Jatkossa tätä piirrettä ei erikseen käsitellä.

3.1. Vakuutusmaksun rakenne

Vakuutusmaksu P jaetaan tavallisesti kolmeen osaan

$$P = R + V + K,$$

missä

R = riskimaksu,

V = varmuuslisä,

K = hoitokustannuskuormitus.

Riskimaksu R on puhtaasti korvauksiin tarkoitettu erä, määritelmän mukaan kokonaisvahinkomäärän odotusarvo (tarkasteltavassa vakuutuskannassa, sen osassa tai yksittäisessä vakuutuksessa tyypillisesti yhden vuoden aikana). Käytännössä R on luonnollisesti vain kyseisen odotusarvon estimaatti. Samaa termiä käytetään kuitenkin tästä estimaatista.

Varmuuslisä V on tarpeen yhtiön vakavaraisuuden ylläpitämiseksi. Klassisen riskiteorian mukaisessa mallissa yhtiö tekee varmasti vararikon, jos $V = 0$ (ja vielä suuremmalla syyllä, jos $V < 0$). Lisäperusteluja voidaan esittää tarkastelemalla klassisen teorian laajennuksia, kts. esim. Pentikäinen (1982) ja Rantala (1982). Erää ei juurikaan käsitellä kurssilla. Samaavia rakenteita kuitenkin ainakin esiintyy.

Odotusarvoperiaate : $V = g_1 R$.

Keskihajontaperiaate : $V = g_2 \sigma$, σ tarkasteltavan kokonaisvahinkomäärän hajonta.

Varianssiperiaate : $V = g_3 \sigma^2$.

Parametrit g_1, g_2 ja g_3 ovat vakuutetusta riippumattomia positiivisia vakioita.

Hoitokustannuskuormituksella K katetaan yhtiön toiminnasta aiheutuvat liikekulut (henkilökunnan palkat, materiaalikulut jne). Summaltaan voisi olla esimerkiksi 10 - 30 % kokonaismaksusta. Todettakoon, että sattumisperiaate koskee myös tätä osaa. Erityisesti korvauskäsittelystä syntyvät kustannukset tulisi kattaa vahingon sattumisvuotena kerätyillä hoitokustannuskuormituksilla.

Seuraavassa tarkastelut tullaan pääasiin rajoittamaan riskimaksuihin.

3.2 Vakuutusmaksulle asetettavia vaatimuksia

Vakuutusmaksulle voidaan esittää ainakin seuraavia vaatimuksia:

1) Oikea taso kokonaisuutena (esimerkiksi vakuutuslajin tasolla)

2) Oikeudenmukaisuus

3) Yksinkertaisuus

4) Joustavuus

5) Kilpailukykyisyys.

Oikea taso on luonnollinen vaatimus. Liian matala tariffi ei ole pitkällä tähtäimellä mahdollinen, liian korkea taas johtaa helposti vakuutuskannan menettämiseen. Yksittäisen yhtiön tariffi ei voi tästä syystä poiketa merkittävästi markkinoiden yleisestä tasosta. Kilpailutilanteessa taso voi olla tilapäisesti liian matala eli liiketoiminta tuottaa tappiota. Selvää kuitenkin on, että oikean tason tunteminen on kaikissa tilanteissa yhtiölle tärkeää.

Oikeudenmukaisuusvaatimus on luonnollinen erityisesti vakuutettujen näkökulmasta. Seuraava esimerkki osoittaa, että vaatimus on perusteltu myös yhtiön näkökulmasta.

Oletetaan, että yhtiö 1 myy palovakuutuksia ja asettaa vakuutusmaksun kaikille samaksi: 2 % talon arvosta. Yhtiö 2 asettaa puutaloille maksuksi 3 % ja kivitalolle 1 %. Oletetaan, että nämä vastaavat oikeudenmukaisesti tulipaloriskiä. Tällöin yhtiön 2 hintataso on tietysti kokonaisuutena oikea. Yhtiön 1 hintataso on myös kokonaisuutena oikea, jos vakuutuskannassa on sama määrä puu- ja kivitaloja kohteiden arvolla mitattuna. Seurauksena hinnoittelusta on se, että kivitalojen vakuutuksilla on taipumus siirtyä yhtiöön 2 ja puutalojen yhtiöön 1 edullisempien hintojen takia. Yhtiön 1 tariffi osoittautuu siis ajan mittaan liian alhaiseksi. Oikeudenmukainen tariffi taas suojaa yhtiötä 2 vakuutuskannan muutoksia vastaan.

Tariffin yksinkertaisuus on ilmeisesti eduksi sekä vakuutetulle että yhtiölle. Järjestelmä on tällöin todennäköisesti ymmärrettävä ja helppohoitoinen. Edellinen esimerkki kuitenkin osoittaa, että liian yksinkertainen tariffi vie pohjan oikeudenmukaisuudelta ja mahdollisesti myös oikealta tasolta. Vaatimukset 2) ja 3) ovat tässä mielessä ristiriitaisia.

Joustavuudella tarkoitetaan lähinnä tariffin kykyä reagoida ympäristön muutoksiin, esimerkiksi inflaatioon ja taloudellisiin sykleihin. Tyypillisesti riskimaksut estimoidaan historiatietojen perusteella, jotka joudutaan oikaisemaan nykytilanteen mukaiseksi (tai paremminkin seuraavan vuoden mukaiseksi). Inflaatiota vastaan voidaan toisinaan suojautua suhteuttamalla maksut sopivaan volyymiin (joka seuraa inflaatiota). Suhdannevaihteluita vastaan ei ole helppo löytää automaattista kontrollia.

Kilpailukyky on myös tärkeä vaatimus tariffeille, koska se vaikuttaa esimerkiksi yhtiön markkinaosuuteen. Hintataso ja tariffien oikeudenmukaisuus ilmeisesti vaikuttavat kilpailukykyyn. Samoin vaikutusta on tariffeista riippumattomilla tekijöillä kuten markkinointiponnisteluilla ja yhtiön yrityskuvalla.

4. Tauluistotariffeista

Eräs tapa luokitella tariffeja on niiden yksilöllisyyden aste. Tämä viittaa siihen, miten vakuutetun oma vahinkohistoria vaikuttaa vakuutusmaksuun. Tarkastellaan tässä luvussa ns. tauluistotariffeja, jossa omalla historialla ei ole ollenkaan vaikutusta maksuun tai ainakin se on häviävän pieni.

Vakuutettuja kuvataan ja luokitellaan seuraavassa tariffitekijöiden avulla. Esimerkiksi palovakuutuksessa tällaisia voisivat olla kohteen rakennusmateriaali ja käyttötarkoitus. Tarkastellaan seuraavassa kolmea tariffin rakentamisvaihetta, jotka tosin eivät ole toisistaan täysin irrallaan. Vaiheet ovat

1) tariffitekijöiden valinta

2) tariffiluokkien määrääminen

3) riskimaksujen estimointi tariffiluokille.

Mainitut kolme kohtaa voidaan toteuttaa nojautuen moniin erilaisiin menetelmiin. Seuraavassa kuvataan lyhyesti kahta ensimmäistä kohtaa ja laajemmin riskimaksujen estimointia. Lopputuloksena saadaan riskimaksut tariffiluokille. Kukin vakuutettu kohde sijoitetaan tariffitekijöiden arvojen perusteella tällaiseen luokkaan, josta sitten riskimaksu määräytyy.

Laajempi katsaus menetelmiin on esitetty lähteessä van Eeghen et al. (1983).

4.1. Tariffitekijöiden valinta

Lähtökohtana on tilastoaineisto vakuutetuista kohteista, joka sisältää kohteen havaitut vahinkotiedot ja potentiaaliset tariffitekijät. Esimerkiksi palovakuutuksesta tarvittavat tiedot voisivat olla

- kohteen tunniste
- havaittu vahinkojen lukumäärä
- havaitut vahinkojen summendet

potentiaaliset tariffitekijät:
- rakennusmateriaali
- käyttötarkoitus
- sijainti
- jne

Ongelmana on löytää ehdokkaiden joukosta ne tariffitekijät, jotka 'parhaiten' kuvaavat vahinkoriskiä. Yksinkertaisuusvaatimus edellyttää, että tariffitekijöitä ei saisi olla liikaa. Jos siis ehdokkaan selitysvoima on heikko, ei sitä kelpuuteta tariffitekijäksi. Toisaalta kaksi ehdokasta voivat olla riippuvia toisistaan siten, että ne 'selittävät' samaa ilmiötä, jolloin näistä olisi perusteltua valita vain toinen.

Potentiaaliset tariffitekijät valitaan orimaksi intuition tai terveen järjen avulla. Tämän jälkeen valintaongelmaa voidaan lähestyä käyttäen tilastollisia menetelmiä. Terveen järjen osuutta ei ole syytä vähentää myöskään tulosten tulkinnassa ja lopullisten päätösten tekemisessä.

4.2. Tariffiluokkien määräämisestä

Oletetaan, että tariffitekijät on valittu ja että jokaisen kohteen tariffitekijöiden arvot tunnetaan. Erot tariffitekijöiden arvoissa heijastavat eroja riskimaksuissa. Lähtökohtana on kohteiden luokittelu *perusluokkiin*. Tämä vastaa hinnointa tariffitekijöiden avulla saatavaa luokitusta. Jos esimerkiksi kohteen sijainti on tariffitekijänä, voitaisiin yhden kunnan kohteet katsoa perusluokaksi. *Tariffiluokat* ovat näiden sopivasti valittuja yhdistelmiä.

Yhdistely tariffiluokiksi on tarpeen lähinnä siksi, että perusluokkien kohteiden määrä saattaa olla turhan pieni riskimaksujen estimoimiseen. Luokittelussa tasapainoillaan seuraavien toisilleen vastakkaisten päämäärien välillä:

- tariffiluokkien pitäisi olla suuria, jotta riskimaksut pystyttäisiin estimoimaan luotettavasti
- tariffiluokkien pitäisi olla pieniä, jotta erot riskillisyydessä näkyisivät vakuutusmaksuissa.

Intuitiivisesti, tavoitteena on yhdistää samankaltaiset perusluokat tariffiluokiksi siten, että oikeudenmukaisuudesta ei tingittäisi kohtuuttomasti. Toisin ilmaistuna: pyritään lopputulokseen, jossa tariffiluokkien väliset erot ovat suuria ja sisäiset erot pieniä.

Mahdollisten luokitusten suuri lukumäärä rajoittaa optimaalisen vaihtoehdon löytämismahdollisuuksia. Jos tariffitekijöitä on yksi ja perusluokkia 20, on mahdollisia tariffiluokituksia noin $58 \cdot 10^{12}$ kappaletta. Yleensä ei siis ole mahdollista läpikäydä kaikkia vaihtoehtoja, vaan joudutaan tyytymään jonkinlaisiin kompromisseihin. Voidaan menetellä esimerkiksi siten, että valitaan 'hyväksyttävien' luokitusten joukko osaksi heuristisella menetelmällä ja valitaan paras näiden joukosta.

4.3. Riskimaksujen ennustamisesta

Oletetaan, että tariffitekijät on valittu ja tariffiluokat kiinnitetty. Tarkastellaan seuraavassa tilannetta, jossa tariffitekijöitä on kaksi. Annettuna olkoon seuraava kaavio:

A \ B	1	2	...	j	...	J
1	s_{11} n_{11}	s_{12} n_{12}				
2						
⋮						
i				s_{ij} n_{ij}		
⋮						
I						

Aineisto on ryhmitelty tariffitekijän A arvojen perusteella luokkiin $1, \ldots, I$ ja tariffitekijän B arvojen perusteella luokkiin $1, \ldots, J$. Solulle (i, j) vastaten arvoja $A = i$, $B = j$, tai solun kohteelle k merkitään

η_k = kohteen k havaittu vahinkomäärä (kokonaisvahinkomäärä, vahinkojen lukumäärä, ...),

s_{ij} = havaittu solun (i,j) yhteenlaskettu vahinkomäärä,

n_{ij} = solun (i,j) volyymi (kohteiden lukumäärä tai vastaava),

r_{ij} = s_{ij}/n_{ij}, vahinkomäärä per kohde.

Olkoon ξ_{ij} satunnaismuuttuja, joka kuvaa solun (i,j) kohteiden asianmukaista vahinkosummaa, tilanteesta riippuen kohteen kokonaisvahinkomäärää, vahinkojen lukumäärää, vahingon summaa jne. Solun kaikkia kohteita kuvataan jatkossa samalla jakaumalla, joka on juuri muuttujan ξ_{ij} jakauma. Jakaumat riippuvat tietysti solusta (i,j). Jos kohde k kuuluu soluun (i,j) eli tariffitekijöiden arvot ovat $A=i$, $B=j$, on η_k samoin jakautunut kuin ξ_{ij}. Oletetaan myös, että $\eta_1, \eta_2, \ldots$ ovat toisistaan kaikilta osin riippumattomia.

Seuraavassa pyritään estimoimaan odotusarvot

$$R_{ij} = \mathbb{E}(\xi_{ij}) = \mathbb{E}(r_{ij}), \; i=1,\ldots,I, \; j=1,\ldots,J.$$

Jos η_k edustaa kokonaisvahinkomäärää, on R_{ij} juuri riskimaksu. Jos taas vahinkojen lukumäärän ja yksittäisen vahingon summan odotusarvot estimoidaan erikseen, on estimaattien tulo luonnollinen ehdokas riskimaksuksi.

Otoskeskiarvo r_{ij} on sinänsä eräs ehdokas odotusarvon $\mathbb{E}(S_{ij})$ estimaatiksi. Usein kuitenkin tariffia yksinkertaistetaan sopivan mallin avulla. Eräs syy tähän on estimaattien epäluotettavuus pienissä tariffiluokissa. Vuotuinen riskimaksujen estimointi nojautuen esimerkiksi edellisen vuoden havaintoihin johtaa tällöin helposti kohtuuttoman suuriin vakuutusmaksujen vuosivaihteluihin.

Esimerkkejä käytetyistä malleista ovat

$$R_{ij} = \alpha_i + \beta_j \qquad \text{(summamalli)}$$

ja

$$R_{ij} = \alpha_i \beta_j \qquad \text{(tulomalli).}$$

Estimoitavien parametrien α_i, β_j määrä pienenee mallinnuksen seurauksena.

Tarkastellaan seuraavassa vain summamallia. Estimoidaan siis ensin parametrit α_i, β_j. Olkoot nämä $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_j$. Tämän jälkeen R_{ij}:n estimaatti on

$$(4.8) \qquad \hat{R}_{ij} = \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j, \quad i = 1,\dots, I, \; j = 1,\dots, J.$$

Havainnon η_k voidaan ajatella olevan muotoa

$$(4.9) \qquad \eta_k = \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_k, \qquad \mathbb{E}(\varepsilon_k) = 0,$$

jos kohteen k tariffitekijöiden arvot ovat $A = i$, $B = j$. Kyseessä on siis lineaarinen malli. Jäännökset ε_k oletetaan usein riippumattomiksi ja samoin jakautuneiksi kussakin solussa (i, j). Jakauma ei ole normaali (kuten monissa muissa sovelluksissa usein oletetaan).

4.3.1. Pienimmän neliösumman menetelmä

Menetelmässä parametrit α_i, β_j määrätään minimoimalla neliösumma

$$S = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k \in \Pi_{ij}} [\eta_k - (\alpha_i + \beta_j)]^2,$$

missä Π_{ij} on solun (i,j) kohteiden joukko. Menetelmän tausta"ksi ajatellaan olettamukset (4.9),

$$\eta_k = \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_k, \quad k \in \Pi_{ij},$$

missä jäännökset ε_k ovat riippumattomia ja $\mathbb{E}(\varepsilon_k) = 0$. Tällöin estimaattorit tulevat olemaan harhattomia, siis

$$\mathbb{E}(\hat{R}_{ij}) = \mathbb{E}(\hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j) = R_{ij}.$$

Estimaattorien varianssilla on myös tiettyjä optimaalisuusominaisuuksia, jos jäännösten ε_k varianssit ovat identtiset. Tämä oletus ei ole erityisen realistinen tässä yhteydessä.

Derivoimalla S parametrien α_i, β_j suhteen saadaan välttämättömät ehdot minimikohdalle (ilmeistä on, että absoluuttinen minimi saavutetaan tällaisessa)

$$(4.9.1) \qquad \sum_{j=1}^{J} n_{ij}(\alpha_i + \beta_j) = \sum_{j=1}^{J} n_{ij} r_{ij}, \quad i = 1, \ldots, I,$$

$$(4.9.2) \qquad \sum_{i=1}^{I} n_{ij}(\alpha_i + \beta_j) = \sum_{i=1}^{I} n_{ij} r_{ij}, \quad j = 1, \ldots, J.$$

Parametrit eivät määräydy yksikäsitteisesti yhtälöistä. Jos nimittäin $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_j$ on eräs ratkaisu, niin samoin on $\hat{\alpha}_i - a, \hat{\beta}_j + a, \forall a \in \mathbb{R}$. Kaikki tämäntyyppiset muunnokset antavat kuitenkin saman estimaatin $\hat{R}_{ij}$, kts. (4.8)

Yhtälöryhmät voidaan ainakin periaatteessa ratkaista analyyttisesti. Toinen vaihtoehto on iterointi. Tällöin asetetaan aluksi esimerkiksi $\beta_1 = \dots = \beta_J = 0$ ja

$$\alpha_i = \frac{\sum_{j=1}^{J} n_{ij}(r_{ij} - \beta_j)}{\sum_{j=1}^{J} n_{ij}}, \quad i = 1, \dots, I$$

yhtälöihin (4.9.1) perustuen. Näin saadut alfat sijoitetaan yhtälöihin (4.9.2) ja saadaan uudet arvot beta-parametreille. Näin jatkaen ratkaisu löytyy (yleensä) nopeasti.

4.3.1.1. Marginaalisummien menetelmä

Tausta-ajatuksena menetelmässä on, että suurissa ryhmissä vakuutusmaksujen tulisi summautua korvausmääriksi.

Tarkastellaan vakuutettuja, joilla $A = i$ (kiinteä). Vaaditaan, että

$$\sum_{j=1}^{J} n_{ij}(\alpha_i + \beta_j) = \sum_{j=1}^{J} n_{ij} r_{ij}.$$

Vasemmalla on kokonaisvakuutusmaksu ja oikealla korvausmäärä ehdon $A = i$ täyttäville vakuutetuille. Yhtälöitä tulee siis I kappaletta. Vastaavasti kiinnittämällä $B = j$ saadaan vaatimukset

$$\sum_{i=1}^{I} n_{ij}(\alpha_i + \beta_j) = \sum_{i=1}^{I} n_{ij} r_{ij}.$$

Nähdään, että päädytään samoihin yhtälöihin kuin pienimmän neliösumman menetelmässä (näin ei ole tulomallissa).

Mikäli tariffitekijöitä on enemmän kuin kaksi, toimitaan samalla periaatteella: kiinnitetään yhden tariffitekijän arvo ja summataan tätä vastaavien vakuutettujen vakuutusmaksut ja korvaukset.

4.3.2. Suurimman uskottavuuden menetelmä

Tarkastellaan tilannetta, jossa kiinnostuksen kohteena oleva jakauma tunnetaan lukuunottamatta joitakin parametreja. Tällöin otoksesta voidaan suorittaa estimoinnit ja testaukset nojautuen suurimman uskottavuuden menetelmään. Tämä takaa yleisluontoisten säännöllisyysehtojen puitteissa mm. estimaattoreiden tarkentuvuuden ja asymptoottisen normaalisuuden.

Esimerkki. Olkoot $\xi_1, \dots, \xi_n$ riippumaton otos Poisson-jakaumasta parametrilla λ (joka ei ole tiedossa). Kiinteää parametrin arvoa λ vastaa otoksen uskottavuus

$$L = \prod_{k=1}^{n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{\xi_k}}{\xi_k!}.$$

Siis L on otoksen todennäköisyys Poisson-parametrin ollessa λ. Menetelmässä λ valitaan siten, että L maksimoituu. Yhtäpitävästi voidaan maksimoida summaa

$$\log L = \sum_{k=1}^{n} \left[-\lambda + \xi_k \log \lambda - \log(\xi_k!) \right].$$

Derivointi λ:n suhteen antaa

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}(\log L) = -n + \sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_k}{\lambda}.$$

Maksimiarvo saavutetaan, kun λ on otoskeskiarvo,

$$\lambda = \frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k}{n}.$$

Jos jakauma on jatkuva, käytetään L:n määritelmässä todennäköisyysfunktion tilalla tiheysfunktiota.

Tarkastellaan seuraavassa vain Poisson-oletukseen perustuvaa estimointia. Tämä on luontevaa, jos solujen (i,j) vahinkosummat ovat vahinkojen lukumääriä. Summamallin rajauksen oletetaan, että ξ_{ij} on Poisson-jakautunut parametrilla $\alpha_i + \beta_j$. Soluun (i,j) liittyvä uskottavuus on

$$L_{ij} = \prod_{k \in \Pi_{ij}} e^{-(\alpha_i+\beta_j)} \frac{(\alpha_i+\beta_j)^{n_k}}{n_k!}$$

ja koko otoksen uskottavuus

$$L = \prod_{i=1}^{I} \prod_{j=1}^{J} L_{ij}$$

$$= \prod_{i=1}^{I} \prod_{j=1}^{J} \prod_{k \in \Pi_{ij}} e^{-(\alpha_i+\beta_j)} \frac{(\alpha_i+\beta_j)^{n_k}}{n_k!}.$$

Välttämättömät ehdot maksimikohdalle ovat

$$\frac{\partial \log L}{\partial \alpha_i} = \sum_{j=1}^{J} \sum_{k \in \Pi_{ij}} \left[-1 + \frac{n_k}{\alpha_i+\beta_j} \right] = 0, \quad i = 1, \dots, I,$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{k \in \Pi_{ij}} \left[-1 + \frac{n_k}{\alpha_i+\beta_j} \right] = 0, \quad j = 1, \dots, J.$$

Nämä saadaan muotoon

$$\sum_{j=1}^{J} \frac{n_{ij} r_{ij}}{\alpha_i + \beta_j} = \sum_{j=1}^{J} n_{ij}, \quad i = 1,\dots, I,$$

$$\sum_{i=1}^{I} \frac{n_{ij} r_{ij}}{\alpha_i + \beta_j} = \sum_{i=1}^{I} n_{ij}, \quad j = 1,\dots, J.$$

Tarkastellaan hypoteesia

$$H_0 : \alpha_i = \alpha, \quad \forall i \in D,$$

missä $D \subseteq \{1,\dots, I\}$ on kiinteä. Vastahypoteesi on

$$H_1 : \alpha_i \neq \alpha \quad \text{jollain } i \in D.$$

Jos H_0 hyväksytään, on perusteita yhdistää joukon D tariffiluokat. Jos $D = \{1,\dots, I\}$ ja H_0 hyväksytään, on perusteita luopua tariffitekijästä. Asetelmaan sopii uskottavuusosamäärä testi. Olkoon $\log \hat{L}_0$ suureen $\log L$ maksimi nollahypoteesin mukaisessa mallissa ja $\log \hat{L}_1$ vastaava maksimi alkuperäisessä mallissa. Silloin yleisin oletuksin

$$-2(\log \hat{L}_0 - \log \hat{L}_1)$$

on asymptoottisesti (otoskoon kasvaessa) χ^2-jakautunut vapausastein $\#D$. H_0 hylätään merkitsevyystasolla p, jos

$$-2(\log \hat{L}_0 - \log \hat{L}_1) > \chi^2_{1-p}(\#D).$$

Edellä esitetty summamalli on lineaarinen. Ns. yleistetyt lineaariset mallit tarjoavat joustavuutta asetelmaan. Tällöin lähtökohtana on esitys

$$g(R_{ij}) = \alpha_i + \beta_j,$$

missä g on linkkifunktio.

Tarkastellaan edellä esitettyä Poisson-oletukseen perustuvaa estimointia log-lineaarisessa mallissa

$$\log R_{ij} = \alpha_i + \beta_j.$$

Siis $g(x) = \log x$. Kyseessä on itse asiassa tulomalli, koska nyt

$$R_{ij} = e^{\alpha_i + \beta_j} = e^{\alpha_i} e^{\beta_j}.$$

Otoksen uskottavuus on

$$L = \prod_{i=1}^{I} \prod_{j=1}^{J} \prod_{k \in \Pi_{ij}} e^{-e^{\alpha_i + \beta_j}} \frac{(e^{\alpha_i + \beta_j})^{m_k}}{m_k!}.$$

Log-uskottavuuden osittaisderivaatat ovat

$$\frac{\partial \log L}{\partial \alpha_i} = \sum_{j=1}^{J} \sum_{k \in \Pi_{ij}} (-e^{\alpha_i + \beta_j} + m_k)$$
$$= -\sum_{j=1}^{J} n_{ij} e^{\alpha_i + \beta_j} + \sum_{j=1}^{J} n_{ij} r_{ij},$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \beta_j} = -\sum_{i=1}^{I} n_{ij} e^{\alpha_i + \beta_j} + \sum_{i=1}^{I} n_{ij} r_{ij}.$$

Maksimointiprosessissa osittaisderivaatat häviävät. Tällöin päädytään marginaalisummien menetelmään.

Lisälähde kohtaan 4.3.2:

Denuit, Marechal, Pitrebois, Walhin (2007) Actuarial modelling of claim counts.