Harri Nyrhinen
Helsingin yliopisto

Tariffiteoria, kevät 2016

Kurssilla tarkastellaan vakuutusmaksujen määräämismenetelmiä, ns. tariffiteoriaa. Asiaa voidaan kuvata lyhyesti seuraavasti. Olkoon X satunnaismuuttuja, joka kuvaa henkilölle (yritykselle,...) aiheutuvia taloudellisia menetyksiä tietyn tyyppisistä vahinkotapahtumista esimerkiksi yhden vuoden aikana. Oletetaan, että henkilö ottaa vakuutuksen, jolla katetaan kyseiset menetykset. Tällöin sopimusosapuolena oleva vakuutusyhtiö sitoutuu korvaamaan henkilölle määrän X. Vastineeksi henkilö suorittaa yhtiölle vakuutusmaksun P. Kysytään, miten P tulisi määrätä. Vakuutusmaksutulo on eräs vakuutustoiminnan keskeisistä rahavirroista, joten vastauksen pohtiminen on tärkeää.

Kysymystä voidaan lähestyä esimerkiksi toivottavien ominaisuuksien kautta:

Vakuutuksenottajan toivomuksia

- vakuutusmaksun tulisi vastata kohtuudella odotettavissa olevia vahinkomääriä
- vakuutusmaksun tulisi olla suhteellisen vakaa vuodesta toiseen.

Vakuutusyhtiön toivomuksia

- vakuutusmaksujen tulisi olla riittävät toiminnan jatkamisen turvaamiseksi myös pitkällä tähtäimellä
- vakuutusmaksujen pitäisi olla kilpailukykyisiä.

Esitetyt toivomukset ovat osin ristiriitaisia, joten näiden välillä joudutaan tekemään kompromisseja.

Tariffit voidaan jakaa karkeasti kahteen pääluokkaan, ns. taulustotariffeihin ja yksilöllisiin tariffeihin. Jälkimmäisessä vakuutuksenottajan oma vahinkohistoria vaikuttaa vakuutusmaksuihin. Taulustotariffin määräämistä voidaan pitkälle pitää tilastotieteen sovelluksena. Yksilöllisessä tariffoinnissa myös stokastisten prosessien teoria on keskeisessä osassa.

Kurssilla luodaan katsaus tariffeihin liittyviin matemaattisiin tehtäviin. Hintatasoon vaikuttavat myös korvauksiin liittyvät omavastuut, joita tarkastellaan kurssin alussa. Materiaali on suunnattu lähinnä vahinkovakuutuksen tarpeisiin. Henki- ja eläkevakuutuksen erityispiirteitä ei tarkastella. Päälähteitä ovat

Van Eeghen, Greup, Nijssen (1983) Rate making. Surveys of actuarial studies number 2. Nationale-Nederlanden NV Research department, Amsterdam.

Sundt (1999) Introduction to non-life insurance mathematics. Verlag Versicherungswirtschaft GmbH, Karlsruhe.

Bühlmann, Gisler (2005) A course in credibility theory and its applications. Springer.

2. Korvausmäärien rajoittaminen

Olkoon X satunnaismuuttuja, joka kuvaa tarkasteltavaa kokonaisvahinkomäärää. Vakuutusmaksun mitoituksessa taso määräytyy yleensä odotusarvosta $\mathbb{E}(X)$, vaikkakin asiaan liittyy muitakin näkökohtia. Vakuutussopimus voidaan laatia sellaiseksi, että yhtiö korvaa vain osan kokonaisvahinkomäärästä, nimittäin summan Y, jolle

$$0 \leq Y \leq X. \tag{2.1}$$

Y määritellään sopimuksessa. Tämä alentaa odotusarvoa ja siis vakuutusmaksun perustasoa. Motiiveja korvausmäärän rajoittamiselle on useita. Ensinnäkin vakuutuksenottaja joutuu itse maksamaan määrän $X - Y$, mikä kannustaa vahinkojen vähentämiseen käytettävissä olevilla keinoilla. Usein myös yhtiön hallintokulut vähenevät tuntuvasti, jos esimerkiksi pieniä vahinkoja ei tarvitse käsitellä. Myös yhtiöllä on tarpeita asettaa rajoituksia esimerkiksi maksimaaliselle korvausmäärälle.

Tarkastellaan seuraavassa, millaiset kokonaisvahinkomäärän rajoitukset ovat perusteltuja utiliteettiteorian näkökulmasta. Olkoot a_0 ja A_0 vakuutuksenottajan ja vakuutusyhtiön alkupääomat ennen sopimuksen tekemistä sekä u ja U vastaavat utiliteettifunktiot. Nämä oletetaan kasvaviksi ja konkaaveiksi.

Olkoon Y sopimuksen mukainen korvausmäärä, joka toteuttaa ehdon (2.1). Tarkastellaan sellaista vaihtoehtoista järjestelyä, jossa korvataan määrä W, jolle myös

$$(2.1.1) \qquad 0 \leq W \leq X$$

ja lisäksi $\mathbb{E}(W) = \mathbb{E}(Y)$. Oletetaan, että vakuutusmaksu riippuu vain korvattavan määrän odotusarvosta, jolloin siis sopimuksen mukaiset Y ja W johtavat samaan maksuun. Olkoon tämä P.

<u>Lause 2.1.</u> Olkoon M sellainen, että

$$\mathbb{E}(\max(0, X - M)) = \mathbb{E}(Y).$$

Valitsemalla $W = \max(0, X - M)$ pätee

$$\mathbb{E}(u(a_0 - P - (X - W))) \geq \mathbb{E}(u(a_0 - P - (X - Y))).$$

Nähdään, että vakuutetun näkökulmasta sopiva sopimustyyppi vastaa SL-jälleenvakuutusta ts. utiliteetti maksimoituu tällä tavalla edellä esitettyjen rajoitusten puitteissa. Todettakoon, että lauseessa vaadittu M on aina olemassa, kts. riskiteoria (2013).

Lauseen 2.1 todistus. Olkoot F_1 ja F_2 järjestelyjä vastaavat kertymäfunktiot,

$$\begin{cases} F_1(x) = \mathbb{P}(\mathbb{X} - \mathbb{W} \leq x), \\ F_2(x) = \mathbb{P}(\mathbb{X} - \mathbb{Y} \leq x). \end{cases}$$

Selvästi $\mathbb{X} - \mathbb{W} = \min(\mathbb{X}, M)$. Jos siis $x < M$, niin

$$F_1(x) = \mathbb{P}(\mathbb{X} \leq x) \leq \mathbb{P}(\mathbb{X} - \mathbb{Y} \leq x) = F_2(x).$$

Jos taas $x \geq M$, niin

$$F_1(x) = 1 \geq F_2(x).$$

Koska kuvaus

$$x \longmapsto -u(a_0 - P - x), \quad x \in \mathbb{R},$$

on konveksi, niin

$$\mathbb{E}(-u(a_0 - P - (\mathbb{X} - \mathbb{W})))$$

$$\leq \mathbb{E}(-u(a_0 - P - (\mathbb{X} - \mathbb{Y}))),$$

kts. Riskiteoria (2013), lemma 7.4.2. $\square$

Yhtiön näkökulmasta W kannattaisi valita siten, että

$$\mathbb{E}(U(A_0 + P - W))$$

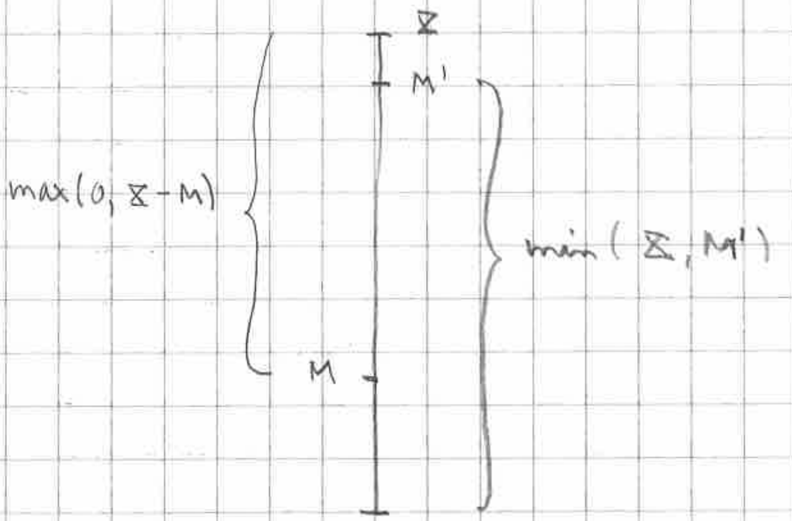
maksimoituu edellä esitetyissä puitteissa. Olkoon M' sellainen, että

$$\mathbb{E}(\min(X, M')) = \mathbb{E}(Y).$$

Optimaalinen valinta on

$$W = \min(X, M').$$

Perusteluja esitetään harjoituksissa.



Vakuutetun ja yhtiön optimiratkaisut ovat siis täysin erilaiset. Kumpikin haluaa vapautua suurilta menetyksiltä.

Käytännössä korvausten rajoitukset ovat usein vahinkokohtaisia, vaikka tämä ei edellä esitetyn nojalla olekaan optimaalista. Olkoon X yhdistetty muuttuja,

$$X = Z_1 + \dots + Z_K \quad (Z_1, Z_2, \dots \text{ i.i.d.}, \; Z_j \perp\!\!\!\perp K, \; \forall j).$$

Tarkastellaan muotoa

$$Y = r(Z_1) + \dots + r(Z_K)$$

olevia korvaussopimuksia. Pyritään määräämään optimaalinen <u>korvausfunktio</u> $r: [0, \infty) \to \infty$, jolle

(2.1.2) $$0 \le r(z) \le z, \quad \forall z \in \mathbb{R},$$

kun $\mathbb{E}(r(Z)) = m$ ja vakuutusmaksu P on kiinnitetty (Z on samoin jakautunut kuin $Z_1, Z_2, \dots$).

<u>Lause 2.2.</u> Olkoon M sellainen, että

$$\mathbb{E}(\max(0, Z - M)) = m$$

ja

$$g(z) = \max(0, z - M), \quad z \ge 0.$$

Silloin

$$\mathbb{E}\Big(u\Big(a_0 - P - \Big(X - \sum_{k=1}^{K} g(Z_k)\Big)\Big)\Big)$$

$$\ge \mathbb{E}\Big(u\Big(a_0 - P - \Big(X - \sum_{k=1}^{K} r(Z_k)\Big)\Big)\Big).$$

Tulos vastaa XL-tyyppistä jälleenvakuutusjärjestelyä vakuutetun näkökulmasta.

<u>Todistus.</u> Lauseen 2.1 nojalla

$$(2.2)\qquad \mathbb{E}\big(u(a_0 - P - (Z_1 - s(Z_1)))\big) \geq \mathbb{E}\big(u(a_0 - P - (Z_1 - r(Z_1)))\big).$$

Olkoon $S(z) = \mathbb{P}(Z \leq z)$, $z \in \mathbb{R}$. Silloin

$$(2.3)\qquad \mathbb{E}\big(u(a_0 - P - (Z_1 + Z_2 - s(Z_1) - s(Z_2)))\big) = \int_{z_1 \in \mathbb{R}} \mathbb{E}\big(u(a_0 - P - z_1 + s(z_1) - (Z_2 - s(Z_2)))\big)\, dS(z_1).$$

Tulos (2.2) pätee kaikilla alkupääomilla, joten (2.3) on vähintään

$$\int_{z_1 \in \mathbb{R}} \mathbb{E}\big(u(a_0 - P - z_1 + s(z_1) - (Z_2 - r(Z_2)))\big)\, dS(z_1)$$

$$= \mathbb{E}\big(u(a_0 - P - Z_1 + s(Z_1) - (Z_2 - r(Z_2)))\big)$$

$$= \int_{z_2 \in \mathbb{R}} \mathbb{E}\big(u(a_0 - P - z_2 + r(z_2) - (Z_1 - s(Z_1)))\big)\, dS(z_2).$$

Samoin Lauseen 2.1 nojalla tämä on vähintään

$$\int_{z_2 \in \mathbb{R}} \mathbb{E}\big(u(a_0 - P - (z_2 - r(z_2)) - (Z_1 - r(Z_1)))\big)\, dS(z_2)$$

$$= \mathbb{E}\Big(u\Big(a_0 - P - \sum_{k=1}^{2} (Z_k - r(Z_k))\Big)\Big).$$

Induktiivisesti nähdään, että

$$\mathbb{E}\left(u\left(a_0 - P - \sum_{k=1}^{n} (Z_k - \varrho(Z_k))\right)\right)$$

$$\geq \mathbb{E}\left(u\left(a_0 - P - \sum_{k=1}^{n} (Z_k - r(Z_k))\right)\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

joten

$$\mathbb{E}\left(u\left(a_0 - P - \sum_{k=1}^{K} (Z_k - \varrho(Z_k))\right)\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(K=n)\, \mathbb{E}\left(u\left(a_0 - P - \sum_{k=1}^{n} (Z_k - \varrho(Z_k))\right)\right)$$

$$\geq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(K=n)\, \mathbb{E}\left(u\left(a_0 - P - \sum_{k=1}^{n} (Z_k - r(Z_k))\right)\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(u\left(a_0 - P - \sum_{k=1}^{K} (Z_k - r(Z_k))\right)\right). \quad \square$$

2.1. Tasapainoteorian näkökulma hinnoitteluun

Aiemmin on oletettu, että vakuutusmaksu riippuu vain tarkasteltavan kokonaisvahinkomäärän odotusarvosta. Tavallista kuitenkin on, että se riippuu muistakin ominaisuuksista, esimerkiksi varianssista. Seuraavassa tarkasteltava tasapainoteoria antaa mahdollisuuden tällaisiin laajennuksiin.

Olkoon markkinoilla vakuutetut $1, \dots, N$. Vakuutettua n kuvataan kokonaisvahinkomäärällä X_n ja utiliteettifunktiolla u_n. Oletetaan, että $X_1, \dots, X_N$ ovat riippumattomia. Yhtiön utiliteettifunktio olkoon U. Oletetaan $u_1, \dots, u_N$ ja U aidosti kasvaviksi ja aidosti konkaaveiksi derivoituviksi funktioiksi.

Kokonaisvahinkomäärän Y vakuutusmaksu määrätään positiivisen satunnaismuuttujan ϕ avulla, jota kutsutaan jatkossa hinnoittelijaksi. Hinta $H(Y)$ on

$$H(Y) = \mathbb{E}(\phi Y).$$

Tässä siis ϕ on sama kaikille vakuutetuille. Päädytään lineaariseen hinnoitteluun, sillä

$$H(\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2) = \alpha_1 H(Y_1) + \alpha_2 H(Y_2),$$

$\forall\, Y_1, Y_2,\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Tätä voidaan motivoida seuraavasti. Jos olisi esimerkiksi

$$H(Y_1 + Y_2) > H(Y_1) + H(Y_2),$$

olisi edullisempaa vakuuttaa Y_1 ja Y_2 erikseen, vaikka summan $Y_1 + Y_2$ vakuuttaminen johtaa täsmälleen samaan korvausmäärään.

Oletetaan koko luvussa 2.1, että $\phi, X_1, \dots, X_N \in L^2$.

Borel-mitallinen funktio $r : [0,\infty) \to [0,\infty)$ on <u>korvausfunktio</u>, jos

(2.5) $$0 \le r(x) \le x, \quad \forall x \ge 0.$$

Vrt. (2.1.1) ja (2.1.2). Seuraavassa yhtiö ja vakuutetut sopivat korvausfunktioista $r_1, \ldots, r_N$. Yhtiö korvaa vakuutetulle n määrän $r_n(X_n)$. Jos ϕ on markkinoiden hinnoittelija, niin vakuutusmaksu P_n on

$$P_n = \mathbb{E}(\phi\, r_n(X_n)).$$

Merkitään lyhyesti $r = (r_1, \ldots, r_N)$. Olkoon $\mathcal{S}$ kaikkien korvausfunktioiden joukko ja

$$J_0(r) = \mathbb{E}\Big(U\big(A_0 + \sum_{n=1}^{N} (P_n - r_n(X_n))\big)\Big),$$

$$J_n(r) = \mathbb{E}\big(u_n(a_n - P_n - X_n + r_n(X_n))\big), \quad n = 1, \ldots, N,$$

missä A_0 tulkitaan yhtiön ja a_n vakuutetun n alkupääomaksi.

<u>Määritelmä 2.1.</u> Systeemi $(\phi, \bar r) = (\phi, \bar r_1, \ldots, \bar r_N)$ on <u>tasapainotila</u>, jos $\bar r_1, \ldots, \bar r_N \in \mathcal{S}$ ja

$$J_s(\bar r) = \max\{J_s(r) ;\, r_1, \ldots, r_N \in \mathcal{S}\}, \quad s = 0, 1, \ldots, N.$$

Tasapainotilassa siis yhtiö ja vakuutetut valitsevat saman korvausfunktion. Jos ϕ on annettu, ei tasapainotilaa välttämättä löydy. Kiinnostuksen kohteena korvausfunktioiden lisäksi onkin se, millaiset hinnoittelijat mahdollistavat tasapainon.

Rajoitetaan seuraavassa tarkastelut suppeampaan sigma-algebraan, jossa $X_1, \dots, X_N$ ovat mitallisia. Todennäköisyyskenttä olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, missä siis

$$\mathcal{F} = \mathcal{B}(X_1, \dots, X_N).$$

Kaikki satunnaismuuttujat ovat tällöin muotoa

$$f(X_1, \dots, X_N),$$

missä $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ on Borel-mitallinen. Erityisesti tämä pätee hinnoittelijalle ϕ. Oletetaan lisäksi, että $\mathbb{E}(\phi) = 1$. Tämä on luonnollista, sillä vakion hinta on tällöin vakio itse.

Olkoon ϕ hinnoittelija. Tällöin $\mathbb{E}(\phi \mid X_n)$ on muotoa

$$\mathbb{E}(\phi \mid X_n) = \psi_n(X_n),$$

missä $\psi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on Borel-mitallinen. Lisäksi

$$P_n = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\phi\, r_n(X_n) \mid X_n))$$

$$= \mathbb{E}(\psi_n(X_n)\, r_n(X_n)).$$

Selvästi

$$\mathbb{E}(\psi_n(X_n)) = 1, \quad \forall n.$$

Olkoon

$$\phi' = \psi_1(X_1) \cdots \psi_N(X_N).$$

Riippumattomuuden nojalla

$$\mathbb{E}(\emptyset' r_n(\underline{X}_n)) = \mathbb{E}(\psi_n(\underline{X}_n) r_n(\underline{X}_n)) \prod_{m \neq n} \mathbb{E}(\psi_m(\underline{X}_m))$$

$$= \mathbb{E}(\psi_n(\underline{X}_n) r_n(\underline{X}_n)) = P_n .$$

Tasapainotilojen löytämiseksi riittää siis tarkastella muotoa

$$(2.6) \qquad \emptyset = \psi_1(\underline{X}_1) \cdots \psi_N(\underline{X}_N)$$

olevia hinnoittelijoita. Selvää on, että $\psi_n(\underline{X}_n) > 0$ m.v.

Esitetään välttämättömät ja riittävät ehdot tasapainotilalle. Todistuksessa hyödynnetään seuraavaa Neyman – Pearsonin lemman tyyppistä tulosta.

<u>Lemma 2.1.</u> Olkoon $\underline{X}$ ei-negatiivinen satunnaismuuttuja ja $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mitallinen kuvaus. Oletetaan, että $\underline{X}$ ja $\underline{X} f(\underline{X})$ ovat integroituvia. Silloin

$$\max_{r \in \mathcal{S}} \mathbb{E}(r(\underline{X}) f(\underline{X})) = \mathbb{E}(\bar{r}(\underline{X}) f(\underline{X})),$$

jos ja vain jos

$$\bar{r}(\underline{X}) 1(f(\underline{X}) > 0) = \underline{X} 1(f(\underline{X}) > 0) \quad \text{m.v.}$$

ja

$$\bar{r}(\underline{X}) 1(f(\underline{X}) < 0) = 0 \quad \text{m.v.}$$

Oleellisesti ottaen siis

$$\bar{r}(x) = \begin{cases} x & \text{joukossa } f(x) > 0 \\ 0 & \text{joukossa } f(x) < 0 \end{cases}$$

Jos $F_1, \ldots, F_N \in \mathcal{S}$ ja ϕ on hinnoittelija, merkitään lyhyesti

$$B_0 = B_0(\phi, F_1, \ldots, F_N) = A_0 + \sum_{n=1}^{N} (P_n - F_n(\underline{X}_n))$$

ja

$$B_n = B_n(\phi, F_1, \ldots, F_N) = a_n - P_n - \underline{X}_n + F_n(\underline{X}_n), \quad n = 1, \ldots, N.$$

Lause 2.4. Olkoon hinnoittelija ϕ muotoa (2.6) ja $\bar{F} = (F_1, \ldots, F_N) \in \mathcal{S}$. Silloin $(\phi, \bar{F})$ on tasapainotila, jos ja vain jos

(2.8) $$\mathbb{E}(U'(B_0) \mid \underline{X}_n) = \psi_n(\underline{X}_n)\mathbb{E}(U'(B_0)) \quad \text{m.v.}$$

ja

(2.9) $$u_n'(B_n) = \psi_n(\underline{X}_n)\mathbb{E}(u_n'(B_n)) \quad \text{m.v.}$$

kaikilla $n = 1, \ldots, N$.

<u>Todistus.</u> Oletetaan, että $(\emptyset, \bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_N)$ on tasapainotila. On osoitettava, että (2.8) ja (2.9) toteutuvat.

Olkoot $r_1, \ldots, r_N \in \mathcal{S}$ kiinteitä ja $\lambda \in [0,1]$. Tällöin

$$\tilde{r}_n(\lambda) := \bar{r}_n + \lambda(r_n - \bar{r}_n) \in \mathcal{S}, \quad \forall n.$$

Merkitään

$$K_n(\lambda) = J_n(\tilde{r}(\lambda)), \quad n = 0, 1, \ldots, N,$$

missä $\tilde{r}(\lambda) = (\tilde{r}_1(\lambda), \ldots, \tilde{r}_N(\lambda))$. Oletuksen nojalla

$$K_n(0) = \max\{K_n(\lambda) ; \lambda \in [0,1]\}, \quad \forall n.$$

Siispä

$$(2.9.1) \qquad K_n'(0) \le 0, \quad \forall n,$$

joten

$$K_0'(0) = \sum_{n=1}^{N} \Big[-\mathbb{E}\big(U'(B_0)(r_n(X_n) - \bar{r}_n(X_n))\big) + \mathbb{E}(U'(B_0))\,\mathbb{E}\big(\psi_n(X_n)(r_n(X_n) - \bar{r}_n(X_n))\big) \Big]$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}\Big(\big[-\mathbb{E}(U'(B_0) \mid X_n) + \psi_n(X_n)\mathbb{E}(U'(B_0)) \big] (r_n(X_n) - \bar{r}_n(X_n)) \Big)$$

$$\le 0.$$

Valitsemalla $r_m = \bar{r}_m$, $\forall m \neq n$, saadaan

$$\mathbb{E}\Big(\Big[-\mathbb{E}(U'(B_0) \mid \bar{X}_n) + \psi_n(\bar{X}_n)\mathbb{E}(U'(B_0))\Big](r_n(\bar{X}_n) - \bar{r}_n(\bar{X}_n))\Big) \leq 0.$$

Vastaavasti vakuutetuille saadaan

$$k_n'(0) = \mathbb{E}\Big(\Big[u_n'(B_n) - \psi_n(\bar{X}_n)\mathbb{E}(u_n'(B_n))\Big](r_n(\bar{X}_n) - \bar{r}_n(\bar{X}_n))\Big) \leq 0,$$

$n = 1, \ldots, N$. Merkitään

$$Q_n(x) = \frac{\mathbb{E}(U'(B_0) \mid \bar{X}_n = x)}{\mathbb{E}(U'(B_0))}$$

ja

$$q_n(x) = \frac{\mathbb{E}(u_n'(B_n) \mid \bar{X}_n = x)}{\mathbb{E}(u_n'(B_n))},$$

$\forall x \geq 0$, $n = 1, \ldots, N$. Saadut tulokset voidaan esittää muodossa

$$\mathbb{E}(U'(B_0))\,\mathbb{E}\Big(\big(-Q_n(\bar{X}_n) + \psi_n(\bar{X}_n)\big)(r_n(\bar{X}_n) - \bar{r}_n(\bar{X}_n))\Big) \leq 0$$

ja

$$\mathbb{E}(u_n'(B_n))\,\mathbb{E}\Big(\big(q_n(\bar{X}_n) - \psi_n(\bar{X}_n)\big)(r_n(\bar{X}_n) - \bar{r}_n(\bar{X}_n))\Big) \leq 0, \quad \forall n.$$

Tulokset pätevät kaikille kuvausfunktioille, joten lemman 2.1 nojalla yleisyyttä rajoittamatta voidaan olettaa, että

$$(2.10)\qquad F_n(\Xi_n) = \begin{cases} \Xi_n & \text{joukossa} \quad -Q_n(\Xi_n) + \Psi_n(\Xi_n) > 0 \\ 0 & \text{joukossa} \quad -Q_n(\Xi_n) + \Psi_n(\Xi_n) < 0. \end{cases}$$

Vastaavasti valemuteltujen ehdoista seuraa

$$(2.11)\qquad F_n(\Xi_n) = \begin{cases} \Xi_n & \text{joukossa} \quad q_n(\Xi_n) - \Psi_n(\Xi_n) > 0 \\ 0 & \text{joukossa} \quad q_n(\Xi_n) - \Psi_n(\Xi_n) < 0. \end{cases}$$

Ilmeisesti riippumattomuuden nojalla

$$\mathbb{E}(u_n'(B_n) \mid \Xi_n = x) = u_n'(a_n - P_n - x + F_n(x)), \quad n = 1, \dots, N, \text{ m.v.}$$

ja

$$\mathbb{E}(U'(B_0) \mid \Xi_n = x)$$

$$= \mathbb{E}\Big(U'\big(A_0 + P_n - F_n(x) + \sum_{m \neq n} (P_m - F_m(\Xi_m))\big)\Big) \quad \text{m.v.}$$

Nähdään, että

$$Q_n(x) = h_n(-F_n(x)) \quad \text{ja} \quad q_n(x) = v_n(-x + F_n(x)),$$

missä h_n ja v_n ovat aidosti vähenevä funktioita. Todetaan vielä, että

$$(2.12)\qquad \mathbb{E}(Q_n(\Xi_n)) = \mathbb{E}(q_n(\Xi_n)) = \mathbb{E}(\Psi_n(\Xi_n)) = 1.$$

Osoitetaan seuraavaksi, että

(2.13) $$\mathbb{P}(Q_n(\bar{X}_n) = q_n(\bar{X}_n)) = 1.$$

Merkitään

$$C_n = \{q_n(\bar{X}_n) > Q_n(\bar{X}_n)\}$$

ja

$$D_n = \{q_n(\bar{X}_n) < Q_n(\bar{X}_n)\}.$$

Oletetaan, että olisi $\mathbb{P}(C_n) > 0$. Yhtälön (2.12) nojalla myös $\mathbb{P}(D_n) > 0$. Tällöin

(2.14) $$\bar{r}_n(\bar{X}_n) = \bar{X}_n \text{ joukossa } C_n$$

ja

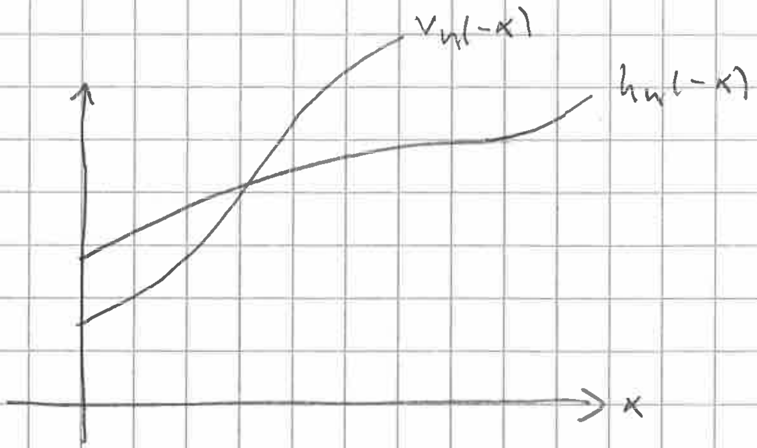
(2.15) $$\bar{r}_n(\bar{X}_n) = 0 \text{ joukossa } D_n.$$

Koska $\mathbb{P}(C_n) > 0$ ja $\mathbb{P}(D_n) > 0$, määräytyvät $h_n(0)$ ja $v_n(0)$ yksikäsitteisesti. Lisäksi

$$q_n(\bar{X}_n) = v_n(0) \text{ ja } Q_n(\bar{X}_n) = h_n(-\bar{X}_n) \text{ joukossa } C_n$$

ja

$$q_n(\bar{X}_n) = v_n(-\bar{X}_n) \text{ ja } Q_n(\bar{X}_n) = h_n(0) \text{ joukossa } D_n.$$



Joukossa C_n on

$$Q_n(\bar{X}_n) = h_n(-\bar{X}_n) < q_n(\bar{X}_n) = v_n(0)$$

ja joukossa D_n

$$q_n(\bar{X}_n) = v_n(-\bar{X}_n) < Q_n(\bar{X}_n) = h_n(0).$$

Funktioiden h_n ja v_n monotonisuuden nojalla

$$\mathbb{P}(C_n) = 0 \quad \text{tai} \quad \mathbb{P}(D_n) = 0.$$

Saatiin ristiriita, joten (2.13) on tosi.

Osoitetaan seuraavaksi, että

$$\Psi_n(\bar{X}_n) = q_n(\bar{X}_n) \quad (= Q_n(\bar{X}_n)) \quad \text{m.v.}$$

Jos $\psi_n(\bar{X}_n) < q_n(\bar{X}_n)$, niin tulosten (2.10) ja (2.11) nojalla

$$\bar{h}_n(\bar{X}_n) = 0 = \bar{X}_n.$$

Samoin $\bar{X}_n = 0$, jos $\psi_n(\bar{X}_n) > q_n(\bar{X}_n)$. Toisaalta yhtälön (2.12) nojalla

$$1 = \mathbb{E}(q_n(\bar{X}_n)) = \mathbb{E}(q_n(\bar{X}_n)\mathbb{1}(\bar{X}_n > 0)) + q_n(0)\mathbb{P}(\bar{X}_n = 0)$$

ja

$$1 = \mathbb{E}(\psi_n(\bar{X}_n)) = \mathbb{E}(\psi_n(\bar{X}_n)\mathbb{1}(\bar{X}_n > 0)) + \psi_n(0)\mathbb{P}(\bar{X}_n = 0)$$

$$= \mathbb{E}(q_n(\bar{X}_n)\mathbb{1}(\bar{X}_n > 0)) + \psi_n(0)\mathbb{P}(\bar{X}_n = 0).$$

Nähdään, että $\psi_n(0) = q_n(0)$ (ainakin, jos $\mathbb{P}(\bar{X}_n = 0) > 0$, muuten asialla ei ole merkitystä). Yhdistämällä tulokset saadaan

$$\Psi_n(\bar{x}_n) = Q_n(\bar{x}_n) = q_n(\bar{x}_n) \quad \text{m.v.}$$

Siis (2.8) ja (2.9) toteutuvat.

Oletetaan nyt (2.8) ja (2.9). On osoitettava, että $(\phi, \bar{r})$ on tasapainotila, missä ϕ on kaavan (2.6) mukainen. Olkoot $r_1, \dots, r_N \in \hat{S}$ mielivaltaisia. Epäyhtälöt (2.9.1) toteutuvat (jopa yhtälöinä). Funktiot

$$\lambda \longmapsto K_n(\lambda), \quad \lambda \in [0,1], \quad n = 0, 1, \dots, N$$

ovat konkaaveja, joten $K_n(1) \leq K_n(0)$. Siis

$$J_n(r) \leq J_n(\bar{r}), \quad \forall n. \qquad \square$$

Esimerkki 2.1. Olkoot utiliteettifunktiot kvadraattisia,

$$U(x) = -\frac{1}{2}x^2 + b_0 x$$

ja

$$u_n(x) = -\frac{1}{2}x^2 + b_n x \quad , \quad n = 1, \dots, N .$$

Oletetaan, että kokonaisvahinkomäärät ovat rajoitettuja ja parametrit $b_0, b_1, \dots, b_N$ niittävän suuria, että utiliteettifunktiot ovat kasvavia kiinnostavalla alueella.

Merkitään

$$c_0 = b_0 - A_0 - \sum_{n=1}^{N} (P_n - \mathbb{E}(\bar{r}_n(X_n)))$$

ja

$$c_n = b_n - a_n + P_n + \mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(\bar{r}_n(X_n)), \quad n = 1, \dots, N,$$

missä $\bar{r}_n$ ja P_n ovat tasapainotilan korvausfunktio ja vakuutusmaksu.

Ehto (2.8) antaa

$$(2.17) \qquad c_0 + \bar{r}_n(X_n) - \mathbb{E}(\bar{r}_n(X_n)) = c_0 \psi_n(X_n)$$

ja ehto (2.9)

$$(2.18) \qquad c_n + X_n - \mathbb{E}(X_n) - (\bar{r}_n(X_n) - \mathbb{E}(\bar{r}_n(X_n))) = c_n \psi_n(X_n).$$

Sijoittamalla ensimmäisen yhtälön $F_n(Z_n) - \mathbb{E}(F_n(Z_n))$ jälkimmäiseen saadaan

$$\psi_n(Z_n) = 1 + \frac{Z_n - \mathbb{E}(Z_n)}{c_0 + c_n}.$$

Edelleen nähdään, että

$$F_n(Z_n) = \gamma_n Z_n + \varepsilon_n,$$

missä γ_n ja ε_n ovat vakioita. Oletetaan, että $\mathbb{P}(Z_n = 0) > 0$. Silloin $\varepsilon_n = 0$ ja $\gamma_n \in [0,1]$ (muuten F_n ei ole korvausfunktio). Ehdon (2.17) nojalla

$$\gamma_n = \frac{c_0}{c_0 + c_n}.$$

Tasapainohinnaksi saadaan

$$\begin{aligned} P_n &= \mathbb{E}(\psi_n(Z_n) F(Z_n)) \\ &= \gamma_n \left[\mathbb{E}(Z_n) + \frac{\operatorname{Var} Z_n}{c_0 + c_n} \right] \\ &= \mathbb{E}(F(Z_n)) + c_0^{-1} \operatorname{Var}(F(Z_n)). \end{aligned}$$

Maksuun sisältyy vakuutettavan kokonaisvahinkomäärän varianssiin verrannollinen varmuuslisä. Tätä kutsutaan varianssiperiaatteeksi.

Lähde: Golubin, A.Y. (2008) Pareto optimality and equilibrium in an insurance market. Astin Bulletin 38, 441–459.