FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI

Helsingin Yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Luennot, kevät 2012

Kari Astala

Luentomuistiinpanot perustuvat aikaisempiin versioihin vuodelta 2006 (Kari Astala ja Petteri Piiroinen) sekä 2008 ja 2010 (Hans-Olav Tylli).

Sopivaa oheis- ja lisälukemistoa tarjoavat esimerkiksi seuraavat oppikirjat:

* B. Bollobás, *Linear Analysis.* Cambridge Univ. Press, 1999.
  (ytimekäs yleiskirja)

* D. Werner, *Funktionalanalysis.* Springer. (hyvä yleiskirja, saksankielinen)

* W. Rudin, *Real and Complex Analysis* (3. painos). McGraw-Hill, 1987.
  (luvut 3-5, ei kata koko kurssia; lisäksi reaali- ja kompleksianalyysia)

* A. Friedman, *Foundations of Modern Analysis.* Dover, 1982.
  (edullinen ja tiivis yleiskirja, myös mittateoriaa ja reaalianalyysia)

* W. Rudin, *Functional Analysis.* McGraw-Hill, 1991.
  (erilainen sisältö ja rakenne, laaja yleiskirja)

* J. Conway, *A Course in Functional Analysis.* Springer, 1990. (yleiskirja)

* I. J. Maddox, *Elements of Functional analysis.* Cambridge Univ. Press, 1977 (perusteellinen, mutta vanhempi yleiskirja)

Sisältö

0. Johdanto

Funktionaalianalyysissa tutkitaan muun muassa

- ääretönulotteisten vektoriavaruuksien, ja erityisesti täydellisten normiavaruuksien eli Banach avaruuksien ominaisuuksia (joskus myös yleisempien topologisten vektoriavaruuksien ominaisuuksia).
- näiden välisten jatkuvien lineaaristen (tai epälineaaristen) kuvausten ominaisuuksia.
- edellisten kohtien monia eri sovelluksia.

Yritämme seuraavan valmistelevan esimerkin kautta selvittää, miksi tällaisia kysymyksiä tutkitaan ja millaisia sovelluksia funktionaalianalyysillä tyypillisesti on (tarkempiin yksityiskohtiin palataan kurssin aikana).

0.1. **Esimerkki.** Tarkastellaan integraaliyhtälöä

$$f(x) - \lambda \int_0^1 K(x,s)f(s)ds = g(x), \quad x \in [0,1], \tag{0.2}$$

missä $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ ja $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ ovat annettuja jatkuvia kuvauksia, sekä $\lambda \in \mathbb{R}$ on parametri. Tehtävänä on löytää funktio f, jolle yhtälö (0.2) pätee.

Käy ilmi että

i) jos parametri $|\lambda|$ on pieni, yhtälön ratkaisufunktio f on olemassa ja yksikäsitteinen; toisaalta

ii) kaikilla parametrin arvoilla $|\lambda|$ näin ei välttämättä ole; herää siis kysymys, mitä voidaan sanoa näistä poikkeuksellisista parametreista.

Tällaisiin kysymyksiin päädytään esimerkiksi monissa fysiikan ongelmissä, vaikkapa viulun kielen ominaisvärähtelyjä määrättäessä. Itse asiassa, yksi matemaattisen fysiikan keskeisistä kysymyksistä 1900–luvun taitteessa oli selittää miksi ominaisvärähtelyjen joukko (so. poikkeusparametrien joukko) on diskreetti; kysymys palautui differentiaaliyhtälöiden kautta tyyppiä (0.2) oleviin yhtälöihin.

Huomaa, että funktio $K(x,s)$ voi olla hyvinkin monimutkainen, eikä yhtälön suora integrointi, tavalla tai toisella, voi tulla kysymykseen; korkeintaan voimme hakea numeerisia ratkaisuja, kunhan yhtälöt kunnolla ymmärretään. Miten yhtälöitä (0.2) voisi silloin lähestyä ?

Tilanteen selvittämistä varten identifioidaan ensin (mahdollisten) ratkaisujen avaruus; luonnollinen arvaus on seuraava vektoriavaruus, joka esiintyy jo Analyysi I:ssä,

$$C(0,1) = \{\ f : [0,1] \to \mathbb{R} :\ f \text{ jatkuva välillä } [0,1]\ \}.$$

Avaruuteen liittyy luonnollinen "etäisyyden" mitta, eli normi (tästä myöhemmin paljon lisää):

$$\| f \|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|, \quad f \in C(0,1).$$

Pari $(\ C(0,1), \|\cdot\|_\infty)$ tulee olemaan tyypillinen esimerkki *Banachin avaruudesta*.

Yhtälöön (0.2) liittyy operaattori (kuvaus)

$$T : C(0,1) \to C(0,1), \quad (Tf)(x) = \int_0^1 K(x,s) f(s) ds, \quad x \in [0,1].$$

Huomataan, että tämä kuvaus on avaruuden $C(0,1)$ luonnollisen yhteenlaskun suhteen *lineaarinen*, so.

$$T(\lambda_1 f + \lambda_2 g) = \lambda_1 T(f) + \lambda_2 T(g) \quad \forall\ f,g \in C(0,1),\ \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Havaitaan, että yhtälö (0.2) voidaan kirjoittaa operaattoriyhtälömuotoon

$$(I - \lambda T)(f) = f - \lambda\, T(f) = g,$$

missä I on avaruuden $C(0,1)$ identtinen kuvaus. Kysymys on siis siitä, onko lineaarinen operaattori $I - \lambda T$ kääntyvä (bijektio) kuvauksena $C(0,1) \to C(0,1)$! Integraaliyhtälömme (0.2) on nyt muuttunut lineaarisen operaattorin ominaisarvotehtäväksi, ja ratkaisua varten meidän tulee kehittää "lineaarialgebrallisia" menetelmiä vektoriavaruuksissa kuten $C(0,1)$.

Nopeasti havaitaan kuitenkin selvä pulma: vektoriavaruus $C(0,1)$ on *ääretönulotteinen* ! (Polynomien perusominaisuuksista seuraa, että monomien muodostama joukko $\{t^n : n = 0,1,2,\ldots\}$ on vapaa.) Ei siis ole ollenkaan selvää mitkä/millä ehdoin lineaarialgebran tulokset yleistyvät näihin uusiin avaruuksiin. Tai mitä operaattoreilta vaaditaan, että lineaarialgebran ominaisarvotehtävät yleistyvät näihin ääretönulotteisiin tilanteisiin.

Funktionaalianalyysi pyrkii vastaamaan tämän tyyppisiin kysymyksiin, kehittämään ääretönulotteisten avaruuksien teoriaa silmälläpitäen esim. yllä kuvatun kaltaisia sovelluskohteita. Tällä kurssilla selvitämme Banach avaruuksien perusominaisuudet, keskeisimmät esimerkit (funktio- yms.)avaruuksista sekä myös Banach avaruuksien operaattoreiden perusominaisuudet. Pyrimme myös antamaan esimerkkejä teorian sovelluksista, ja tulemme mm. osoittamaan yo.

väitteen i); jos aika riittää kurssin loppupuolella voidaan myös tarkastella kysymystä ii).

Sana "funktionaali" tarkoitti alunperin (noin 1880 – 1910) sellaista jatkuvaa kuvausta, jonka määrittelyjoukko on jokin "funktioavaruus"; tyypillisesti

$$\varphi\colon C(0,1) \to \mathbb{R}, \quad \varphi(f) = \int_0^1 f(s)\,\mathrm{d}s, \quad \text{tai}$$

$$\phi\colon C(0,1) \to \mathbb{R}, \quad \phi(f) = \int_0^1 f(s)^2\,\mathrm{d}s \qquad \text{(epälineaarinen funktionaali).}$$

Nyttemmin termin käyttö on hieman muuttunut, kuten myöhemmin huomaamme.

Funktionaalianalyysin *sovellusaloja* ovat muun muassa

- (muu) klassinen analyysi (reaali- ja kompleksianalyysi, harmoninen analyysi)
- differentiaali-, osittaisdifferentiaali- ja integraaliyhtälöt (DY,ODY, IY)
- matemaattinen fysiikka (kvanttimekaniikka, . . .)
- optimointi
- variaatiolaskenta ja approksimaatioteoria
- dynaamiset systeemit
- numeerisen analyysin teoria
- tn-teoria ja stokastiikka

$\vdots$

Kääntäen, analyysi ja sen sovellukset synnyttävät jatkuvasti uusia funktionaalianalyysin tutkimuksia.

1. Metriikka ja metrinen avaruus

Funktionaalianalyysin peruskurssin taustalla on metristen avaruuksien peruskäsitteet (avoimet joukot, pistejonon suppeneminen, kuvauksen jatkuvuus yms.). Aluksi palautamme lyhyesti mieliin joitakin yleisiä asioita.

1.1. **Määritelmä.** Olkoon $X \neq \emptyset$ joukko. Kuvaus $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ on *metriikka* X:ssä, jos

(M1) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ kaikilla $x, y, z \in X$ (”*kolmioepäyhtälö*”)

(M2) $d(y,x) = d(x,y)$ kaikilla $x, y \in X$

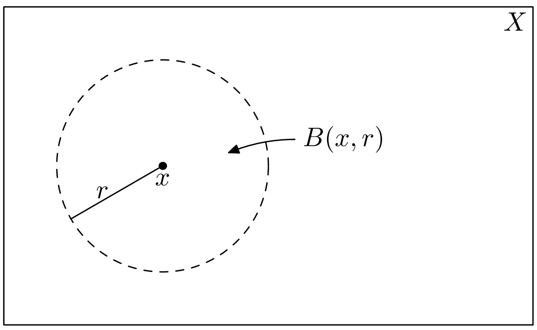
(M3) $d(x,y) = 0 \iff x = y$ (*Huom:* $d(x,y) \geq 0$ kaikilla $x, y \in X$.)

Sanomme, että (X,d) eli joukko X varustettuna metriikalla d, on *metrinen avaruus* (yleensä jätetään d merkitsemättä, jos se selviää yhteydestä).

Merkintöjä: Olkoon (X,d) metrinen avaruus, $x \in X$, $r > 0$:

$B(x,r) = \{\ y \in X : \ d(x,y) < r\ \}$ *avoin* x-keskinen, r-säteinen pallo

$\overline{B}(x,r) = \{\ y \in X : \ d(x,y) \leq r\ \}$ *suljettu* x-keskinen, r-säteinen pallo.



Kuva 1. Avoin pallo $B(x,r)$ metrisessä avaruudessa (X,d)

Oletamme, että lukija on tutustunut metristen avaruuksien perusteisiin (vrt. esim. [Väisälä : Topologia I]). Lukijan tulisi kerrata, mitä metrisissä avaruuksissa tarkoittavat käsitteet avoin joukko, suljettu joukko ja kompakti joukko; samoin mitä tarkoitetaan ympäristöllä, ympäristökannalla, aliavaruudella, suppenevalla pistejonolla, jatkuvalla kuvauksella,..... Muistamisen helpottamiseksi listaamme alla lyhyesti eräitä näistä käsitteistä.

Olkoon (X,d) metrinen avaruus:

– avoimet ja suljetut joukot: joukko $A \subset X$ on *avoin*, jos jokaista $a \in A$ vastaa sellainen $r = r(a) > 0$, että avoin pallo
$$B(a,r) \subset A.$$
$A \subset X$ on *suljettu*, jos komplementti
$$A^c = \{\, x \in X :\ x \notin A \,\} \text{ on avoin.}$$
– metriikan indusoima *topologia* on joukkoperhe
$$\tau_d = \{\, A \subset X :\ A \text{ on avoin } \ X\text{:ssä } \,\}.$$
– ympäristökanta, relatiivitopologia

– jonon raja-arvo ja suppeneminen: jono $(x_n) \subset X$ *suppenee* kohti $x \in X$, jos
$$d(x_n,x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$
Siis jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että $d(x_n,x) < \varepsilon$ kaikilla $n \geq n_\varepsilon$. Merkintä:
$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \text{ tai } \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$
– jatkuva kuvaus : Olkoot (X,d) ja (Y,d') metrisiä avaruuksia. Kuvaus $f\colon X \to Y$ on *jatkuva* pisteessä $a \in X$, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen $\delta = \delta(a,\varepsilon) > 0$, että
$$d'(f(a),f(y)) < \varepsilon \quad \text{aina kun } d(a,y) < \delta \text{ (ja } y \in X).$$
f on *jatkuva X:ssä* jos f on jatkuva jokaisessa pisteessä $a \in X$.

– kompakti joukko (Heine-Borelin lause, ...)

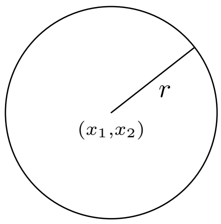
1.2. **Esimerkki.** $\mathbb{R}^n$ varustettuna euklidisella metriikalla

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2} = \sqrt{|x_1-y_1|^2 + \cdots + |x_n-y_n|^2}, \tag{1.3}$$

kun $x = (x_1,\ldots,x_n), y = (y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n$. (Erikoistapaus $n = 1 :\ d(x,y) = |x-y|,\ x,y \in \mathbb{R}$).

Kuvaus d on metriikka: Topo I, Vektorianalyysi (tai myöhemmin luvussa 2 avaruuden ℓ^p yhteydessä). Kolmioepäyhtälö on tässä tapauksessa (epä-triviaali) arvio
$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j - z_j|^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |y_j - z_j|^2}$$
kaikilla $(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n),(z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{R}^n$.

Tapauksessa $n = 2$ ja $x = (x_1, x_2)$, siis piste $y = (y_1, y_2) \in B\big(x, r\big)$ jos ja vain jos $(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 < r^2$.



Kuva 2. Avoin tason $\mathbb{R}^2$ pallo $B((x_1, x_2), r)$

Huomautus. Vastaavasti, kun $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ja $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$, kaava (1.3) määrittelee metriikan avaruuteen $\mathbb{C}^n$.

Seuraavan käsitteen avulla voimme mitata ääretönulotteisen avaruuden "suuruutta". Sanomme, että metrinen avaruus (X, d) on *separoituva*, jos on olemassa sellainen numeroituva osajoukko $A \subset X$, että joukon A sulkeuma $\bar{A} = X$. Sanomme tällöin myös, että A on *tiheä* X:ssä.

Palautetaan mieliin, että sulkeuma määritellään metriikan d avulla seuraavasti: jos $A \subset X$, niin piste $x \in \bar{A}$ jos jokaisella $r > 0$ pätee $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$. Erityisesti:

$$x \in \bar{A} \iff \text{on olemassa sellainen pistejono } (a_n) \subset A, \text{ että } d(a_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Tiheysehto $\bar{A} = X$ tarkoittaa siis: jos $y \in X$ ja $\varepsilon > 0$ ovat mielivaltaisia, niin on olemassa sellainen alkio $a \in A$, että $d(a, y) < \varepsilon$.

1.4. **Esimerkki.** $(\mathbb{R}^n, d)$ on separoituva, kun d on euklidinen etäisyys ja $n = 1, 2, \ldots$.

Todistus. Analyysi I:n nojalla tiedämme, että $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, missä $\mathbb{Q}$ on rationaalilukujen joukko. Jos $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ja $\varepsilon > 0$ on annettuja, niin valitaan jokaisella $j \in \{1, \ldots, n\}$ sellainen $q_j \in \mathbb{Q}$, että

$$|x_j - q_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, \; j = 1, \ldots, n.$$

Tällöin $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^n$, joka on numeroituva joukko (koska $\mathbb{Q}$ on numeroituva) ja

$$d(x, q) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \underbrace{|x_j - q_j|^2}_{< \frac{\varepsilon^2}{n}}} < \sqrt{n \cdot \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon.$$

□

Lopuksi käyttökelpoinen kriteeri ei-separoituvuudelle:

1.5. **Lause.** *Olkoon X metrinen avaruus ja oletetaan, että on olemassa ylinumeroituva kokoelma $\mathcal{U}$ avaruuden X avoimia pistevieraita epätyhjiä osajoukkoja (siis aina jos $U, V \in \mathcal{U}$ ja $U \neq V$, niin $U \cap V = \emptyset$). Silloin X* ei ole *separoituva.*

Todistus. Olkoon $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ on numeroituva X:n osajoukko. Koska A on numeroituva ja perhe $\mathcal{U}$ ylinumeroituva, löytyy ainakin yksi joukko $U_0 \in \mathcal{U}$, joka ei sisällä A:n pisteitä (miksi ?). Silloin, jos $x_0 \in U_0$, valitsemme säteen $r > 0$ niin että $B(x_0, r) \subset U_0$. Erityisesti, $d(x_0, a) > r$ jokaisella $a \in A$. Näin näemme ettei yksikään X:n numeroituva osajoukko voi olla tiheä. $\square$

2. Normi ja normiavaruus

Olkoon E vektoriavaruus (eli lineaariavaruus) skalaarikuntana $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tai $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Kurssilla Lineaarialgebra I & II määriteltiin vain $\mathbb{R}$-kertoimiset vektoriavaruudet, mutta kompleksikertoimiset avaruudet määritellään täysin analogisesti: Avaruudessa E on yhteenlaskun $x+y$ lisäksi annettu skalaarilla kertominen $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$, siis kuvaus $\mathbb{C} \times E \to E$, joka toteuttaa ehdot

$$\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y, \quad \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x \quad \text{ja} \quad (\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$$

kaikilla vektoreilla $x, y \in E$ ja skalaareilla $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Useimmiten kurssin tulokset ja käsitteet toimivat täysin samoin molemmilla skalaarikunnan valinnoilla, $\mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$, ja käytämme silloin skalaarikunnalle merkintää $\mathbb{K}$. Jos skalaarikunta pitää spesifioida, siitä huomautetaan erikseen.

2.1. **Esimerkkejä.** (1) $\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) : z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}\}$ on $\mathbb{C}$-kertoiminen vektoriavaruus. n-vektorien summa ja skalaarilla kertominen määritellään koordinaatteittain kuten vektoriavaruuden $\mathcal{R}^n$ tapauksessa.
(2) Myös kompleksisten polynomien avaruus

$$\mathcal{P} \;=\; \{p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k : \ a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}, \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\},$$

on $\mathbb{C}$-kertoiminen vektoriavaruus. Summa $p+q$ ja skalaarilla λp kertominen määritellään pisteittäin, kun $p, q \in \mathcal{P}$ ja $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dimensio: Kerrataan ensin lineaarialgebran käsitteitä. Jos $A \subset E$ on osajoukko, sen virittämä E:n vektorialiavaruus on

$$\text{span}(A) = \{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k : \ x_k \in A, \lambda_k \in \mathbb{K}, k = 1, \dots, n, n \in \mathbf{N}\}. \tag{2.2}$$

Tällöin vektoriavaruus E on *äärellisulotteinen*, jos se on äärellisen vektorijoukon virittämä.

Lineaarialgebrasta muistetaan, että vektorijono $x_1, \dots, x_n \in E$ on lineaarisesti riippumaton eli vapaa, jos

$$\lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_n x_n = \bar{0} \ \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Äärellisulotteisen avaruuden E *dimensio* $\dim(E)$ on E:n kannan (so. vapaan virittäjäjoukon) vektorien lukumäärä; tämä lukumäärä on kannasta riippumaton luku. Siis $(x_1, \dots, x_n)$ on E:n kanta jos ja vain jos jokaisella vektorilla $x \in E$ on yksikäsitteinen esitys $x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$ lineaarikombinaationa.

Muistetaan vielä, että Honkasalon monisteen Lineaarialgebra I sivulla 50 on todistettu seuraava tulos, jonka oletamme tunnetuksi:

Vektoriavaruus E on äärellisulotteinen jos ja vain jos E:n vapaiden jonojen *pituudet* ovat ylhäältä rajoitetut, so. on olemassa sellainen luku $M < \infty$, että jokaisessa E:n vapaassa jonossa on korkeintaan M vektoria.

Tämä kaikki toimii myös, kun kerroinkuntana on $\mathbb{C}$. Esimerkiksi yllä $\mathbb{C}^n$ on äärellisulotteinen (tarkemmin, n-ulotteinen). Nimittäin, $(e_1, \ldots, e_n)$ on eräs kanta vektoriavaruudelle $\mathbb{C}^n$, missä $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{C}^n$. Selvästi $z = (z_1, \ldots, z_n) = \sum_{k=1}^n z_k e_k$ kaikilla $z \in \mathbb{C}^n$.

Toisaalta, $\mathcal{P}$ on ääretönulotteinen: Polynomit $p_n(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, muodostavat vapaan joukon (miksi ?), ja koska tuo joukko on ääretön, yo. tuloksen nojalla $\dim(\mathcal{P}) = \infty$.

Keskeinen idea Funktionaalianalyysissä on tuoda hyödyllistä "rakennetta" esimerkiksi funktioiden muodostamiin vektoriavaruuksiin. Ensimmäisessä askeleessa "etäisyyskäsite" luodaan erilaisten normien avulla.

2.3. **Määritelmä.** Olkoon E jokin $\mathbb{K}$-kertoiminen vektoriavaruus. Kuvaus $p : E \to \mathbb{R}_+$ on *normi* E:ssä , jos

(N1) $\quad p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ kaikilla $x, y \in E$ ("*kolmioepäyhtälö*")

(N2) $\quad p(ax) = |a| p(x)$ kaikilla $x \in E, a \in \mathbb{K}$ ("*homogeenisuus*")

(N3) $\quad p(x) = 0 \iff x = \bar{0}$ (nolla-alkio E:ssä)

Tavallisesti merkitään $p(x) = \| x \|$. Paria $(E, \| \cdot \|)$ eli vektoriavaruutta E varustettuna normilla $\| \cdot \|$ sanotaan *normiavaruudeksi.*

Huomautus.

(1) Normi $\| \cdot \|$ edellyttää, että määrittelyjoukko E on lineaariavaruus:

$$x + y \in E \text{ ja } ax \in E \text{ aina kun } x, y \in E \text{ ja } a \in \mathbb{K}.$$

(2) Kuvaus $p : E \to \mathbb{R}_+$ on *seminormi* E:ssä, jos p toteuttaa ehdot (N1) ja (N2).[1] Tällöin

$$p(\bar{0}) = p(0 \cdot \bar{0}) = |0| p(\bar{0}) = 0,$$

ja $\{ \ x \in E : \ p(x) = 0 \ \}$ on avaruuden E vektorialiavaruus ehtojen (N1) ja (N2) nojalla.

[1] tämä yleisempi käsite on joskus tarpeen; tällä kurssilla suhteellisen harvoin

2.4. **Esimerkkejä.** (1)

$$\| x \|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \quad , \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

on avaruuden $\mathbb{R}^n$ *euklidinen* normi, kun $n = 1, 2, \ldots$. Ehdot (N1)-(N3) toteutuvat; katso TopoI. Hieman myöhemmin tämä todistetaan myös erikoistapauksena yleisemmän avaruuden ℓ^p yhteydessä. Vastaavasti kaava

$$\| z \|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2} = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2}, \quad z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n,$$

antaa euklidisen normin avaruuteen $\mathbb{C}^n$. Ehto (N1) on tässä muotoa

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n} |z_j + w_j|^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |w_j|^2}.$$

[*Muistutus:* jos $z = a + ib \in \mathbb{C}$, niin $|z|^2 = z\overline{z} = a^2 + b^2$, missä $\overline{z} = a - ib$. Tapauksessa $n = 1$ pätee edellä $|z + w| \leq |z| + |w|$ kun $z, w \in \mathbb{C}$. Tämä on *kompleksilukujen* kolmioepäyhtälö, joka usein tulee käyttöön jatkossa. Todistusidea:

$$|z + w|^2 = (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) = |z|^2 + 2Re(z\overline{w}) + |w|^2 \leq (|z| + |w|)^2.$$

Viimeisessä vaiheessa käytimme arviota $|Re(u)| \leq |u|$, $u \in \mathbb{C}$.]

(2) Kun A on mielivaltainen joukko, asetetaan

$$B(A, \mathbb{K}) := \{ \, f \colon A \to \mathbb{K} : \ \| f \|_\infty := \sup_{t \in A} |f(t)| < \infty \, \}.$$

Tämä on rajoitettujen kuvausten $A \to \mathbb{K}$ vektoriavaruus, jos asetetaan

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t), \quad (af)(t) = af(t) \text{ kun } f, g \in B(A, \mathbb{K}), a \in \mathbb{K}.$$

Helposti nähdään, että $\| f \|_\infty$ on normi:

Perustelu. Olkoon $f, g \in B(A, \mathbb{K})$ ja $t \in A$. Tällöin

$$|(f + g)(t)| = |f(t) + g(t)| \overset{\triangle-\text{ey}}{\leq} |f(t)| + |g(t)| \overset{\text{määr.}}{\leq} \| f \|_\infty + \| g \|_\infty$$

$$\underset{t \in A}{\overset{\text{sup yli}}{\Longrightarrow}} \| f + g \|_\infty = \sup_{t \in A} |(f + g)(t)| \leq \| f \|_\infty + \| g \|_\infty$$

eli ehto (N1) on voimassa. (Edellä $\triangle -$ ey tarkoittaa reaali- tai kompleksilukujen kolmioepäyhtälöä, riippuen skalaarikunnasta).

Olkoon $a \in \mathbb{K}$ skalaari. Tällöin

$$|(af)(t)| = |af(t)| = |a||f(t)| \underset{\text{t:n}}{\overset{\text{sup yli}}{\Rightarrow}} \| af \|_\infty = |a| \| f \|_\infty$$

eli myös ehto (N2) on voimassa. Koska

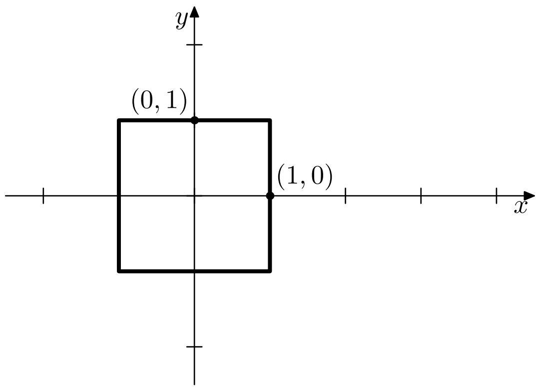
$$\| f \|_\infty = \sup_{t\in A}|f(t)| = 0 \iff f(t) = 0 \quad \forall t \in A$$
$$\iff f \text{ on } \bar{0}\text{-funktio},$$

niin myös (N3) toteutuu. □

(3) Myös $\mathbb{R}^n$:ssä (tai $\mathbb{C}^n$:ssä) voidaan määritellä normi edellisen kohdan erikoistapauksena: tällöin $A = \{1, \ldots, n\}$, jolloin saadaan normi

$$\| x \|_\infty := \sup(|x_1|, \ldots, |x_n|),$$

missä $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Vaikka tämä normi antaa myös euklidisen topologian (vrt. Esim 2.13 alla), sup-normin "geometria" on hieman erilainen. Esimerkiksi dimensiossa $n = 2$ avaruuden $E = (\mathbb{R}^2, \| \cdot \|_\infty)$ vastaava suljettu yksikköpallo $B_E = \{x \in E : \| x \|_\infty \leq 1\}$ näyttää seuraavalta:



Kuva 3. Pallo B_E avaruudessa $E = (\mathbb{R}^2, \| \cdot \|_\infty)$

(4) Toinen erikoistapaus (2)-kohdasta saadaan, kun $A = \mathbb{N}$. Tällöin merkitään

$$\ell^\infty := B(\mathbb{N}, \mathbb{K}) = \{x = (x_n)_{n=1}^\infty : x_n \in \mathbb{K}\ \forall n, \| x \|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n| < \infty\}.$$

Avaruudessa ℓ^∞ siis $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$ ja $a(x_n) = (ax_n)$ kun $(x_n), (y_n) \in \ell^\infty$ ja $a \in \mathbb{K}$. Olkoon $e_n = (0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n:s}, 0, \ldots) \in \ell^\infty$ kun $n \in \mathbb{N}$. Tällöin joukko $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ on lineaarisesti riippumaton (Miksi ?), joten $\dim(\ell^\infty) = \infty$.

Seuraavaksi osoitetaan pari normin perusominaisuutta, joista seuraavan lauseen (2)-kohta liittää normiavaruudet metrisiin.

2.5. **Lause.** *Olkoon* $(E, \| \cdot \|)$ *normiavaruus. Tällöin*

(1) kaikilla $x, y \in E$ *on voimassa (ns.* $\triangle -$ *ey "alaspäin")*

$$\Big| \| x \| - \| y \| \Big| \leq \| x - y \|.$$

Erityisesti, kuvauksena normi $x \mapsto \| x \|$ *on* tasaisesti *jatkuva* E*:ssa.*

(2) kuvaus $d\colon E \times E \to \mathbb{R}_+$, $d(x,y) := \| x - y \|$ *on metriikka avaruudessa* E*. Erityisesti* $\| x \| = d(x, \bar{0})$, $x \in E$.

Todistus. (1) (vrt. Topo I, Vektorianalyysi) Olkoon $x, y \in E$. Tällöin

$$\begin{aligned} \| x \| = \| x - y + y \| &\overset{\triangle-\text{ey}}{\leq} \| x - y \| + \| y \| \\ \Longrightarrow \| x \| - \| y \| &\leq \| x - y \| \\ \overset{\text{symm}}{\Longrightarrow} \| y \| - \| x \| &\leq \| y - x \| \overset{\text{(N2)}}{=} \| x - y \| \\ \Longrightarrow \Big| \| x \| - \| y \| \Big| &\leq \| x - y \| \end{aligned}$$

(2) (vrt. Topo I) kaikilla $x, y, z \in E$ on voimassa

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \| x - z \| = \| x - y + y - z \| \overset{\text{(N1)}}{\leq} \| x - y \| + \| y - z \| \\ &= d(x,y) + d(y,z), \end{aligned}$$

joten (M1) toteutuu. Ehto (M2) seuraa välittömästi ehdosta (N2). Edelleen

$$d(x,y) = \| x - y \| = 0 \overset{\text{(N3)}}{\Longleftrightarrow} x - y = \bar{0} \Longleftrightarrow x = y,$$

joten myös (M3) on voimassa. □

Normiavaruudessa voidaan siis puhua normin indusoimasta metrisen topologian käsitteistä, kuten avoimista palloista ja joukoista, jonojen suppenemisesta, jatkuvista funktioista jne. Metrisinä avaruuksina funktioavaruudet voivat olla melko ”suuria”, esimerkkinä olkoon vaikkapa ℓ^∞, joka ei ole edes separoituva (vrt. Harjoitukset). Useille käytännössä eteen tuleville funktioavaruuksille separoituvuus toisaalta pätee; myöhemmin osoitamme tämän esimerkiksi $C(0,1)$:lle.

Seuraava esimerkki valaisee pistejonojen suppenemisen (avaruudessa ℓ^∞).

2.6. **Esimerkki.** Olkoon $y^{(n)} = (1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots) \in \ell^\infty$ (alussa n kpl ykkösiä) kun $n \in \mathbb{N}$. Kysymys:
Suppeneeko jono $(y^{(n)})_{n=1}^\infty$ avaruudessa $(\ell^\infty, \| \cdot \|_\infty)$?

Ratkaisu. Merkitään $y^{(n)} = (y_k^{(n)})_{k=1}^\infty \in \ell^\infty$, jolloin siis määritelmän mukaan $y_k^{(n)} = 1$ kun $1 \leq k \leq n$ ja $y_k^{(n)} = 0$ kun $k > n$.

Jos jono $(y^{(n)})_{n=1}^\infty$ suppenee $(\ell^\infty, \| \cdot \|_\infty)$:ssä, määritelmän mukaan eräälle jonolle $y = (y_k)_{k=1}^\infty \in \ell^\infty$ pätee

$$\|y^{(n)} - y\|_\infty = \sup_k |y_k - y_k^{(n)}| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Erityisesti, kiinteällä $k \in \mathbb{N}$ saamme $|y_k - y_k^{(n)}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Tästä seuraa, että $y_k = \lim_n y_k^{(n)} = 1$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots$, eli raja-arvojonon on oltava $y = (1, 1, 1, \ldots) \in \ell^\infty$. Toisaalta, $y^{(n)} - (1, 1, 1, \ldots) = (0, \ldots, 0, 1, 1, \ldots)$ (alussa n kpl nollia), joten

$$\|y^{(n)} - (1, 1, 1, \ldots)\|_\infty = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tämä tarkoittaa, että jono $(y^{(n)})_{n=1}^\infty$ ei voi supeta avaruudessa $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$.

(*Vaihtoehtoinen tapa:* selvästi $y^{(n)} = e_1 + \ldots + e_n$ kun $n \in \mathbb{N}$, missä $e_n = (0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n:s}, 0, \ldots) \in \ell^\infty$ kun $n \in \mathbb{N}$. Havaitaan, että kaikilla $n > m$ pätee

$$\|y^{(n)} - y^{(m)}\|_\infty = \|e_{m+1} + \ldots + e_n\|_\infty = 1.$$

Tällöin jono $(y^{(n)})_{n=1}^\infty$ ei voi supeta avaruudessa $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$, koska jonon alkiot eivät edes toteuta Cauchyn ehtoa, vrt. Lause 3.2 alla).

Normiavaruuden luonnolliset rakenteet ovat yhteensopivat, toisin sanoen:

2.7. **Lause.** *Normiavaruudessa* $(E, \|\cdot\|)$ *kuvaukset*

$$\psi_1 \colon E \times E \to E, \quad \psi_1(a, b) := a + b, \quad \textit{ja}$$

$$\psi_2 \colon \mathbb{K} \times E \to E, \quad \psi_2(\lambda, a) := \lambda a$$

ovat jatkuvia.

[Ylimääräinen HT: Selvitä tämä itsellesi !]

Huomautus. Normiavaruuden E metriikka on *siirto-* eli *translaatioinvariantti*:

$$d(x + a, y + a) = \|x + a - (y + a)\| = \|x - y\| = d(x, y)$$

kaikilla $x, y, a \in E$. Saamme muutamia seurauksia:

(i) normin $\|\cdot\|$ avoimelle pallolle pätee $B(a, r) = a + B(\bar{0}, r)$ kaikilla $a \in E$ ja $r > 0$. Tästä, sekä ominaisuudesta (N2) saadaan, että joukko $A \subset E$ on avoin (vast. suljettu, kompakti) jos ja vain jos $x_0 + A$ ja λA ovat avoimia (vast. suljettuja, kompakteja), kun $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ja $x_0 \in E$ ovat mielivaltaisia.

(ii) Jos $x_0 \in U \subset E$, niin U on pisteen x_0 ympäristö jos ja vain jos $U - x_0$ on nolla-alkion $\bar{0}$ ympäristö.

(iii) Pistejono $(x_n)_{n=0}^\infty \subset E$ suppenee alkioon $y \in E$ jos ja vain jos $x_n - y \to \bar{0}$ kun $n \to \infty$ avaruudessa E.

Edellä käytimme merkintöjä

$$x_0 + A = \{\, x_0 + y : \ y \in A \,\} \subset E,$$

$$\lambda A = \{\, \lambda x : \ x \in A \,\}.$$

Yleisemmin, jos $A \subset E$, $B \subset E$ ja $\Lambda \subset \mathbb{K}$, niin asetetaan

$$A + B = \{\, x + y : \; x \in A, y \in B \,\},$$
$$\Lambda A = \{\, \lambda x : \; \lambda \in \Lambda, x \in A \,\}.$$

Monet funktioavaruuksien konvergenssikäsitteistä voidaan kuvata normin avulla (ja kääntäen, normi antaa konvergenssikäsitteen):

2.8. **Esimerkkejä.** (1) Kun avaruus $C(0,1) = \{f : [0,1] \to \mathbb{K} \quad \text{jatkuva} \}$ varustetaan tavallisella normillaan $\| f \|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$, pätee

$$\| f_n - f \|_\infty \to 0 \text{ kun } n \to \infty \Leftrightarrow f_n(x) \to f(x) \quad \text{tasaisesti joukossa } [0,1].$$

(Kompleksisessä tapauksessa $f = f_1 + if_2$ on jatkuva $[0,1] \to \mathbb{C}$ jos ja vain jos reaaliosa f_1 ja imaginaariosa f_2 ovat molemmat jatkuvia funktioita $[0,1] \to \mathbb{R}$.)

(2) Toisaalta $C(0,1)$:ssä voidaan määritellä myös normi $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$, kun $f \in C(0,1)$. (Selvitä itsellesi miksi $\|\cdot\|_1$ on normi $C(0,1)$:ssä !). Nyt pätee

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \|_1 = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t \to 0 \Leftrightarrow f_n(x) \to f(x) \text{ 'keskimäärin'}.$$

Esimerkiksi, jos $f_n(t) = t^n$, niin $f_n \to \bar{0}$ 'keskimäärin' eli normin $\|\cdot\|_1$ mielessä, koska $\| f_n \|_1 = \frac{1}{n+1} \to 0$ kun $n \to \infty$. Toisaalta jono (f_n) ei konvergoi sup-normin mielessä 0 -funktioon, sillä $\| f_n \|_\infty = 1$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$.

Annetuista normiavaruuksista saadaan muodostettua uusia avaruuksia monella eri tavalla. Tulemme jatkossa näkemään tästä useitakin esimerkkejä. Aloitamme seuraavalla yksinkertaisella periaatteella.

2.9. **Lause.** *Jokainen normiavaruuden* $(E, \|\cdot\|)$ *vektorialiavaruus* F *on normiavaruus (E:n indusoimalla normilla varustettuna).*

2.10. **Esimerkkejä.** (1) Voimme esimerkiksi valita $E = B([0,1], \mathbb{K})$, jolla on aliavaruutena jatkuvien funktioiden avaruus $F = C(0,1)$. [*Lisätieto:* $C(0,1)$ on avaruuden $B([0,1], \mathbb{K})$ suljettu vektorialiavaruus sup-normin $\|\cdot\|_\infty$ suhteen, vrt. HT 1.]

(2) Olkoon $E = \ell^\infty$; seuraavat jonoavaruudet ovat sen vektorialiavaruuksia:

$$c := \{x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty : \lim_n x_n \text{ on olemassa}\},$$
$$c_0 := \{x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty : \lim_n x_n = 0\}.$$

Molemmissa normi on siis $\| x \|_\infty = \sup_n |x_n|$. Edellä $x_n \in \mathbb{K}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Jos $x_n = a_n + ib_n \in \mathbb{C}$, niin jono (x_n) suppenee jos ja vain jos reaalijonot (a_n) ja (b_n) suppenevat. [*Lisätieto:* c ja c_0 ovat avaruuden ℓ^∞ suljettuja vektorialiavaruuksia, vrt. HT 1.]

Monesti on hyödyllistä muuttaa normia, ilman että sen määräämä topologia tai konvergenssi muuttuu. Tämä idea johtaa seuraavaan käsitteeseeen.

2.11. **Määritelmä.** Vektoriavaruuden E normit $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ ovat *ekvivalentteja*, jos on olemassa vakiot $C_1, C_2 > 0$, joille

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1 \quad \forall x \in E.$$

2.12. **Lause.** *Olkoot* $\|\cdot\|_1$ *ja* $\|\cdot\|_2$ *ekvivalentteja normeja avaruudessa* E. *Tällöin ne määrittelevät avaruudessa* E *samat avoimet ja suljetut joukot (eli ne määrittävät saman topologian; siis* $\tau_{\|\cdot\|_1} = \tau_{\|\cdot\|_2}$, *missä*

$$\tau_{\|\cdot\|_1} = \{U \subset E : U \text{ on } \|\cdot\|_1 - \text{avoin joukko}\}.)$$

Todistus. Harjoitukset. □

2.13. **Esimerkki.** (1) Avaruuden $\mathbb{C}^n$ normit

$$\| x \|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2},$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq j\leq n} |x_j|, \qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$$

ovat ekvivalentit:

$$\| x \|_\infty \leq \| x \|_2 \leq \sqrt{n}\| x \|_\infty, \quad x \in \mathbb{C}^n.$$

Nimittäin, jos $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ ja $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$ on sellainen indeksi, että $\|x\|_\infty = |x_{j_0}|$, niin

$$\| x \|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2} \leq \sqrt{n|x_{j_0}|^2} = \sqrt{n}\|x\|_\infty.$$

(Tulemme myöhemmin näkemään, että itse asiassa jokaisen *äärellisulotteisen* vektoriavaruuden *kaikki* normit ovat ekvivalentit.)
(2) Olkoon $\mathcal{P} = \{p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k : a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ polynomien muodostama vektoriavaruus. Tällöin esimerkiksi

$$\|p\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k| \quad \text{ja} \quad \|p\|_2 = \max_k |a_k|, \text{ kun } p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k,$$

ovat hyvin määriteltyjä (Miksi?) normeja (Miksi?) avaruudessa $\mathcal{P}$. Normit eivät ole kuitenkaan ekvivalentteja: jos $p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k = 1 + z + \ldots + z^n$, niin jokaisella n pätee $\|p_n\|_2 = 1$ mutta $\|p_n\|_1 = n + 1$. Koska tässä n voidaan valita mielivaltaisen suureksi, normit ovat epäekvivalentit.

2.14. **Esimerkki.** Merkitään

$$C^k(0,1) = \{\, f\colon [0,1] \to \mathbb{K} : \ f, f', \ldots, f^{(k)} \text{ ovat jatkuvia välillä } [0,1] \,\},$$

kun $k \in \mathbb{N}$. Tässä $f^{(j)}$ on funktion f j:s derivaatta, ja $f^{(0)} = f$. Normit

$$\| f \| = \sup_{0\le j\le k} \sup_{0\le t\le 1} |f^{(j)}(t)| = \sup_{0\le j\le k} \|f^{(j)}\|_\infty, \text{ ja}$$

$$|||f||| = \sum_{j=0}^{k} \sup_{0\le t\le 1} |f^{(j)}(t)| = \sum_{j=0}^{k} \|f^{(j)}\|_\infty$$

ovat ekvivalentteja avaruudessa $C^k(0,1)$, minkä todistus jää harjoitustehtäväksi. Osaatko antaa muita ekvivalentteja normeja $C^k(0,1)$:lle ?

Ääretönulotteisessä normiavaruudessa avoimet (tai suljetut) joukot voivat joskus tuottaa yllätyksiä verrattuna euklidisen avaruuden $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ tilanteeseen.

2.15. **Esimerkki.** Olkoon

$$A = \{(x_n)_{n=1}^\infty \in c_0 : |x_n| < \frac{1}{n} \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N}\}.$$

Tällöin A *ei* ole avoin joukko normiavaruudessa $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$.

Nimittäin selvästi nollajono $\bar{0} = (0,0,\ldots) \in A$. Näytämme, että $\bar{0}$ ei ole joukon A sisäpiste, toisin sanoen, *ei* ole olemassa sellaista $r > 0$, että avoin pallo $B(\bar{0}, r) \subset A$.

Olkoon $r > 0$ annettu ja $y^{(n)} = (0,0,\ldots,0,r/2,0,\ldots)$ (missä $r/2$ on jonon n:s koordinaatti), kun $n \in \mathbb{N}$. Tällöin $\|y^{(n)}\|_\infty = r/2$, eli $y^{(n)} \in B(\bar{0}, r)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Toisaalta, jos kiinnitetään $n \in \mathbb{N}$ jolle $\frac{1}{n} < \frac{r}{2}$, niin erityisesti $y^{(n)} \notin A$. Näin siis $B(\bar{0}, r) \subset A$ ei ole voimassa millään $r > 0$.

ℓ^p-AVARUUDET

Normiavaruudet ℓ^∞, c ja c_0 ovat esimerkkejä klassisista Banachin (jono)avaruuksista. Mainitsemme vielä esimerkkinä avaruuden

$$\ell^1 = \{x = (x_n)_{n=1}^\infty : \| x \|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\},$$

joka on *itseisesti* eli *absoluuttisesti suppenevien sarjojen* avaruus. Myös tässä $\|\cdot\|_1$ on helppo todistaa normiksi, koska kolmioepäyhtälö seuraa arviosta $|x_n + y_n| \le |x_n| + |y_n|$ summaamalla indeksin n suhteen. Vaikeammin käsiteltäviä esimerkkejä ovat muut ns. ℓ^p-avaruudet, joita nyt ryhdymme määrittelemään.

2.16. **Määritelmä.** Olkoon $1 \leq p < \infty$. Tällöin

$$\ell^p := \{(x_n)_{n=1}^{\infty} : \| x \|_p := \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty\}.$$

Tässä $x_n \in \mathbb{K}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, ja jonojen summa ja skalaarilla kertominen on määritelty koordinaateittain: $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$ ja $\lambda(x_n) = (\lambda x_n)$ jonoille (x_n), (y_n) ja $\lambda \in \mathbb{K}$.

Seuraavassa p ja q ovat reaalilukuja, jotka täyttävät ehdot:

$$p > 1, \quad q > 1 \quad \text{ja} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Sanomme lukuja p ja q toistensa *duaalieksponenteiksi*. Esimerkiksi $p = q = 2$ tai $p = 7$, $q = \frac{7}{6}$ ovat duaalieksponenttipareja. Edelleen on voimassa, että $q = \frac{p}{p-1}$ ja $p + q = pq$.

Seuraavana tavoitteena on osoittaa, että $(\ell^p, \| \cdot \|_p)$ on normiavaruus, ja erityisesti että kolmioepäyhtälö on voimassa $\| \cdot \|_p$:lle.

2.17. **Lemma.** *Jos $a \geq 0$, $b \geq 0$ sekä p ja q ovat duaalieksponentteja, niin*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{2.18}$$

Todistus. Kun $b \geq 0$ annettu, asetetaan

$$g(b) = \sup_{a \geq 0} \left\{ ab - \frac{a^p}{p} \right\}$$

Tämä suure on itse asiassa funktion a^p/p *Legendre muunnos*. Muunnosta hyödynnetään paljon esim. konveksissa analyysissä.

Merkitään $f(a) = ab - \frac{a^p}{p}$. Silloin $f(0) = 0$ ja $f(a) \to -\infty$, kun $a \to \infty$. Edelleen, kun $a \geq 0$,

$$f'(a) = b - a^{p-1} = 0 \Leftrightarrow a = b^{1/(p-1)}$$

ja koska $q - 1 = 1/(p-1)$,

$$f(b^{1/(p-1)}) = b \cdot b^{1/(p-1)} - \frac{b^{p/(p-1)}}{p} = \left(1 - \frac{1}{p}\right) b^q = \frac{1}{q} b^q$$

Siis $a = b^{1/(p-1)}$ on funktion $f(a)$ maksimipiste. Erityisesti

$$f(a) = ab - \frac{a^p}{p} \leq \frac{1}{q} b^q, \qquad a \geq 0,$$

mikä todistaa väitteen (2.18).

□

2.20. **Lause** (Hölderin epäyhtälö jonoille)**.** *Olkoot* $1 < p, q < \infty$ *sellaiset, että* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Tällöin*

$$\text{(H)} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q)^{\frac{1}{q}}$$

kaikilla jonoilla $(x_k) \in \ell^p, (y_k) \in \ell^q$ *(tässä* $x_k, y_k \in \mathbb{K}$ *kaikilla* k *ja* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *tai* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*). Näin siis*

$$\| (x_k y_k) \|_1 \leq \| (x_k) \|_p \| (y_k) \|_q,$$

ja erityisesti $(x_k) \in \ell^p, (y_k) \in \ell^q \Longrightarrow$ *"tulojono"* $(x_k y_k) \in \ell^1$.

Huomautus. Kun epäyhtälöön (H) sijoitetaan luvut, jotka toteuttavat lisäehdot $0 = x_k = y_k$ kaikilla $k > n$, saadaan erikoistapauksena äärellinen versio Hölderin epäyhtälöstä:

$$\text{(H')} \qquad \sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q)^{\frac{1}{q}}$$

kaikilla $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ ja $n = 1, 2, 3, \ldots$

Todistus. Merkitään

$$A = (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} = \| (x_k) \|_p, \quad B = (\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q)^{\frac{1}{q}} = \| (y_k) \|_q,$$

jolloin $A \geq 0, B \geq 0$. Jos $A = 0$ tai $B = 0$, niin $x_k = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ tai $y_k = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Tällöin (H) on ilmeinen, sillä vasen puoli $= 0$. Voidaan siis olettaa: $A > 0$, $B > 0$. Kiinnitetään $k \in \mathbb{N}$ ja sovelletaan Lemmaa 2.17 luvuille $a = \frac{|x_k|}{A}$ ja $b = \frac{|y_k|}{B}$. Saadaan

$$\frac{|x_k|}{A} \cdot \frac{|y_k|}{B} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|x_k|^p}{A^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|y_k|^q}{B^q}$$

kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Summataan nämä arviot muuttujan k suhteen, jolloin

$$\begin{aligned} \frac{1}{AB} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{A} \cdot \frac{|y_k|}{B} \leq \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|^p}{A^p} + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|y_k|^q}{B^q} \\ &= \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{A^p} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p}_{=A^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{B^q} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q}_{=B^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

Kertomalla puolittain luvulla AB saadaan lopulta

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq AB = \| (x_k) \|_p \| (y_k) \|_q.$$

$\square$

Hölderin erikoistapauksella $p = q = 2$ on oma nimitys ja merkitys (vrt. Hilbertin avaruudet, luku 4).

2.21. **Seuraus** (Schwarzin epäyhtälö). *Jos $x = (x_k), y = (y_k) \in \ell^2$, niin*

$$\text{(S)} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \le (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2)^{\frac{1}{2}} = \| x \|_2 \| y \|_2$$

kaikilla jonoilla $(x_k)_{k=1}^{\infty}, (y_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^2$. Äärellisten jonojen erikoistapauksessa saadaan

$$\text{(S')} \qquad \sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \le (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2)^{\frac{1}{2}}$$

kaikilla luvuilla $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$ ja kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Huomautus. Schwarzin epäyhtälö takaa, että avaruudessa ℓ^2 ns. bilineaarimuoto

$$< x, y > = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}, \qquad x = (x_k), y = (y_k) \in \ell^2$$

on hyvin määritelty. Tämä antaa ℓ^2:een sisätulon rakenteen; tulemme näkemään Hilbertin avaruuksia koskevassa luvussa 4, että sisätuloavaruuksilla on monia poikkeuksellisen hyviä ominaisuuksia.

Hölderin epäyhtälön avulla voimme osoittaa, että ℓ^p-normit toteuttavat kolmioepäyhtälön; saatua arviota sanotaan (usein) *Minkowskin epäyhtälöksi.*

2.22. **Lause** (Minkowskin epäyhtälö). *Olkoon $1 < p < \infty$. Tällöin*

$$\text{(M)} \qquad (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p)^{\frac{1}{p}} \le (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p)^{\frac{1}{p}}$$

kaikilla jonoilla $(x_k)_{k=1}^{\infty}, (y_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^p$.

Huomautus. Kun $(x_k) \in \ell^p, (y_k) \in \ell^p$, niin summajono $(x_k + y_k) \in \ell^p$, joten ℓ^p on siis vektoriavaruus. Valitsemalla $x_k = 0, y_k = 0$ kun $k \ge n + 1$ saadaan äärellinen versio:

$$\text{(M')} \qquad (\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p)^{\frac{1}{p}} \le (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p)^{\frac{1}{p}}$$

kaikilla luvuilla $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$ ja $n \in \mathbb{N}$.

Todistus. Voidaan olettaa, että $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p > 0$, koska epäyhtälö (M) on muuten ilmeinen.

Olkoon $1 < q < \infty$ sellainen, että $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (eli siis $q = \frac{p}{p-1}$). Hölderin epäyhtälön (H) ja skalaarikunnan $\mathbb{K}$ kolmioepäyhtälön avulla saadaan

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p &= \sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^{p-1} \underbrace{|x_k + y_k|}_{\leq |x_k| + |y_k|} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k||x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k||x_k + y_k|^{p-1} \\
&\overset{(H)}{\leq} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^{q(p-1)}\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^{q(p-1)}\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&= \big(\| (x_k) \|_p + \| (y_k) \|_p \big) \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p\Big)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

koska $q(p-1) = p$. Jakamalla saatu epäyhtälö puolittain positiivisella termillä $(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p)^{\frac{1}{q}}$ saadaan

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p\Big)^{1-\frac{1}{q}} \leq \| (x_k) \|_p + \| (y_k) \|_p.$$

Tämä on tarkalleen etsitty Minkowskin epäyhtälö (M), koska $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$.

Edellä sekä Hölderin epäyhtälön (H) käyttö että viimeinen jakovaihe edellyttävät luonnollisesti, että jono $(|x_k + y_k|^{p-1}) \in \ell^q$ ja summajono $(x_k + y_k) \in \ell^p$. Yllä todettiin jo, että

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^{q(p-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p.$$

Näin haluttua tietoa varten riittää varsin alkeellinen arvio

$$(*) \qquad |a + b|^p \leq (|a| + |b|)^p \leq (2 \max\{|a|, |b|\})^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p),$$

joka on voimassa kaikilla $a, b \in \mathbb{K}$. Nimittäin, kun sijoitetaan $a = x_k$, $b = y_k$ epäyhtälöön $(*)$ ja summataan yli muuttujan k saadaan

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p \leq 2^p\Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\Big) < \infty,$$

koska $(x_k), (y_k) \in \ell^p$. Näin Lause 2.22 on saatu täydellisesti todistetuksi. □

Huomautus. Erikoistapauksessa $p = 2$ äärellisiä jonoja koskeva epäyhtälö (M') on itse asiassa tuttu kolmioepäyhtälö kotiavaruuden $\mathbb{K}^n$ euklidiselle normille

$$\| x \|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n,$$

kun $n = 1, 2, \ldots$ (vrt. Vektorianalyysi, Topo I).

Kootaan yhteen edelliset tulokset seuraavaksi tärkeäksi lauseeksi ℓ^p-avaruuksista (tapaukset $p = 1$ tai $p = \infty$ käsiteltiin aikaisemmin).

2.23. **Lause.** *$(\ell^p, \| \cdot \|_p)$ on normiavaruus kun $1 < p < \infty$.*

Todistus. Jos $x = (x_k) \in \ell^p, y = (y_k) \in \ell^p$, niin $x+y = (x_k+y_k)$ ja Minkowskin epäyhtälön (M) mukaan

$$\| x + y \|_p = (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p)^{\frac{1}{p}} \le (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p)^{\frac{1}{p}} = \| x \|_p + \| y \|_p$$

(ja erityisesti $x + y \in \ell^p$, kuten edellä jo nähtiin). Siis (N1) pätee. Koska

$$\| ax \|_p = (\sum_{k=1}^{\infty} |ax_k|^p)^{\frac{1}{p}} = |a|(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} = |a| \| x \|_p,$$

kun $x = (x_k) \in \ell^p, a \in \mathbb{K}$, niin myös homogeenisuusehto (N2) on voimassa. Edelleen

$$0 = \| (x_k) \|_p = (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}) \Longrightarrow x_k = 0 \; \forall k \in \mathbb{N} \Longrightarrow (x_k) = (0, 0, \ldots) = \bar{0},$$

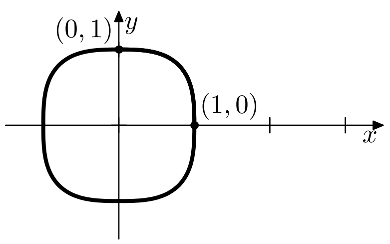
joten myös (N3) toteutuu. □

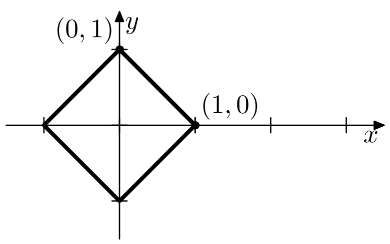
Huomautus. ℓ^p-avaruuksien välillä pätevät seuraavat sisältyvyydet (joukkoina): $\ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^q \subset c_0 \subset \ell^\infty$, kun $1 < p < q < \infty$. Normeille pätevät vastaavasti arviot

$$\| x \|_\infty \le \| x \|_q \le \| x \|_p \le \| x \|_1$$

jonoille $x = (x_k)$ (Harjoitukset 2).

Edellä olemme piirtäneet yksikköpallot normien $\| \cdot \|_2$ ja $\| \cdot \|_\infty$ suhteen. Entä yksikköpallo yleisten ℓ^p-normien suhteen ? Alla kuva tapauksesta $p = 3$ ja $p = 1$ tason $\mathbb{R}^2$ tapauksessa; mieti millainen on yksikköpallo yleisellä p !





Lisätietoja. On olemassa luontevia ja käyttökelpoisia vektoriavaruuksia E, joissa on luonnollinen siirtoinvariantti topologia τ, joka kuitenkaan ei ole minkään E:n *normin* indusoima (ts. ei ole olemassa sellaista normia $\| \cdot \| : E \to \mathbb{R}_+$, että

$\tau = \tau_{\|\cdot\|}$). Sellaisten avaruuksien teoriaa ei käsitellä kurssin aikana; esimerkkeinä mainitaan kuitenkin:
(1) Varustetaan avaruus $C(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} | \ f \text{ jatkuva } \}$ topologialla τ, jonka suhteen jono $f_n \to f$ kun $n \to \infty$, jos

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in K} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

kaikilla kompakteilla joukoilla $K \subset \mathbb{R}^n$. Topologia τ saadaan kasvavasta *seminormiperheestä* $(\|\cdot\|_m)$, missä

$$\| f \|_m = \sup_{x\in K_m} |f(x)|, \quad f \in C(\mathbb{R}^n),$$

kun $K_m = [-m, m]^n \subset \mathbb{R}^n$ sekä $m \in \mathbb{N}$, tai vaihtoehtoisesti siirtoinvariantista metriikasta

$$d(f, g) = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \frac{\| f - g \|_m}{1 + \| f - g \|_m}, \quad f, g \in C(\mathbb{R}^n).$$

Vastaavaa topologiaa ei kuitenkaan voi kuvata pelkästään yhden normin $\|\cdot\|$ avulla (HT 2:??). Topologinen vektoriavaruus $(C(\mathbb{R}^n), \tau)$ on ns. *nukleaarinen Frechetin* avaruus.

Vastaava koskee myös *avoimella* välillä $(0, 1)$ jatkuvien funktioiden avaruutta

$$\{f : (0, 1) \to \mathbb{R} | \ f \text{ jatkuva } \},$$

sekä äärettömän monta kertaa derivoituvien funktioiden avaruutta

$$C^\infty(0, 1) = \{f : [0, 1] \to \mathbb{K} | \ f^{(j)} \text{ jatkuva jokaisella } j \in \mathbb{N}\}.$$

(Mieti miksi $\|f\|_\infty = \sup_{t\in(0,1)} |f(t)|$ ei kelpaa normiksi, kun f on jatkuva avoimella välillä $(0, 1)$!)
(2) Olkoon $0 < p < 1$. On luontevaa sanoa, että jono $x = (x_k) \in \ell^p$, jos

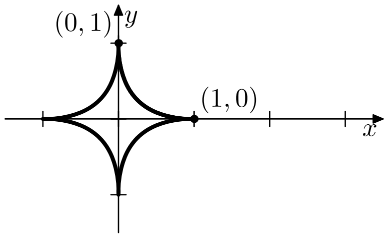
$$\| x \|_p = (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Tällöin $x \mapsto \| x \|_p$ toteuttaa normin ehdot (N2) ja (N3) sekä kolmioepäyhtälön heikommassa muodossa

$$\| x + y \|_p = (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}-1} (\| x \|_p + \| y \|_p)$$

kaikilla $x = (x_k)$, $y = (y_k) \in \ell^p$. Tässä vakio $2^{\frac{1}{p}-1} > 1$, kun $0 < p < 1$, eli $\|\cdot\|_p$ on ns. *kvasinormi* ℓ^p:ssä.

Alla kuva "yksikköpallosta" $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^p + |y|^p \leq 1\}$, kun $p = 1/2$.



Edellisen kuvan perusteella $\| \cdot \|_p$ ei voi olla normi tapauksessa $0 < p < 1$, koska vastaava "yksikköpallo" ei ole konveksi. Nimittäin, jokaisessa normiavaruudessa $(E, \| \cdot \|)$ yksikköpallo $B_E = \{x \in E : \| x \| \le 1\}$ on *konveksi* joukko:

$$tx + (1-t)y \in B_E \text{ kaikilla } x, y \in B_E \text{ ja } 0 < t < 1.$$

Yksikköpallon konveksisuus seuraa tässä arviosta $\| tx + (1-t)y \| \le t\| x \| + (1-t)\| y \| \le 1$.
(3) Kaikkien jonojen muodostama avaruus

$$s = \{ \ (x_n) : \ x_n \in \mathbb{K} \text{ jokaisella } n \in \mathbb{N} \ \}.$$

Avaruudessa s on summa ja skalaarilla kertominen määritelty kuten avaruudessa ℓ^∞, ja voidaan osoittaa että

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}, \quad x = (x_k), y = (y_k) \in s,$$

on avaruuden siirtoinvariantti metriikka (HT 2:??). Avaruus s on myös nukleaarinen Frechetin avaruus.

Lineaariset operaattorit

Olkoon E ja F $\mathbb{K}$-kertoimisia vektoriavaruuksia. Kuvaus $T : E \to F$ on *lineaarinen* jos

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) \quad \forall x, y \in E \text{ ja } \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

Sanomme usein että T on *lineaarinen operaattori* ja merkitsemme lyhyesti Tx merkinnän $T(x)$ sijaan.

Äärellisulotteisessa normiavaruudessa kaikki lineaariset kuvaukset ovat jatkuvia (todetaan myöhemmin), mutta äärettömän monen dimension avulla jatkuvuus on helppo rikkoa (annamme esimerkin hieman myöhemmin). Jos E, F ovat normiavaruuksia, on siis luonnollista kysyä:

Milloin lineaarinen kuvaus $T : E \to F$ on jatkuva ??

Vastausta varten tarvitsemme uuden käsitteen, rajoitetut operaattorit.

2.24. **Määritelmä.** Olkoot E ja F normiavaruuksia sekä $T : E \to F$ lineaarinen. Sanomme, että T on *rajoitettu*, jos on olemassa vakio $C < \infty$ jolle

$$\|Tx\|_F \leq C\,\|x\|_E \qquad \text{kaikilla } x \in E.$$

Yleisesti sanotaan että normiavaruuden osajoukko $A \subset E$ on *rajoitettu*, jos $\sup\{\|x\| : x \in A\} \leq M < \infty$; yhtäpitävästi (miksi?), A:n halkaisija on äärellinen, tai myös, $A \subset M\,B_E$ jollakin vakiolla $M < \infty$; tässä $B_E = \{x \in E, \|x\| \leq 1\}$ on E:n yksikköpallo. Silloin lineaarikuvauksille T on $T(A) \subset T(M\,B_E) = M\,T(B_E)$, ja Lemmasta 2.26 alla seuraa, että lineaarinen kuvaus T on rajoitettu jos ja vain jos se kuvaa E:n rajoitetut joukot F:n rajoitetuiksi joukoiksi.

2.25. **Esimerkki.** Olkoon $E = F = \ell^2$ ja $T : E \to F$ kuvaus $T : (x_k)_{k=1}^\infty \mapsto (3x_{k+1})_{k=1}^\infty$ kun $x = (x_k)_{k=1}^\infty \in \ell^2$. Tällöin T on lineaarinen (Miksi?) ja rajoitettu:

$$\|Tx\|_2 = \left(\sum_{k=1}^\infty |3x_{k+1}|^2\right)^{1/2} = 3\left(\sum_{k=1}^\infty |x_{k+1}|^2\right)^{1/2} \leq 3\left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^2\right)^{1/2} = 3\|x\|_2$$

Huomaamme, että vaadituksi vakioksi voidaan ottaa $C = 3$.

Operaattorin rajoittuneisuus voidaan testata seuraavan suureen avulla.

2.26. **Lemma.** *Lineaarinen operaattori $T : E \to F$ on rajoitettu jos ja vain jos*

$$\|T\| := \sup\{\, \|Tx\| : x \in E,\, \|x\| \leq 1\} < \infty. \tag{2.27}$$

Todistus. Jos T on rajoitettu, niin on olemassa sellainen vakio $C < \infty$, että $\|Tx\| \leq C\|x\|$ kaikilla $x \in E$. Tällöin selvästi $\|T\| \leq C$. Oletetaan kääntäen, että $\|T\| < \infty$. Koska $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1$ jokaisella $x \in E$, $x \neq \bar{0}$, nähdään lineaarisuudesta että

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \|T\| \quad \text{kaikilla } x \in E.$$

Tästä saamme (jatkossa varsin keskeisen arvion!)

$$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\| \tag{2.28}$$

jokaisella $x \in E$, eli $T : E \to F$ on rajoitettu. □

Niinkuin merkintä jo vihjaa, saatua suuretta $\|T\|$ kutsutaan lineaarisen kuvauksen T *normiksi.* Se mittaa kuinka suureksi joukoksi T kuvaa yksikköpallon $B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$. Olemme siis Lemmassa 2.26 tarkistaneet, että operaattori T on rajoitettu jos ja vain jos sen normi $\|T\| < \infty$. Jos tarve vaatii, merkitsemme avaruudet E ja F näkyviin, so. $\|T\|_{E \to F}$.

2.29. **Esimerkkejä.** (1) Olkoon $E = \ell^2$ ja $F = \ell^1$ sekä

$$Tx = T(x_k)_{k=1}^{\infty} := \Big(\frac{1}{k}x_k\Big)_{k=1}^{\infty} = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots).$$

Onko T rajoitettu operaattorina $\ell^2 \to \ell^1$? Heti havaitaan että

$$\|Tx\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}|x_k|.$$

Tässä arvio $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \le \big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\big)^{1/2}$ *ei päde* kaikilla jonoilla $(x_k) \in \ell^1$, vaan käytämme sen sijaan Hölderin epäyhtälöä (H) kun $p = q = 2$,

$$\|Tx\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}|x_k| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2} = C\|x\|_2$$

missä $C = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2} < \infty$. (Analyysi II; itse asiassa, $C = \sqrt{\pi^2/6}$). Näin ollen $T : \ell^2 \to \ell^1$ on rajoitettu ja saamme normille arvion $\|\, T \,\| \le \sqrt{\pi^2/6}$.

(2) Rakennetaan seuraavaksi lineaarinen operaattori, joka *ei* ole rajoitettu. Voimme vaikkapa tarkastella kaikkien (reaalisten) polynomien muodostamaa avaruutta

$$\mathcal{P} \;=\; \{\, p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k : \; a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R},\; n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \,\},$$

ja varustetaan se normilla $\|p\| = \max\{|a_k| : k = 0, \ldots, n\}$, kun $\sum_{k=0}^{n} a_k t^k$.

Tällöin (derivaatta)kuvaus $T\colon \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \mapsto \sum_{k=1}^{n} k\, a_k\, t^{k-1}$ on lineaarinen (Miksi?), mutta se ei ole rajoitettu: Jos $p_n(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$, silloin

$$\|\, p_n \,\| = 1, \quad \|\, Tp_n \,\| = \|\, np_{n-1} \,\| = n \;\;\Rightarrow\;\; \sup\{\|\, Tp \,\| : \|\, p \,\| = 1, p \in \mathcal{P}\,\} \;=\; \infty.$$

Palataan sitten alkuperäiseen kysymykseemme, milloin lineaarinen kuvaus on jatkuva ? Käy ilmi, että lineaarinen operaattori on jatkuva täsmälleen silloin kun se on rajoitettu !

2.30. **Lause.** *Olkoot E, F normiavaruuksia ja $T\colon E \to F$ lineaarikuvaus. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

(i) T *on rajoitettu operaattori*
(ii) T *on jatkuva (koko E:ssä)*
(iii) T *on jatkuva* yhdessä *pisteessä $x_0 \in E$.*

Todistus. (i) $\Rightarrow$ (ii): jos $x, y \in E$ ja $\varepsilon > 0$, niin

$$\|\, Tx - Ty \,\| \overset{\text{T lin.}}{=} \|\, T(x-y) \,\| \le \|\, T \,\| \cdot \|\, x - y \,\| < \varepsilon \quad \text{kun} \quad \|\, x - y \,\| \le \frac{\varepsilon}{\|\, T \,\|}.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): ilmeinen
(iii) $\Rightarrow$ (i): Olkoon T jatkuva pisteessä x_0. Jatkuvuuden määritelmän perusteella voimme valita sellaisen luvun $\delta > 0$ että

$$\| y - x_0 \| \le \delta \Rightarrow \| Ty - Tx_0 \| < 1.$$

Jos nyt $x \in E$ ja $\| x \| \le \delta$, saadaan

$$\| Tx \| \underset{\text{T lin.}}{=} \| T(x + x_0) - Tx_0 \| < 1$$

valitsemalla $y = x + x_0$. Toisaalta, jos $x \in B_E$ on mielivaltainen, niin $\| \delta x \| = \delta \| x \| \le \delta$ ja siis

$$\delta \| Tx \| = \| T(\delta x) \| < 1 \quad \text{eli} \quad \| Tx \| < \frac{1}{\delta} \quad \forall x \in B_E.$$

Siten $\|T\| \le \frac{1}{\delta}$ ja olemme näin näyttäneet, että T on rajoitettu. $\square$

Erityisesti, näemme, että Esimerkki 2.29.(2) antaa lineaarisen operaattorin $T : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, joka ei ole jatkuva.

Näillä tiedoin voimme myös aloittaa johdannossa esitetyn integraalioperaattorin tarkemman tarkastelun. Tulemme palaamaan teemaan useasti myöhemminkin.

2.31. **Esimerkki.** Olkoon $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ jatkuva (ns. *ydinfunktio*). Kun $f \in C(0,1) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} | f \text{ jatkuva } \}$, muunnamme sen uudeksi funktioksi Tf, missä

$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x,s) f(s) ds, \qquad x \in [0,1].$$

Väite: näin saadaan jatkuva lineaarinen operaattori $T : C(0,1) \to C(0,1)$.
Meidän on siis osoitettava kolme asiaa:

1. $f \mapsto Tf$ on lineaarinen,
2. Tf on jatkuva funktio välillä $[0,1]$ aina kun f on jatkuva välillä $[0,1]$,
3. operaattorina T on rajoitettu $C(0,1) \to C(0,1)$.

Jätetään 1. väite lukijan tehtäväksi (tämä palautuu integraalin lineaarisuuteen kurssista Analyysi II). Väite 2. kertoo että todellakin $T\big(C(0,1)\big) \subset C(0,1)$. Sitä varten arvioidaan

$$\begin{aligned} |(Tf)(x) - (Tf)(y)| &= \Big| \int_0^1 K(x,s) f(s) ds - \int_0^1 K(y,s) f(s) ds \Big| \\ &\le \int_0^1 \big| K(x,s) - K(y,s) \big| \, |f(s)| ds. \end{aligned}$$

Funktion Tf jatkuvuus siis palautuu ydinfunktion K ominaisuuksiin. Heti kuitenkin huomataan, että pelkkä pisteittäinen K:n jatkuvuus ei riitä, vaan arvio pitää tehdä tasaisesti muuttujan $s \in [0,1]$ suhteen. Tarvitsemme siis hieman tietoja kurssilta Topologia I: Oletamme tunnetuksi, että kompaktissa joukossa määritelty jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva[2].

Sovellamme tätä tietoa ydinfunktioon $(x,s) \mapsto K(x,s)$. Koska $[0,1]\times[0,1]$ on kompakti (eli suljettu ja rajoitettu joukko tasossa $\mathbb{R}^2$) tason euklidisen normin $\|\cdot\|_2$ suhteen, jokaisella $\varepsilon > 0$ löydämme sellaisen $\delta > 0$ että jos

$$|x-y| = \|(x,s)-(y,s)\|_2 < \delta,$$

niin silloin

$$|K(x,s) - K(y,s)| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } s \in [0,1]. \tag{2.32}$$

Erityisesti, luvun $\delta > 0$ suuruus ei riippunut pisteestä s. Saamme näin

$$|(Tf)(x) - (Tf)(y)| \le \varepsilon \int_0^1 |f(s)|ds \le \varepsilon \| f \|_\infty, \quad \text{kun } |x-y| < \delta. \tag{2.33}$$

Koska ε oli mielivaltainen, olemme osoittaneet Tf:n jatkuvuuden (väite 2).

Myös väite 3. käyttää tuttua topologista tulosta (Topologia I, Vektorianalyysi): Koska K on jatkuva (ja reaaliarvoinen) kompaktissa joukossa $[0,1]\times[0,1]$, se saa siinä suurimman ja pienimmän arvonsa, ja erityisesti K on rajoitettu. Siis eräällä vakiolla $M < \infty$ pätee

$$|K(x,s)| \le M < \infty \quad \text{kaikilla } x, s \in [0,1].$$

Näin saamme kaikilla $f \in C(0,1)$ arvion

$$|(Tf)(x)| \le \int_0^1 |K(x,s)|\,|f(s)|ds \le M\| f \|_\infty,$$

mikä siis antaa $\| Tf \|_\infty \le M \| f \|_\infty$. Näin ollen T on rajoitettu operaattori; voimme itse asiassa valita

$$M = \| K \|_\infty = \sup_{(x,s)\in[0,1]\times[0,1]} |K(x,s)|,$$

jolloin $\| T \| \le \| K \|_\infty$. Olemme siten todistaneet viimeisenkin väitteen 3. (*Kommentti:* Esimerkin tulos pätee myös kompleksiarvoisille ydinfunktioille $K : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{C}$. Tässä tapauksessa $C(0,1)$ koostuu jatkuvista funktioista $f : [0,1] \to \mathbb{C}$, ja kompleksiarvoinen integraali on

$$\int_0^1 f(s)ds = \int_0^1 f_1(s)ds + i\int_0^1 f_2(s)ds,$$

[2]Funktio $g : A \to \mathbb{R}$ on *tasaisesti jatkuva* joukossa A jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti löytyy sellainen $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ että aina $\|x-y\| < \delta \Rightarrow |g(x)-g(y)| < \varepsilon$. Olennaista tässä siis on, että vaadittu δ riippuu vain etäisyydestä $\|x-y\|$, eikä siitä missä pisteet x, y sijaitsevat.

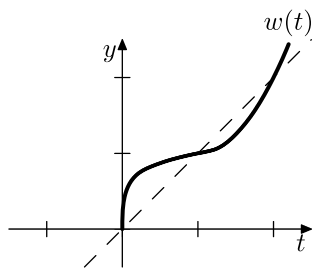
kun $f = f_1 + if_2 \in C(0,1)$, missä $f_1(s) = Ref(s)$ ja $f_2(s) = Imf(s)$, $s \in [0,1]$. Argumentti on kompleksisessa tapauksessa hyvin samanlainen ylläolevan kanssa, ja jätämme yksityiskohdat lukijan pohdittaviksi.) $\square$

2.34. *Lisätietoja.* Yllä esitetty integraalioperaattorin jatkuvuuden todistus antaa hieman enemmänkin kuin mitä Esimerkki 2.31 tarvitsi: Havaitaan että funktion Tf jatkuvuus riippuu olennaisesti vain ytimestä K eikä niinkään funktiosta f.

Koska tällä havainnolla on käyttöä myöhemmin, formalisoidaan sitä hieman, käyttäen jatkuvuusmodulin käsitettä: Olkoon meillä funktio $w : [0,\infty) \to [0,\infty)$ jolle

$$t \mapsto w(t) \text{ on jatkuva, aidosti kasvava ja } w(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

Sanomme silloin että w on *jatkuvuusmoduli.*



Nimittäin, jos A on normiavaruuden E osajoukko ja funktiolle $g : A \to \mathbb{C}$ pätee

$$|g(x) - g(y)| \le w(\|x - y\|) \quad \text{kaikilla } x, y \in A, \tag{2.34}$$

niin w kertoo "kuinka" jatkuva g on. [Tyypillinen esim: $w(t) = t^\alpha,\ 0 < \alpha < 1$.]

Jos g:llä on jatkuvuusmoduli w joukossa A, eli (2.34) pätee, se on selvästikin tasaisesti jatkuva (Miksi?). Mutta pätee myös kääntäen, että jokaisella tasaisesti jatkuvalla funktiolla on jatkuvuusmoduli. Voimme nimittäin asettaa

$$w_0(t) = \sup\{|g(x) - g(y)| : x, y \in A, \|x - y\| \le t\}.$$

Tasaisen jatkuvuuden nojalla w_0 on jatkuva ja $w_0(t) \to 0$ kun $t \to 0$. Aidosti kasvava siitä saadaan määrittelemällä $w(t) = w_0(t) + t$. Tälle (2.34) selvästi pätee, ja siten g:llä on jatkuvuusmoduli w.

Jos palaamme Esimerkkiin 2.31, ytimellä K on ylläolevan nojalla jatkuvuusmoduli w_K. Lisäksi, arviot (2.32), (2.33) antavat

$$|(Tf)(x) - (Tf)(y)| \le w_K(|x - y|)\| f \|_\infty \le w_K(|x - y|) \tag{2.35}$$

mikäli $\| f \|_\infty \le 1$, eli $f \in B_E$, $\quad E = C(0,1)$. Toisin sanoen, oli f:n jatkuvuus miten heikkoa tahansa, Tf:n jatkuvuus on aina vähintään luokkaa w_K !

Harjoitustehtäviä

2:1 Olkoon $f_n(t) = t^n$ kun $t \in [0,1]$ ja $n \in \mathbf{N}$. Suppeneeko jono (f_n) jatkuvien funktioiden avaruudessa $(C(0,1), \|\cdot\|_\infty)$?

2:2 Olkoon $g_n(t) = n(e^{t/n} - 1)$ ja $g(t) = t$ kun $t \in [0,1]$ ja $n \in \mathbb{N}$. Näytä, että $\|g_n - g\|_\infty \to 0$ kun $n \to \infty$. [*Vihje:* tutki esimerkiksi erotusfunktion ääriarvoja.]

2:3 Olkoon $(E, \|\cdot\|)$ normiavaruus skalaarikuntana $\mathbf{K}$. Näytä, että kuvaukset $(x,y) \mapsto x + y : E \times E \to E$ ja $(\lambda, x) \mapsto \lambda x : \mathbf{K} \times E \to E$ ovat jatkuvia. [*Muistutus:* Riittää esimerkiksi näyttää että $x_n + y_n \to x + y$ kun $n \to \infty$ aina kun $x_n \to x$ ja $y_n \to y$ E:ssä, ja samoin toisessa tapauksessa.]

2:4 Olkoot $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ normeja vektoriavaruudessa E. Näytä, että $\|x\| = \max\{\|x\|_1, \|x\|_2\}$, $x \in E$, määrittelee normin avaruudessa E. Etsi lisäksi esimerkki sellaisista normeista $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ tasossa $\mathbf{R}^2$, että $\|x\|_0 = \min\{\|x\|_1, \|x\|_2\}$ ei ole normi tasossa.

2:5 Olkoon $(E, \|\cdot)$ normiavaruus ja $F \subset E$ aito vektorialiavaruus (siis $F \neq E$). Voiko F olla avoin joukko avaruudessa E? [*Vihje:* jos $x \in E \setminus F$, mieti mitä tapahtuu puolisuoralla $\{\lambda x : \lambda > 0\}$.]

2:6. Tutki ovatko seuraavat joukot avoimia (avaruuksien vastaavien sup-normien suhteen):

$$A = \{f \in C(0,1) : f(t) > 0 \text{ kaikilla } t \in [0,1]\},$$

$$B = \{(x_k)_{k=1}^\infty \in \ell^\infty : x_k > 0 \text{ kaikilla } k \in \mathbf{N}\}.$$

2:7. Olkoon $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) \in \ell^1$ (ykkönen n:nellä paikalla) kun $n = 1, 2, \ldots$. Asetetaan $A = \{e_n : n \in \mathbf{N}\}$ ja $B = \{-e_n + \frac{1}{n} e_1 : n \in \mathbf{N}\}$. Perustele miksi A ja B ovat avaruuden ℓ^1 suljettuja ja rajoitettuja joukkoja, mutta summajoukko $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ ei ole suljettu.

2:8. Näytä, että $c_0 = \{(x_n) \in \ell^\infty : \lim_n x_n = 0\}$ on avaruuden ℓ^∞ suljettu vektorialiavaruus sup-normin $\|\cdot\|_\infty$ suhteen. Osoita lisäksi että c_0 on separoituva normiavaruus. [*Vihje:* Tarkista, että finiittisten jonojen joukko $c_{00} = \{(x_n) : x_n \neq 0 \text{ äärellisen monella } n\}$ on separoituva ja tiheä c_0:ssa.]

2:9. Osoita, että rajoitettujen jonojen avaruus $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ ei ole separoituva. [*Vihje*: Tutki esimerkiksi karakterististen funktioiden $\{\chi_A : A \subset \mathbf{N}\} \subset \ell^\infty$ muodostamaa jonoperhettä, tai diagonalisoi. Edellä $\chi_A(n) = 1$ jos $n \in A$ ja $\chi_A(n) = 0$ muulloin. Voit vapaasti käyttää tietoa, että potenssijoukko $\mathcal{P}(\mathbf{N}) = \{A : A \subset \mathbf{N}\}$ on ylinumeroituva.]

2:10. Olkoon $1 < p < \infty$. Etsi sellainen jono $(x^{(n)}) \subset \ell^p$, että $\|x^{(n)}\|_p \leq 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja jonolla $(x^{(n)})$ ei ole normissa $\|\cdot\|_p$ suppenevia osajonoja. Tässä $x^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k=1}^{\infty} \in \ell^p$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$. [*Huom.:* Tämän esimerkin perusteella suljettu yksikköpallo B_{ℓ^p} siis ei ole kompakti joukko avaruudessa ℓ^p.]

2:11. Olkoon $1 \leq p < q < \infty$. Näytä, että $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ kun $x = (x_n) \in \ell^p$. Päättele, että $\ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^q \subset c_0$ kun $1 \leq p < q < \infty$. [*Vihje.* Tutki aluksi sellaista jonoa $x = (x_n) \in \ell^p$ jolle $\|x\|_p = 1$.]

2:12. Määritellään

$$Tf(x) = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{t}} f(t)dt, \quad x \in [0,1],$$

kaikilla $f \in C(0,1)$. Näytä, että T on (hyvin määritelty) rajoitettu lineaarinen kuvaus $C(0,1) \to C(0,1)$. Anna jokin yläarvio T:n normille $\|T\|$.

2:13. Olkoon E normiavaruus ja $T : E \to \mathbb{R}$ lineaarinen kuvaus. Kuvauksen T *ydin* on

$$Ker(T) = \{x \in E : Tx = 0\}.$$

Osoita: T on jatkuva jos ja vain jos $Ker(T)$ on E:n suljettu vektorialiavaruus. [*Vihje:* suuntaan "$\Leftarrow$" oleta, ettei T ole jatkuva origossa ja näytä, että $Ker(T)$ ei ole suljettu. Lauseen 2.30 nojalla on jokaisella $n \in \mathbb{N}$ olemassa sellaiset vektorit $x_n \in E$, että $\|x_n\| = 1$ ja $Tx_n \geq n$. Olkoon $y_n = \frac{y_n}{Tx_n}$ kun $n \in \mathbb{N}$. Koska $T \neq \overline{0}$ on olemassa $x \in E$ jolle $Tx = 1$. Kirjoita $x = x - y_n + y_n$, sekä totea että $x - y_n \in Ker(T)$ kaikilla n ja lisäksi $y_n \to 0$ kun $n \to \infty$.]

3. Täydellisyys ja Banachin avaruus

Reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ (varustettuna normilla $|x-y|$) eroaa ratkaisevasti rationaalilukujen joukosta $\mathbb{Q}$ seuraavan ominaisuutensa perusteella: reaalilukujono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee $\mathbb{R}$:ssä jos ja vain jos (x_n) on Cauchyn jono (ts. (x_n) toteuttaa Cauchyn suppenemisehdon). Tätä reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ ominaisuutta sanotaan täydellisyydeksi. Toisena esimerkkinä mainitaan avaruus

$$E = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} |\ f \text{ on Riemann-integroituva}\}$$

varustettuna seminormilla

$$\| f \|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt, \quad f \in E.$$

Avaruus $(E, \| \cdot \|_1)$ ei ole täydellinen (todistus sivuutetaan); tämä puute oli eräs keskeisistä syistä Lebesgue integraalin käyttöönottoon ja kehittämiseen.

Yleisemmällä tasolla, (esim. differentiaali)yhtälöitä ratkaistaan tyypillisesti hakemalla approksimatiivisia ratkaisuja, ja lähes säännöllisesti funktioavaruuksilta vaaditaan täydellisyyttä, jotta approksimatiivisille ratkaisuille löydetään jokin rajafunktio.

3.1. **Määritelmä.** Normiavaruuden $(E, \| \cdot \|)$ jono $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on *Cauchyn jono*, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen luku $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että

$$\| x_k - x_j \| < \varepsilon$$

aina kun $k \geq m_\varepsilon$ ja $j \geq m_\varepsilon$.

Huomautus. Kun tarkastellaan jonon $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ määräämiä loppuosan joukkoja $A_m = \{ x_n : \ n \geq m \}$, missä $m = 1, 2, \ldots$, niin huomataan näiden halkaisijoitten avulla, että:

(x_n) on Cauchyn jono $\Leftrightarrow$ $\lim_{m \to \infty} \operatorname{diam}(A_m) = 0$.

Edellä joukon $A \subset E$ *halkaisija* on $\operatorname{diam}(A) = \sup_{x,y \in A} \| x - y \|$.

Seuraava lause kertoo hyvin Cauchy jonojen perusominaisuudet (erikoistapauksessa $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ nämä ominaisuudet esiintyvät jo Analyysi I:ssä).

3.2. **Lause.** *Normiavaruudessa E,*

jono (x_n) suppenee $\Rightarrow$ (x_n) on Cauchyn jono $\Rightarrow$ (x_n) on rajoitettu.

Tarkemmin, viimeinen ehto sanoo, että on olemassa $M < \infty$ jolle $\|x_n\| \leq M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Todistus. Olkoon $\lim_n x_n = y$ eli $\lim_n \| x_n - y \| = 0$. Jos $\varepsilon > 0$, on olemassa sellainen $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että

$$\| x_n - y \| < \tfrac{\varepsilon}{2} \quad \text{kaikilla } n \geq m_\varepsilon.$$

Siis kun $j,\, k \geq m_\varepsilon$, niin $\| x_k - x_j \| \overset{\Delta-ey}{\leq} \| x_k - y \| + \| y - x_j \| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Siis suppenevat jonot ovat Cauchyn jonoja.

Toisaalta, Olkoon $(x_n) \subset E$ Cauchy jono ja $A_m = \{\, x_n : \; n \geq m \,\}$. Koska (x_n) on Cauchy jono, niin on siis olemassa sellainen $m_0 \in \mathbb{N}$, että $\operatorname{diam}(A_{m_0}) < 1$. Jos $y \in A_{m_0}$, niin kolmioepäyhtälön avulla saadaan

$$\| y \| \overset{\Delta-ey}{\leq} \| y - x_{m_0} \| + \| x_{m_0} \| < 1 + \| x_{m_0} \|.$$

Siispä täyden jonon (x_n) vektoreille saamme arvion

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \| x_n \| \leq \max\{ \| x_1 \|, \| x_2 \|, \ldots, \| x_{m_0 - 1} \|, 1 + \| x_{m_0} \| \} < \infty.$$

$\square$

Kumpikaan edellisen lauseen implikaatioista ei päde suuntaan "$\Leftarrow$". Harjoitukset anatavat esimerkin rajoitetusta jonosta, jolla ei ole edes osajonoja, jotka olisivat Cauchyn jonoja. Toisaalta, vaatimus että jokainen Cauchyn jono suppenee johtaa seuraavaan Funktionaalianalyysissä olennaiseen käsitteeseen.

3.3. **Määritelmä.** Normiavaruus $(E, \| \cdot \|)$ on *täydellinen*, jos avaruuden E jokainen Cauchyn jono (x_n) suppenee avaruudessa E (siis on olemassa sellainen $y \in E$, että $\lim_n x_n = y$).

Täydelliset normiavaruudet ovat funktionaalianalyysin keskeinen tutkimuskohde ja työkalu, joten näille on otettu käyttöön oma nimi (puolalaisen Stefan Banach'in (1892-1945) mukaan, joka merkittävällä tavalla kehitti alaa).

3.4. **Määritelmä.** Täydellistä normiavaruutta $(E, \| \cdot \|)$ sanotaan *Banachin avaruudeksi* (usein sanomme lyhyesti: E on Banachin avaruus).

Selvitetään seuraavaksi mitkä edellisessä luvussa löydetyistä avaruuksista ovat täydellisiä, ja erityisesti, kuinka käytännössä näytetään että annettu normiavaruus on täydellinen. Olkoon siis ensin $A \neq \emptyset$ joukko ja

$$B(A, \mathbb{K}) = B(A) := \{ x : A \to \mathbb{K} |\; x \text{ rajoitettu kuvaus} \},$$

varustettuna normilla

$$\| x \|_\infty = \sup_{t \in A} |x(t)|, \quad \text{kun } x \in B(A, \mathbb{K}).$$

3.5. **Lause.** $(B(A, \mathbb{K}), \| \cdot \|_\infty)$ *on Banachin avaruus.*

Todistus. Todistus perustuu skalaarikunnan $\mathbb{K}$ täydellisyyteen. Nimittäin, olkoon (x_n) Cauchyn jono avaruudessa $B(A,\mathbb{K})$, $\varepsilon > 0$ ja $t \in A$ mielivaltainen. Koska on olemassa sellainen indeksi m_ε, että

$$|x_k(t) - x_j(t)| \le \| x_k - x_j \|_\infty < \varepsilon \tag{3.6}$$

kun indeksit $k, j \ge m_\varepsilon$, on skalaarijono $(x_k(t))_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyn jono skalaarikunnassa $\mathbb{K}$. Tällöin on siis olemassa raja-arvo $\lim_n x_n(t) \in \mathbb{K}$, sillä metriset avaruudet $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tai $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ovat täydellisiä. (Tapaus $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ palautetaan mieliin alla.) Pitämällä $t \in A$ muuttujana saadaan (yksikäsitteisestä) raja-arvosta kuvaus $y : A \to \mathbb{K}$,

$$y(t) := \lim_{n\to\infty} x_n(t), \quad t \in A.$$

Lauseen väite seuraa osoittamalla seuraavat apuväitteet:

(i) kuvaus $y \in B(A,\mathbb{K})$, eli y on rajoitettu kuvaus $A \to \mathbb{K}$,

(ii) $\| x_n - y \|_\infty \to 0$, kun $n \to \infty$, eli $x_n \to y$ avaruudessa $B(A,\mathbb{K})$.

Tätä varten, olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen, ja käytetään arviota (3.6), joka pätee *tasaisesti* jokaisella $t \in A$. Pidetään siinä $k \ge m_\varepsilon$ sekä $t \in A$ kiinteinä, ja annetaan $j \to \infty$. Silloin

$$\lim_{j\to\infty} |x_k(t) - x_j(t)| = |x_k(t) - y(t)|,$$

koska yo. tarkastelee vain skalaarilukuja $x_j(t)$ ja skalaarien normi $|\cdot|$ on jatkuva. Epäyhtälön (3.6) säilyminen rajalla takaa, että

$$|x_k(t) - y(t)| \le \varepsilon \quad \text{kun } t \in A \text{ ja } k \ge m_\varepsilon. \tag{3.7}$$

Tästä saadaan ensinnäkin että

$$|y(t)| \le |y(t) - x_k(t)| + |x_k(t)| \le \varepsilon + \| x_k \|_\infty \ \text{ kun } t \in A,$$

eli että $y \in B(A,\mathbb{K})$. Toiseksi (3.7) pätee tasaisesti, so. samalla yläarviolla ε jokaisessa pisteessä $t \in A$, joten saadaan

$$\| x_k - y \|_\infty = \sup_{t\in A} |x_k(t) - y(t)| \le \varepsilon \ \text{ kaikilla } k \ge m_\varepsilon.$$

Olemme näin näyttäneet, että $\lim_k x_k = y$ avaruudessa $B(A,\mathbb{K})$, eli suppeneminen tapahtuu ko. avaruuden *normin* suhteen.

Ylläolevat argumentit yhdistäen nähdään että $(B(A), \|\cdot\|_\infty)$ on Banachin avaruus.

(*Muistutus:* $(\mathbb{C}, |\cdot|)$:n täydellisyys palautuu $\mathbb{R}$:n vastaavaan ominaisuuteen. Edellä $|z| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}$ kun $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Olkoon $(z_n) \subset \mathbb{C}$ Cauchyn jono, missä $z_n = a_n + ib_n$ kun $n \in \mathbb{N}$. Koska $|a_n - a_m| \le |z_n - z_m|$ kaikilla $n, m \in \mathbb{N}$, niin $(a_n) \subset \mathbb{R}$ on Cauchyn jono, joten $\lim_n a_n = a$ on olemassa.

Samoin imaginaariosat (b_n) muodostaa $\mathbb{R}$:n Cauchyn jono, joten $b_n \to b$ kun $n \to \infty$. Tällöin $\lim_n z_n = a + ib$, koska

$$|z_n - (a+ib)| = \sqrt{|a_n - a|^2 + |b_n - b|^2} \to 0, \qquad \text{kun } n \to \infty.)$$

$\square$

Erikoistapauksina $A = \{1, \ldots, n\}$ ja $A = \mathbb{N}$ saadaan tästä

3.8. **Seuraus.** *(1) Vektoriavaruus $\mathbb{K}^n$ varustettuna metriikalla*

$$\| x \|_\infty = \sup_{1 \le i \le n} |x_i|, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n,$$

on Banachin avaruus.
(2) $(\ell^\infty, \| \cdot \|_\infty)$ on Banachin avaruus.

Annetaan myös konkreettinen esimerkki *epätäydellisestä* normiavaruudesta.

3.9. **Esimerkki.** $(c_{00}, \| \cdot \|_\infty)$ ei ole täydellinen normiavaruus, kun

$$c_{00} = \{(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty : x_n \neq 0 \text{ vain äärellisen monella } n \in \mathbb{N}\},$$

ja

$$\| (x_k) \|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|, \quad (x_k) \in c_{00}.$$

Ratkaisu: $(c_{00}, \| \cdot \|_\infty)$ on normiavaruus, koska $c_{00} \subset c_0$ on vektorialiavaruus. Olkoon $x^{(n)} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots)$, kun $n \in \mathbb{N}$. Selvästi $x^{(n)} \in c_{00}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Toisaalta kaikilla $n, p \in \mathbb{N}$ pätee

$$\begin{aligned} \| x^{(n+p)} - x^{(n)} \|_\infty &= \| (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n \text{ kpl}}, \tfrac{1}{n+1}, \ldots, \tfrac{1}{n+p}, 0, 0, \ldots) \|_\infty \\ &= \sup_{n+1 \le j \le n+p} \frac{1}{j} = \frac{1}{n+1} \to 0 \end{aligned}$$

kaikilla $p \in \mathbb{N}$, kun $n \to \infty$. Siispä $(x^{(n)})$ Cauchyn jono avaruudessa $(c_{00}, \| \cdot \|_\infty)$.

Väite epätäydellisyydestä seuraa, kun osoitetaan, ettei ole olemassa jonoa $y = (y_k) \in c_{00}$, jolle

$$\lim_{n \to \infty} \| x^{(n)} - y \|_\infty = 0.$$

Tehdään vastaoletus: oletetaan, että todella löytyisi sellainen $y = (y_k) \in c_{00}$, että $x^{(n)} \to y$ sup-normissa. Jonon $(x^{(n)})$ alkioiden k :nnet koordinaatit $x_k^{(n)}$ ovat muotoa

$$x_k^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{k}, & 1 \le k \le n \\ 0, & k > n, \end{cases}$$

ja kaikilla indekseillä $k \in \mathbb{N}$ pätee

$$|x_k^{(n)} - y_k| \le \| x^{(n)} - y \|_\infty \to 0,$$

kun $n \to \infty$. Siksi

$$y_k = \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k} = \frac{1}{k},$$

kun $k = 1, 2, \ldots$. Toisaalta, $y = \left(\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}} \notin c_{00}$, mikä on ristiriidassa vastaoletuksen kanssa. Siis $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ on epätäydellinen. $\square$

3.10. *Huomautus.* (1) Reaalikertoimisten polynomien muodostama normiavaruus

$$\mathcal{P} = \{\, p\colon [0,1] \to \mathbb{R} :\ p \text{ polynomi} \,\}$$

varustettuna sup-normilla

$$\|\, p \,\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |p(t)|$$

ei ole täydellinen. (Muista Analyysi II:sta, että $e^t = \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{k!}$ kaikilla $t \in [0,1]$, ja tarkastele polynomeja $p_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}$, kun $n \in \mathbb{N}$). Samoin, jos $\mathcal{P}$ varustetaan luvun 2 Esimerkissa 2.13.(2) annetuilla normeilla $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$, niin vastaavasti osoittautuu että $\mathcal{P}$:stä ei tule täydellistä.

(2) Lauseessa 3.23 näytämme, että $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ on Banachin avaruus kaikilla $1 \le p < \infty$. Sen sijaan, Esimerkin 3.9 ideaa muokkaamalla voidaan nähdä, että jos $1 \le p < q < \infty$, niin normiavaruudet $(\ell^p, \|\cdot\|_q)$ ja $(\ell^p, \|\cdot\|_\infty)$ eivät ole täydellisiä. (Muista, että $\ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^q \subset c_0$ kaikilla $1 \le p < q < \infty$, vrt. HT 2:10).

Seuraavan tuloksen avulla saadaan lisää esimerkkejä Banachin avaruuksista.

3.11. **Lause.** *Olkoon E Banachin avaruus ja $M \subset E$* suljettu *aliavaruus. Tällöin M on täydellinen, eli Banachin avaruus, avaruuden E indusoimassa normissa.*

Muistutus: $M \subset E$ on suljettu jos ja vain jos sulkeuma $\overline{M} = M$, missä $x \in \overline{M}$ jos $B(x,r) \cap M \neq \emptyset$ kaikilla $r > 0$.

Todistus. Jos $(x_n) \subset M$ on Cauchyn jono avaruudessa M, niin (x_n) on myös avaruuden E Cauchyn jono. Koska E täydellinen, niin on olemassa sellainen raja-alkio $y \in E$, että $\lim_n x_n = y$. Koska M on suljettu ja $x_n \in M$ kaikilla n, niin raja $y \in \overline{M} = M$, joten M on täydellinen. $\square$

Edellinen tulos pätee myös käänteiseen suuntaan:

3.12. **Lause.** *Normiavaruuden E täydellinen aliavaruus M on suljettu avaruudessa E.*

Todistus. Olkoon $z \in \overline{M}$ mielivaltainen. Koska $M \cap B(z, 1/n) \neq \emptyset$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$, niin voidaan löytää sellainen jono $(x_n) \subset M$, että $\lim_n x_n = z$. Tällöin $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono avaruudessa E Lauseen 3.2 nojalla ja siten myös avaruudessa M, joten avaruuden M täydellisyyden nojalla $\lim_n x_n = y \in M$ on olemassa. Raja-arvon yksikäsitteisyyden nojalla on oltava $z = y \in M$, joten siis $\overline{M} = M$ ja M on suljettu avaruudessa E. □

3.13. **Seuraus.** *Olkoon M Banachin avaruuden E vektorialiavaruus. Tällöin M on täydellinen (eli Banachin avaruus E:n indusoimassa normissa) $\Leftrightarrow$ M on suljettu.*

Todistus. Seuraa välittömästi Lauseista 3.11 ja 3.12. □

Käytämme seuraavaksi näitä tietoja tutkimaan jatkuvien kuvausten avaruuksia.

3.14. **Esimerkki.** Olkoon X metrinen avaruus, ja

$$C(X) = C(X, \mathbb{K}) := \{f : X \to \mathbb{K} |\ f \text{ jatkuva avaruudessa } X\}$$

Jos $f, g \in C(X)$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$, niin pisteittäinen summafunktio $f + g \in C(X)$ ja $\lambda f \in C(X)$, jolloin avaruudesta $C(X)$ tulee vektoriavaruus. Merkitään

$$BC(X) = BC(X, \mathbb{K}) := B(X, \mathbb{K}) \cap C(X),$$

eli jatkuvien ja rajoitettujen kuvausten $X \to \mathbb{K}$ avaruus. Siis $BC(X)$ on avaruuden $B(X) := B(X, \mathbb{K})$ vektorialiavaruus.

Kysymys. Onko $BC(X) \subset B(X)$ suljettu (normin $\|\cdot\|_\infty$ suhteen)?

Olkoon $t \in X$ kiinteä, ja asetetaan

$$BC_t(X) = \{\ f \in B(X) : \ f \text{ on jatkuva pisteessä } t\ \}.$$

Huomautus. (Topo I) $f : X \to \mathbb{K}$ on jatkuva pisteessä $t \in X$, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen pisteen t avoin ympäristö V, $t \in V \subset X$, että

$$|f(u) - f(t)| < \varepsilon \text{ kaikilla } u \in V.$$

3.15. **Lemma.** *$BC_t(X)$ on avaruuden $B(X)$ suljettu vektorialiavaruus kaikilla $t \in X$.*

Todistus. Olkoon $g \in B(X)$ sellainen funktio $X \to \mathbb{K}$, että g sisältyy vektorialiavaruuden $BC_t(X)$ sulkeumaan sup-normin $\|\cdot\|_\infty$ suhteen. Olkoon $\varepsilon > 0$ annettu. Tällöin on olemassa sellainen $f \in BC_t(X)$, että $\|\, g - f\,\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$. Koska funktio f on jatkuva pisteessä t, niin löytyy sellainen avoin ympäristö $t \in V \subset X$, että

$$|f(t) - f(u)| < \tfrac{\varepsilon}{3} \text{ kaikilla } u \in V.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}|g(t)-g(u)| &\le \underbrace{|g(t)-f(t)|}_{\le\|g-f\|_\infty} + |f(t)-f(u)| + \underbrace{|f(u)-g(u)|}_{\le\|g-f\|_\infty}\\ &\le 2\underbrace{\|g-f\|_\infty}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon\end{aligned}$$

kaikilla $u \in V$. Siis g on jatkuva pisteessä t, joten $g \in BC_t(X)$ ja siis $BC_t(X)$ on suljettu. $\square$

3.16. **Lause.** *Olkoon X metrinen avaruus. Tällöin $(BC(X), \|\cdot\|_\infty)$ on Banachin avaruus.*

Todistus. Koska f on jatkuva avaruudessa X jos ja vain jos f on jatkuva kaikissa pisteissä $t \in X$, niin

$$BC(X) = \bigcap_{t\in X} BC_t(X),$$

missä $BC_t(X)$ on suljettu kaikilla $t \in X$ Lemman 3.15 nojalla. Siis $BC(X)$ on suljettu (vektori)aliavaruus avaruudessa $B(X)$. Nyt väite seuraa Lauseista 3.5 ja 3.11. $\square$

3.17. **Seuraus.** *Jos X on kompakti metrinen avaruus, niin $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ on Banachin avaruus. Erityisesti, $(C(0,1), \|\cdot\|_\infty)$ on Banachin avaruus.*

Muistutus: Metrinen avaruus X on *kompakti* jos jokaisella jonolla $(x_n) \subset X$ on suppeneva osajono $(x_{n_j})_{j=1}^\infty$, eli siis $x_{n_j} \to y$ kun $j \to \infty$ sopivalla $y \in X$. Esimerkiksi, osajoukko $B \subset \mathbb{R}^n$ on kompakti jos ja vain jos B on suljettu ja rajoitettu (ns. Heine-Borelin lause, [Väisälä: Topologia I], Lause 13.14).

Todistus. Käytetään Topo I:n tulosta jonka mukaan kompaktissa metrisessä avaruudessa X jokainen jatkuva kuvaus $f : X \to \mathbb{K}$ on rajoitettu, eli $C(X) = BC(X)$. $\square$

Huomautus. (1) Edelläolevan merkinnän mukaan siis $C(0,1) \equiv C([0,1])$. Sen sijaan vektoriavaruudessa $C((0,1)) = \{f : (0,1) \to \mathbb{R} |\ f$ jatkuva välillä $(0,1)\}$ ei ole edes "järkevää" normia (vrt. Harjoitukset 2)!
(2) Lause 3.16 ja Seuraus 3.17 pätevät myös samoilla todistuksilla kun yleisemmin X on *topologinen* avaruus. Tässä tapauksessa kompaktisuus määritellään avoimien peitteiden avulla (katso [Väisälä: Topologia I], Lause 13.39).

Esimerkin 2.10 kohdassa (2) esiteltiin avaruuden ℓ^∞ aliavaruudet c ja c_0.

$$\begin{aligned}c &:= \{x = (x_n)_{n=1}^\infty : x_n \in \mathbb{K}\ \forall n \in \mathbb{N}, \lim_n x_n \text{ on olemassa}\},\\ c_0 &:= \{x = (x_n)_{n=1}^\infty : x_n \in \mathbb{K}\ \forall n \in \mathbb{N}, \lim_n x_n = 0\}.\end{aligned}$$

3.18. **Lause.** *c ja c_0 ovat Banachin avaruuksia (sup-normin suhteen).*

Todistus. (1) $c_0 \subset \ell^\infty$ on *suljettu* vektorialiavaruus (Harjoitukset 1)
(2) $c \subset \ell^\infty$ on suljettu:
Olkoon $x = (x_k) \in \ell^\infty$ sellainen jono, että $x \in \overline{c}$. Kun $\varepsilon > 0$, niin löytyy sellainen jono $y = (y_k) \in c$, että

$$\| x - y \|_\infty < \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

Koska (y_k) on suppeneva jono, niin erityisesti (y_k) on skalaarikunnan $\mathbb{K}$ Cauchyn jono. Siis on olemassa sellainen $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että

$$|y_j - y_k| < \tfrac{\varepsilon}{3}$$

kaikilla $j, k \geq m_\varepsilon$. Tällöin

$$\begin{aligned} |x_j - x_k| &\overset{\triangle-\text{ey}}{\leq} |x_j - y_j| + |y_j - y_k| + |y_k - x_k| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

kaikilla $j, k \geq m_\varepsilon$. Koska $\varepsilon > 0$ mielivaltainen, niin $x = (x_k)$ on myös skalaarikunnan $\mathbb{K}$ Cauchyn jono. Siispä (x_k) suppenee, joten $x \in c$. Siis $c = \overline{c}$ on suljettu, joten Lauseen 3.11 nojalla c on Banachin avaruus. □

Huomautus. Olkoon $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ja varustetaan se topologialla τ, jonka kantana ovat joukot

$$U = \{n\} \quad \text{ja} \quad V = \{\infty\} \cup \{\, k \in \mathbb{N} : \ k \geq m \,\}, \quad \text{missä } n, m \in \mathbb{N}.$$

Saatu avaruus $(\overline{\mathbb{N}}, \tau)$ on $\mathbb{N}$:n yhden pisteen kompaktifiointi. Tällöin itse asiassa $c = C(\overline{\mathbb{N}})$. Siten Lause 3.18 seuraa myös Seurauksesta 3.17.

Vektoriarvoisista sarjoista

Olkoon E normiavaruus ja $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jono avaruudessa E. Mietimme seuraavaksi vastaavan vektorisarjan $\sum_{j=1}^\infty x_j$ summautumista. Toisin sanoen, pätevätkö tutut sarjateorian perusteet myös äärettömän dimension tapauksessa ?

Sarjaa merkitään tavallisesti symbolilla $\sum_k x_k$ tai $\sum x_k$. Sen osasummille käytetään tuttuja merkintöjä,

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{j=1}^n x_j \quad \text{kun } n \in \mathbb{N},$$

jolloin siis $s_n \in E$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Edelleen, alkio $x_k \in E$ on sarjan k:s *termi*.

3.19. **Määritelmä.** Olkoon $\sum x_k$ normiavaruuden E alkioiden muodostama sarja. Mikäli osasummien jono $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee kohti vektoria $s \in E$, eli

$$\lim_{n\to\infty} \| s_n - s \| = 0,$$

sanotaan että sarja $\sum_k x_k$ *suppenee* E:ssa ja sen *summa* on s; merkitään tällöin

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

Sanotaan, että E:n sarja $\sum_k x_k$ on *absoluuttisesti* suppeneva (joskus myös: *normisuppeneva*), jos positiiviterminen sarja $\sum_k \| x_k \|$ suppenee ($\mathbb{R}$:ssä).

3.20. **Esimerkki.** Olkoon $e_n = (0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n:s}, 0, \ldots) \in \ell^2$, kun $n \in \mathbb{N}$. Suppeneeko sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{n}$ avaruudessa ℓ^2? Entä suppeneeko $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{n}$ absoluuttisesti ℓ^2:ssa?

Ratkaisu: Olkoon $x = (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$. Nyt $x \in \ell^2$ koska (Analyysi II)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Tällöin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{n}$ suppenee ℓ^2:ssa ja sen summa $\sum \frac{e_n}{n} = x$. Nimittäin, sarjan m:s osasumma s_m on

$$s_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{e_n}{n} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{m}, 0, 0, \ldots),$$

ja siis

$$\| x - s_m \|_2 = \| (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m\ kpl}, \frac{1}{m+1}, \frac{1}{m+2}, \ldots) \|_2 = \Big(\sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \Big)^{1/2} \to 0,$$

kun $m \to \infty$; kyseessä on suppenevan sarjan jäännöstermi. Kuitenkaan sarja $\sum \frac{e_n}{n}$ *ei ole* absoluuttisesti suppeneva avaruudessa ℓ^2, sillä Analyysi II:n nojalla (harmoninen sarja)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big\| \frac{e_n}{n} \Big\|_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \| e_n \|_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

$\square$

Täydellisyyden ja absoluuttisesti suppenevien sarjojen välillä on tärkeä yhteys. Ennen tätä tulosta tarvitaan seuraava hyödyllinen *riittävä* ehto Cauchyn jonon suppenemiselle.

3.21. **Lause.** *Jos normiavaruuden E Cauchyn jonolla (x_n) on osajono (x_{n_j}), joka suppenee kohti vektoria $y \in E$, niin myös koko jonolle pätee* $\lim_n x_n = y$.

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Valitaan Cauchyn ehdosta sellainen $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että

$$\| x_k - x_j \| < \tfrac{\varepsilon}{2} \text{ kaikilla } k, j \geq m_\varepsilon.$$

Koska $\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = y$, niin on olemassa sellainen indeksi $j_\varepsilon \in \mathbb{N}$ että kaikilla $j \geq j_\varepsilon$ pätee $n_j \geq m_\varepsilon$ ja $\| x_{n_j} - y \| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tällöin, jos $j \geq j_\varepsilon$ on kiinteä, niin

$$\| x_n - y \| \leq \| x_n - x_{n_j} \| + \| x_{n_j} - y \| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

kaikilla $n \geq m_\varepsilon$. Siis $\lim_n x_n = y$. □

3.22. **Lause.** *Normiavaruus E on Banachin avaruus jos ja vain jos jokainen avaruuden E absoluuttisesti suppeneva sarja $\sum_k x_k$ suppenee avaruudessa E.*

Todistus.
"$\Rightarrow$" Olkoon E Banachin avaruus ja $\sum_k x_k$ avaruuden E absoluuttisesti suppeneva sarja. Jos $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$, ja $s_m = \sum_{k=1}^m x_k$ on sarjan m:s osasumma, niin

$$\begin{aligned} \| s_{n+p} - s_n \| &= \| \sum_{j=1}^{n+p} x_j - \sum_{j=1}^{n} x_j \| = \| x_{n+1} + \cdots + x_{n+p} \| \\ &\overset{\triangle-\text{ey}}{\leq} \sum_{j=n+1}^{n+p} \| x_j \| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \| x_j \| \to 0 \end{aligned}$$

kaikilla $p \in \mathbb{N}$, kun $n \to \infty$ (suppenevan sarjan jäännöstermi). Siis (s_n) on Cauchyn jono avaruudessa E, joten se suppenee.
"$\Leftarrow$" Oletetaan, että avaruuden E jokainen absoluuttisesti suppeneva sarja suppenee. Olkoon (x_n) Cauchyn jono avaruudessa E. Lauseen 3.21 nojalla riittää löytää suppeneva osajono (x_{n_j}). Konstruoidaan osajono (x_{n_j}) induktiolla seuraavasti:

Koska (x_n) on Cauchyn jono, niin löytyy sellainen $n_0 \in \mathbb{N}$, että

$$\| x_p - x_q \| < \frac{1}{2}$$

kaikilla $p, q \geq n_0$. Oletetaan, että on jo valittu luvut $n_0 < n_1 < \ldots < n_j$ joille

$$\| x_p - x_q \| < \frac{1}{2^{k+1}}$$

kaikilla $p, q \geq n_k$ ja $k = 0, 1, \ldots, j$. Valitaan seuraavaksi n_{j+1}. Koska jono (x_n) on Cauchyn jono, niin löytyy sellainen $n_{j+1} \in \mathbb{N}$, että $n_{j+1} > n_j$ ja

$$\| x_p - x_q \| < \frac{1}{2^{j+2}}$$

kaikilla $p, q \geq n_{j+1}$. Näin jatkamalla saadaan osajono $(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}$.

Merkitään nyt $y_0 = x_{n_0}$, $y_j = x_{n_j} - x_{n_{j-1}}$ kun $j = 1, 2, \ldots$. Tällöin $\| y_j \| = \| x_{n_j} - x_{n_{j-1}} \| < \frac{1}{2^j}$ kaikilla $j = 1, 2, \ldots$, sillä $n_j > n_{j-1}$ ja arvio seuraa valitsemalla $p = n_j$ ja $q = n_{j-1}$.

Siispä sarja $\sum y_j$ on absoluuttisesti suppeneva, sillä

$$\sum_{j=0}^{\infty} \| y_j \| < \|y_0\| + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} < \infty.$$

Oletuksen nojalla sarja $\sum y_j$ siis suppenee. Merkitään sarjan summaa

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} y_j$$

ja tarkastellaan sarjan $\sum_{j=0}^{\infty} y_j$ osasummia. Havaitaan, että itse asiassa

$$\sum_{j=0}^{k} y_j = x_{n_0} + (x_{n_1} - x_{n_0}) + \cdots + (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) = x_{n_k} \quad \text{kaikilla } k.$$

Näin ollen jonon (x_n) osajono $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ suppenee kohti pistettä $y \in E$. Tällöin Lauseen 3.21 nojalla siis myös jono (x_n) suppenee kohti pistettä y ja E on täydellinen. □

Lauseen 3.22 nojalla voidaan usein osoittaa avaruuden täydellisyys. Esimerkiksi reaalilukujen joukon R tapauksessa voidaan päätellä seuraavasti: Olkoon $\sum a_k$ itseisesti suppeneva sarja R:ssä. Merkitään $b_k = |a_k| - a_k$, kun $k \in \mathbb{N}$. Tällöin $0 \leq b_k \leq 2|a_k|$ kaikilla k, joten sarja $\sum b_k$ suppenee vertailuperiaatteen nojalla. Koska $a_k = |a_k| - b_k$, suppenee sarja $\sum a_k$ myös. Siis Lause 3.22 sanoo, että $\mathbb{R}$ on täydellinen.

Absoluuttisesti suppenevien sarjojen kriteerin avulla myös avaruuksien ℓ^p täydellisyys saadaan verraten ”kivuttomasti”.

3.23. **Lause.** *Jonoavaruus* $(\ell^p, \| \cdot \|_p)$ *on Banachin avaruus kaikilla* $1 \leq p < \infty$.

Todistus. Olkoon $\sum x^{(n)}$ absoluuttisesti suppeneva sarja avaruudessa ℓ^p, eli $x^{(n)} \in \ell^p$ kaikilla n ja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| x^{(n)} \|_p < \infty.$$

Jos merkitään jonoa $x^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^p$, niin

$$|x_k^{(n)}| \leq \Big(\sum_i |x_i^{(n)}|^p \Big)^{\frac{1}{p}} = \| x^{(n)} \|_p$$

kaikilla $k \in \mathbb{N}$, joten

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_k^{(n)}| < \infty, \qquad \text{kullakin } k \in \mathbb{N}.$$

Siten skalaarilukujen sarja $\sum_n x_k^{(n)}$ suppenee, sillä $\mathbb{K}$ on täydellinen. Merkitään

$$y_k = \sum_{n=1}^{\infty} x_k^{(n)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Olemme näin löytäneet uuden lukujonon $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Väitämme, että

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} x^{(n)},$$

missä sarjan suppeneminen tapahtuu avaruudessa ℓ^p.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Absoluuttisen suppenevuuden perusteella löytyy sellainen $m \in \mathbb{N}$, että

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \| x^{(n)} \|_p \leq \varepsilon.$$

Olkoon $i, r, s \in \mathbb{N}$, $m \leq r < s$. Koska kyseessä on äärellinen summa, niin saadaan itseisarvon jatkuvuuden avulla

$$\sum_{k=1}^{i} \Big| y_k - \sum_{n=1}^{r} x_k^{(n)} \Big|^p = \lim_{s\to\infty} \sum_{k=1}^{i} \Big| \sum_{n=1}^{s} x_k^{(n)} - \sum_{n=1}^{r} x_k^{(n)} \Big|^p = \lim_{s\to\infty} \sum_{k=1}^{i} \Big| \sum_{n=r+1}^{s} x_k^{(n)} \Big|^p.$$

Toisaalta, avaruuden ℓ^p kolmioepäyhtälön perusteella

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{i} \Big| \sum_{n=r+1}^{s} x_k^{(n)} \Big|^p &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \Big| \sum_{n=r+1}^{s} x_k^{(n)} \Big|^p = \Big\| \sum_{n=r+1}^{s} x^{(n)} \Big\|_p^p \\ &\leq \Big(\sum_{n=r+1}^{s} \| x^{(n)} \|_p \Big)^p \leq \Big(\sum_{n=r+1}^{\infty} \| x^{(n)} \|_p \Big)^p \leq \varepsilon^p. \end{aligned}$$

Kun annetaan tässä $s \to \infty$, niin

$$\sum_{k=1}^{i} \Big| y_k - \sum_{n=1}^{r} x_k^{(n)} \Big|^p \leq \varepsilon^p$$

kaikilla $i \in \mathbb{N}$ ja $r \geq m$. Antamalla lopuksi $i \to \infty$ nähdään, että

$$\| y - \sum_{n=1}^{r} x^{(n)} \|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} \Big| y_k - \sum_{n=1}^{r} x_k^{(n)} \Big|^p \leq \varepsilon^p,$$

kun $r \geq m$. Erityisesti siis jono $(y_k - \sum_{n=1}^{m} x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p$, joten Lauseen 2.23 sivulla 21 nojalla

$$y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}} = \Big(y_k - \sum_{n=1}^{m} x_k^{(n)} \Big)_{k\in\mathbb{N}} + \Big(\sum_{n=1}^{m} x_k^{(n)} \Big)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p.$$

Lisäksi

$$\Big\| y - \sum_{n=1}^{r} x^{(n)} \Big\|_p \leq \varepsilon \text{ kaikilla } r \geq m.$$

Näin ollen sarja $\sum x^{(n)}$ suppenee ja Lauseen 3.22 sivulla 40 nojalla ℓ^p on Banachin avaruus. $\square$

L^p-AVARUUDET

Haluamme seuraavaksi määritellä jonoavaruuden ℓ^p vastineet "jatkuvassa" tapauksessa, eli avaruudet joiden normit kuvauksille $f : \Omega \to \mathbb{K}$ saadaan suureista

$$\| f \|_p := \Big(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) \Big)^{1/p}.$$

Päädymme näin L^p-avaruuksien käsitteeseen. Tämän tarkempi/syvällisempi teoria kuuluu kursseihin *Mitta- ja integraali* sekä *Reaalianalyysi.* L^p-avaruudet ovat kuitenkin keskeisiä esimerkkejä Funktionaalianalyysissä ja sen sovelluksissa; lisäksi Hilbert-avaruuksien (todellisesta) käytöstä ei saa kunnon kuvaa ilman L^2-avaruuksia. Käymme siksi alla L^p-avaruuksien perusideat läpi, erityisesti niitä lukijoita silmällä pitäen, jotka eivät ole vielä suorittaneet yo. kursseja. Keskitymme nimenomaan ideoitten esittelyyn ja sivuutamme useiden mittateoreettisten väitteiden todistukset, jotka jäävät Mittateorian kursseilla käsiteltäviksi.

Tämän kurssin tarpeisiin riittää tarkastella (Lebesgue-)mitallisia osajoukkoja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ja n-ulotteista Lebesguen mittaa μ (allaoleva pätee kuitenkin myös yleisissä mitta-avaruuksissa (Ω, Σ, μ), missä Σ on jokin joukkoon Ω liittyvä σ-algebra ja μ on Σ:ssa määritelty positiivinen mitta). Muotoa

$$f = \sum_{k=1}^{m} a_k \chi_{E_k}$$

olevia funktioita kutsutaan yksinkertaisiksi funktioiksi; tässä $a_k \in \mathbb{K}$, $E_k \subset \Omega$ on mitallinen joukko kun $k = 1, \dots, m$. Edellä joukon E karakteristinen funktio on $\chi_E(x) = 1$ jos $x \in E$ ja $\chi_E(x) = 0$ kun $x \notin E$. Yksinkertaisen funktion $f = \sum_{k=1}^m a_k \chi_{E_k}$ integraali määritellään helposti kaavalla

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega f(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k \mu(E_k).$$

[Muista myös: m.k. $\equiv$ melkein kaikkialla, so. nollamittaisen joukon ulkopuolella.]

Yleisemmin, jos $0 \le f$ on mitallinen funktio, niin löytyy sellainen jono yksinkertaisia funktioita f_n, että $0 \le f_n \le f_{n+1} \le \cdots \le f$ ja $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ melkein kaikkialla. (Itse asiassa funktio on mitallinen jos ja vain jos se on yksinkertaisten funktioiden pisteittäinen raja m.k. $x \in \Omega$.) Asetetaan

$$\int_\Omega f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu, \tag{3.24}$$

missä funktioiden f_n integraalit muodostavat kasvavan lukujonon, ja siten yo. raja-arvo on olemassa (voi olla ∞).

Mittateoriassa näytetään että määritelmän (3.24) raja-arvo on riippumaton approksimoivan jonon (f_n) valinnasta. Lisäksi voi hyvin olla että (3.24):n raja-arvo, ja siten integraali $\int_\Omega f d\mu$, on ∞! Tämän pulman välttämiseksi sanotaan, että mitallinen funktio $f : \Omega \to \mathbb{K}$ on *integroituva*, mikäli $\int_\Omega |f|\, d\mu < \infty$.

Jos nyt $f : \Omega \to \mathbb{R}$ on integroituva mitallinen funktio, niin sen positiivinen osa $f_+ = \max\{f(x), 0\}$ ja negatiivinen osa $f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ ovat molemmat integroituvia, ja voimme asettaa

$$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f_+ d\mu - \int_\Omega f_- d\mu.$$

Kompleksiarvoiselle funktiolle $f = u + iv$ asetetaan lopuksi

$$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega u d\mu + i \int_\Omega v d\mu.$$

Mittateoriassa osoitetaan, että jos $\Delta \subset \mathbb{R}$ on suljettu ja rajoitettu väli, ja f on Riemann integroituva Δ:ssa (erityisesti, jos f on jatkuva !), niin silloin edellä määritelty integraali on täsmälleen sama kuin tuttu Riemann integraali!!

Olkoon sitten $1 \le p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen joukko ja $\mu(\Omega) > 0$, missä μ on Lebesguen mitta avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Määrittelemme aluksi joukon $L^{(p)}(\Omega) = L^{(p)}$ niiden mitallisten funktioiden $f\colon \Omega \to \mathbb{K}$ joukkona, joille

$$\| f \|_p := \Big(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) \Big)^{1/p} < \infty.$$

Jotta $L^{(p)}$ olisi vektoriavaruus, on näytettävä, että $\| \cdot \|_p$ on seminormi avaruudessa $L^{(p)}$. Tähän tarvitaan (kuten ℓ^p-avaruuksien tapauksessa) Hölderin epäyhtälöä.

3.25. **Lemma** (Hölderin epäyhtälö). *Jos $f \in L^{(p)}$ ja $g \in L^{(q)}$, missä $1 < p, q < \infty$ ja $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, niin tällöin (pisteittäinen) tulo $fg \in L^{(1)}$ ja*

$$\| fg \|_1 \le \| f \|_p \| g \|_q \quad , \textit{ eli}$$

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| d\mu(x) \le \Big(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_\Omega |g(x)|^q d\mu(x) \Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Todistus. Jos $\| f \|_p = 0$, niin $f(x) = 0$ m.k. $x \in \Omega$, jolloin myös tulo $f(x)g(x) = 0$ m.k. $x \in \Omega$ ja siis $\int |fg|\, \mathrm{d}\mu = 0$. Samoin pätee jos $\| g \|_q = 0$. Näissä tapauksissa väite on ilmeinen.

Voidaan siis olettaa, että $\| f \|_p \| g \|_q > 0$. Sovelletaan Lemmaa 2.17 sivulla 17 valitsemalla (kun $x \in \Omega$)

$$a = \frac{|f(x)|}{\| f \|_p} \quad \text{ja} \quad b = \frac{|g(x)|}{\| g \|_q},$$

mistä seuraa epäyhtälö

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\| f \|_p \| g \|_q} \le \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\| f \|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\| g \|_q^q}, \quad x \in \Omega.$$

Integroimalla tämä puolittain muuttujan x suhteen saadaan

$$\begin{aligned}\| f \|_p^{-1} \| g \|_q^{-1} \int_\Omega |fg| \, \mathrm{d}\mu &\le \frac{1}{p} \| f \|_p^{-p} \int_\Omega |f(x)|^p \, \mathrm{d}\mu + \frac{1}{q} \| g \|_q^{-q} \int_\Omega |g(x)|^q \, \mathrm{d}\mu \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.\end{aligned}$$

□

3.26. **Seuraus** (Minkowskin epäyhtälö)**.** *Jos* $f, g \in L^{(p)}$ *ja* $1 \le p < \infty$, *niin*

$$\| f + g \|_p \le \| f \|_p + \| g \|_p.$$

Todistus. HT. □

Koska selvästi $\| \lambda f \|_p = |\lambda| \| f \|_p$, niin $L^{(p)}$ on tämän ja Minkowskin epäyhtälön nojalla $\mathbb{K}$-kertoiminen vektoriavaruus. Mutta avaruudessa $L^{(p)}$ on se pulma, että $\| \cdot \|_p$ *ei ole* normi:

$$\| f \|_p = 0 \iff f(x) = 0 \text{ m.k. } x \in \Omega \,!$$

(Siis $f \mapsto \| f \|_p$ on vain *seminormi*). Pulmasta selvitäksemme, samaistamme kaikki ne funktiot, jotka ovat samoja m.k. x.

Seuraava esimerkki antaa mielikuvan mitä tämä samaistaminen käytännössä merkitsee. Integroidaan vaikkapa seuraava funktio välillä $[0, 1]$,

$$f(x) = x, \text{ kun } 0 \le x < 1/2 \text{ ja } f(x) = 3, \text{ kun } 1/2 \le x \le 1.$$

Voisimme myös asettaa (Piirrä funktioiden kuvaajat !)

$$g(x) = x, \text{ kun } 0 \le x \le 1/2 \text{ ja } f(x) = 3, \text{ kun } 1/2 < x \le 1,$$

koska ei ole mitään luonnollista tapaa valita f:n arvoa epäjatkuvuuspisteessä $x = 1/2$; selvästi molemmat valinnat ovat yhtä hyviä, ja integroinnin kannalta molemmat valinnat tuottavat saman tuloksen. Onkin siksi järkevää samaistaa nämä funktiot !

Yleisemmin, annetulla funktiolla voi olla paljon enemmän epäjatkuvuus- (tai ”epämääräisyys-)pisteitä, joten saman filosofian mukaan on järkevää samaistaa funktiot f ja g, jos $f(x) = g(x)$ nollamittaista x:ien joukkoa lukuunottamatta.

Täsmällistä määrittelyä varten sanotaan että funktiot f, $g \in L^{(p)}$ ovat ekvivalentit, merk. $f \sim g$, jos $f = g$ m.k. $x \in \Omega$ eli $\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0$. Asetetaan

$$[f] = \{g \in L^{(p)} : g \sim f\}, \; f \in L^{(p)}.$$

Huomataan, että jos $f_1 \sim g_1$ ja $f_2 \sim g_2$ niin $(f_1 + f_2) \sim (g_1 + g_2)$. Tämä seuraa siirtymällä komplementteihin inkluusiossa

$$\{x : f_1(x) = g_1(x)\} \cap \{x : f_2(x) = g_2(x)\} \subset \{x : f_1(x) + f_2(x) = g_1(x) + g_2(x)\}.$$

Samoin $af_1 \sim af_2$ jos $f_1 \sim f_2$ ja $a \in \mathbb{K}$. Näin ekvivalenssiluokat muodostavat vektoriavaruuden:

$$[af + bg] = a[f] + b[g] \quad \text{kun } f, g \in L^{(p)}, \; a, b \in \mathbb{K}.$$

(Selvitä itsellesi tämän yksityiskohdat !). Määritellään nyt

$$L^p(\Omega) = \{[f] \; : f \in L^{(p)}(\Omega)\}. \tag{3.27}$$

Huomataan että $\| f \|_p = \| g \|_p$ aina kun $f \sim g$, joten

$$\|[f]\|_p = \|f\|_p, \quad f \in L^{(p)},$$

on siten hyvin määritelty. Edelleen, $\| f \|_p = 0 \Leftrightarrow [f] = [0]$, eli avaruudessa $L^p(\Omega)$ suure $\| \cdot \|_p$ *on normi.*

Käytännössä pidämme (so. kohtelemme) $L^p(\Omega)$:n elementtejä funktioina. Myös siisteissä tapauksissa, esimerkiksi jos luokassa $[f]$ on jatkuva funktio, valitsemme sen luokan edustajaksi, eikä tulkinta $f \in L^p(\Omega)$ tuota pulmia.

Kuitenkin, yleisessä tapauksessa L^p-funktion arvo ei ole pisteittäin hyvin määritelty. Jos tarvitsemme tiettyä arvoa $f(x)$, joudumme valitsemaan luokasta $[f]$ yhden edustajan; jos haluamme näin saada tietoa koko luokasta $[f]$, meidän on tällöin huolehdittava siitä, että päättelyjen lopputulos ei riipu edustajan f valinnasta !!

[*Vaihtoehto:* Määritellään $L^p(\Omega)$ tulkitsemalla yo. konstruktio enemmän lineaarialgebrallisin konstein, käyttäen vektoriavaruuden tekijäavaruuksia. Tarkemmin, olkoon X vektoriavaruus ja M sen aliavaruus. Koska X on yhteenlaskun suhteen Abelin ryhmä ja M sen aliryhmä, voimme muodostaa tekijäryhmän X/M, jonka alkioina ovat jäännösluokat modulo M,

$$x + M, \quad x \in X.$$

Tässä $x + M = \{x + m : m \in M\}$ on määritelty joukkona, kuten Luvussa 2. Asetetaan yhteenlasku ja skalaarilla kertominen luonnollisilla kaavoilla

$$(x + M) + (y + M) = (x + y) + M \tag{3.28}$$

$$\lambda(x + M) = \lambda x + M \tag{3.29}$$

ja näin saadaan tekijäryhmästä X/M vektorialiavaruus.[3]

Olkoon nyt $M = \{f \in L^{(p)} : f(x) = 0 \text{ m.k. } x \in \Omega\}$, joka on avaruuden $L^{(p)}$ vektorialiavaruus.

3.30. **Määritelmä.** Avaruus $L^p = L^p(\Omega)$ on tekijäavaruus $L^{(p)}/M$.

Huomataan, että edellä $f + M = g + M$ jos ja vain jos $f - g \in M$, eli siis $f \sim g$. Kuten edellä todettiin, $\| f \|_p$ on sama kaikille funktioille $f \in L^{(p)}$, jotka poikkeavat toisistaan enintään 0-mittaisessa joukossa, joten lauseke

$$\|f + M\|_p = \| f \|_p, \; f \in L^{(p)},$$

on hyvin määritelty tässäkin vaihtoehdossa. Näin tekijäavaruuskonstruktio tuottaa "saman" avaruuden L^p kuten edellä.

Jos $f \in L^{(p)}$ on yleensä tapana merkitä funktion f määräämää tekijäavaruuden L^p alkiota eli luokkaa $f+M$ myös symbolilla f! Tässä on siis taas pidettävä mielessä, että jos kaksi avaruuteen $L^{(p)}$ kuuluvaa funktiota poikkeaa toisistaa enintään 0-mittaisessa joukossa, ne ovat avaruuden L^p alkioina samoja.]

Seuraava tulos on keskeinen Funktionaalianalyyttisiä sovelluksia silmälläpitäen.

3.31. **Lause.** *Olkoon* $1 \leq p < \infty$. *Tällöin* $(L^p, \| \cdot \|_p)$ *on Banachin avaruus.*

Todistus. Edellisestä keskustelusta seuraa, että L^p on normiavaruus. (Huomaa, että Hölderin ja Minkowskin epäyhtälöt pätevät myös avaruudessa L^p; Mieti miksi näin on!).

L^p-avaruuksien täydellisyys kuuluu oikeastaan Reaalianalyysin kurssin materiaaliin, sillä päättely tarvitsee muutaman perustuloksen Lebesgue-integroinnista. Siksi ne lukijat, jotka eivät ole vielä Reaalianalysiä seuranneet, voivat ottaa tuloksen annettuna; todistuksen argumentteja ei tarvita muualla tässä kurssissa.

Luonnostelemme alla kuitenkin täydellisyystodistuksen pääpiirteet, jotta Mittateoriaan perehtymätönkin lukija saa mielikuvan miten mitallisten funktioiden kanssa operoidaan. Täydellisyysagumentti on itse asiassa analoginen ℓ^p avaruuksien tapauksen kanssa.

L^p-avaruuksien täydellisyyttä varten tarvitaan seuraavia Mitta ja integraalin -kurssin aputuloksia:

3.32. **Lemma.** *(i) [Monotonisen konvergenssin lause] Jos* $f_n \colon \Omega \to [0, \infty]$ *on jono mitallisia kuvauksia, joille* $0 \leq f_1(x) \leq \ldots \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq \ldots$

[3] Tarkemmin tätä ideaa selvitetään Lineaarialgebran jatkokurssilla.

kaikilla $x \in \Omega$, *niin*

$$\int_\Omega \lim_n f_n(x) d\mu(x) = \lim_n \int_\Omega f_n(x) d\mu(x).$$

(ii) [Fatoun Lemma] Jos $f_n \colon \Omega \to [0,\infty]$ *on mitallinen kaikilla* $n \in \mathbb{N}$, *niin*

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n(x) d\mu(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x) d\mu(x).$$

Todistus. (i) Todistus löytyy Mitta ja Integraali -kurssilta.
(ii) Olkoon $g_k(x) = \inf_{n\geq k} f_n(x)$. Silloin g_k on mitallinen, $g_k \leq f_k$, $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \ldots$ sekä

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x).$$

Koska (g_k) on kasvava funktiojono, niin (i)-osan mukaan $\lim_{k\to\infty} \int_\Omega g_k d\mu = \int_\Omega \lim_{k\to\infty} g_k d\mu$. Erityisesti,

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}\mu = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega g_j(x)\,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

□

Lauseen 3.31 todistus jatkuu. Olkoon $\sum_n f_n$ absoluuttisesti suppeneva sarja avaruudessa L^p, eli $M = \sum_n \| f_n \|_p < \infty$. Lauseen 3.22 sivulla 40 nojalla riittää osoittaa, että $\sum_n f_n$ suppenee L^p:ssa. Kiinnitetään *edustaja* $f_n \in L^{(p)}$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Riittää löytää sellainen $f \in L^{(p)}$, jolle

$$\lim_{k\to\infty} \Big\| \sum_{n=1}^k f_n - f \Big\|_p = 0.$$

Jos merkitään

$$g_k(x) = \sum_{n=1}^k |f_n(x)|, \quad x \in \Omega,$$

niin avaruuden $L^{(p)}$ kolmioepäyhtälön nojalla

$$\| g_k \|_p = \Big\| \sum_{n=1}^k |f_n| \Big\|_p \leq \sum_{n=1}^k \| f_n \|_p \leq M, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Monotonisen konvergenssin lauseen 3.32.(i) nojalla

$$\int_\Omega \Big(\sum_{n=1}^\infty |f_n| \Big)^p \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \Big(\sum_{n=1}^k |f_n| \Big)^p \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \| g_k \|_p^p \leq M^p < \infty.$$

Siis funktio $g(x) := \sum^\infty |f_n(x)| \in L^{(p)}$ ja edelleen tästä seuraa, että $g(x) < \infty$ m.k. x ja *näillä* x sarja

$$f(x) := \sum_{n=1}^\infty f_n(x)$$

suppenee avaruudessa $\mathbb{K}$. Asetetaan $f(x) = 0$, jos $g(x) = \infty$, jolloin $|f(x)| \leq g(x)$ kaikilla $x \in \Omega$ ja siis $f \in L^{(p)}$. Lisäksi Fatoun lemman 3.32.(ii) nojalla

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Big| f - \sum_{n=1}^{k} f_n \Big|^p \,\mathrm{d}\mu &= \int_\Omega \lim_{j\to\infty} \Big| \sum_{n=1}^{j} f_n - \sum_{n=1}^{k} f_n \Big|^p \,\mathrm{d}\mu \\ &\leq \liminf_{j\to\infty} \int_\Omega \Big| \sum_{n=1}^{j} f_n - \sum_{n=1}^{k} f_n \Big|^p \,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Otetaan nyt p:nnet juuret puolittain saadusta epäyhtälöstä, jolloin

$$\Big\| f - \sum_{n=1}^{k} f_n \Big\|_p \leq \liminf_{j\to\infty} \Big\| \sum_{n=k+1}^{j} f_n \Big\|_p \leq \liminf_{j\to\infty} \sum_{n=k+1}^{j} \| f_n \|_p = \sum_{n=k+1}^{\infty} \| f_n \|_p \to 0,$$

kun $k \to \infty$ (oikealla oleva on suppenevan sarjan jäännöstermi). Siispä jokainen avaruuden L^p normisuppeneva sarja suppenee, joten L^p on täydellinen eli L^p on Banachin avaruus. $\square$

Yllä oletettiin, että $1 \leq p < \infty$. Tapaus $p = \infty$ on itse asiassa helpompi. Koska tapauksissa $1 \leq p < \infty$ samaistimme funktiot, jotka poikkeavat enintään 0-mittaisessa joukossa, haetaan nyt tälle vastine kun $p = \infty$. Päädymme seuraavaan käsitteeseen:

3.33. **Määritelmä.** Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue mitallinen osajoukko. Mitallinen funktio $f\colon \Omega \to \mathbb{K}$ on *oleellisesti rajoitettu*, jos on olemassa $0 \leq M < \infty$, jolle $|f(x)| \leq M$ kaikilla x jonkin 0-mittaisen joukon ulkopuolella, toisin sanoen $\mu(\{\, x \in \Omega : \ |f(x)| > M \,\}) = 0$. Funktion f *oleellinen supremum* eli

$$\| f \|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)|,$$

on infimum kaikista edellä mainituista luvuista M, siis

$$\| f \|_\infty := \inf\{\, M : \ \text{mitta} \ \ \mu(\{\, x \in \Omega : \ |f(x)| > M \,\}) = 0 \,\}.$$

Kuten tapauksessa $1 \leq p < \infty$ samaistamme taas $f \sim g$, jos $f(x)$ ja $g(x)$ poikkeavat enintään 0-mittaisessa joukossa. Merkitään

$$L^\infty = L^\infty(\Omega) = \{[f] : f \text{ oleellisesti rajoitettu } \Omega \to \mathbb{K}\},$$

missä siis $[f] = \{g : g \sim f, g \text{ on oleellisesti rajoitettu }\}$ on vastaava ekvivalenssiluokka.

Kuten edellä, tulemme säännöllisesti käyttämään merkintää $f \in L^\infty$, kun tarkkaan ottaen tarkoitetaan, että f:n määräämä luokka $[f] \in L^\infty$.

3.34. **Lause.** *$(L^\infty, \| \cdot \|_\infty)$ on Banachin avaruus.*

Todistus. Taas tarvitaan hieman Mittateorian tietoja, ja siksi ne lukijat jotka eivät ole Reaalianalyysia seuranneet, voivat toki ottaa Lauseen 3.34 tuloksen annettuna. Selvyyden vuoksi annamme kuitenkin tässä todistuksen yksityiskohdat.

(1) jos $f \in L^\infty$ (on mitallinen edustaja $\Omega \to \mathbb{K}$), niin tällöin

$$|f(x)| \le \| f \|_\infty \text{ m.k. } x \in \Omega,$$

sillä mitan μ subadditiivisuuden nojalla

$$\begin{aligned}\mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > \| f \|_\infty\}) &= \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : |f(x)| > \| f \|_\infty + 1/n\}) \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > \| f \|_\infty + 1/n\}) = 0.\end{aligned}$$

(2) L^∞ on vektoriavaruus ja $\|\cdot\|_\infty$ on normi: Koska $|f(x)| \le \| f \|_\infty$ ja $|g(x)| \le \| g \|_\infty$ m.k. $x \in \Omega$, saadaan

$$|f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le \| f \|_\infty + \| g \|_\infty \text{ m.k. } x \in \Omega,$$

joten $\| f + g \|_\infty \le \| f \|_\infty + \| g \|_\infty$. (Selvitä itsellesi miksi $\| af \|_\infty = |a| \| f \|_\infty$ kaikilla $f \in L^\infty$!)

3) L^∞ on täydellinen: Olkoon (f_n) Cauchyn jono avaruudessa L^∞. Lauseen 3.2 sivulla 31 nojalla jono on rajoitettu eli $\| f_n \|_\infty \le M < \infty$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Kiinnitetään mitalliset edustajat $f_n : \Omega \to \mathbb{K}$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$. Olkoon A_k ja $B_{n,m}$ ne joukon Ω osajoukot, joissa $|f_k(x)| > \| f_k \|_\infty$ ja $|f_n(x) - f_m(x)| > \| f_n - f_m \|_\infty$. Kohdan (1) nojalla joukot A_k ja $B_{n,m}$ ovat 0-mittaisia. Asetetaan

$$E = \Big(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\Big) \cup \Big(\bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} B_{n,m}\Big).$$

Tällöin mitan subadditiivisuuden perusteella

$$\mu(E) \le \sum_k \mu(A_k) + \sum_{n,m} \mu(B_{n,m}) = 0.$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska (f_n) on Cauchyn jono, löytyy sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että

$$\| f_n - f_m \|_\infty < \varepsilon$$

kaikilla $n, m \ge n_\varepsilon$. Kun $x \in \Omega \setminus E$, niin

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le \| f_n - f_m \|_\infty < \varepsilon$$

kaikilla $n, m \ge n_\varepsilon$, koska $B_{n,m} \subset E$, joten $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ on Cauchyn jono avaruudessa $\mathbb{K}$. Siispä $\mathbb{K}$:n täydellisyyden nojalla on olemassa raja-arvo $f(x) :=$

$\lim f_n(x)$ jokaisella $x \in \Omega \setminus E$. Asetetaan $f(x) = 0$, kun $x \in E$. Tällöin f on mitallinen kuvaus, ja koska

$$|f_n(x)| \leq \| f_n \|_\infty \leq M$$

kaikilla $x \in \Omega \setminus E$, niin $f \in L^\infty$. Samoin on voimassa

$$|f(x) - f_n(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \limsup_{m\to\infty} \| f_m - f_n \|_\infty \leq \varepsilon,$$

kaikilla $n \geq n_\varepsilon$ ja $x \in \Omega \setminus E$. Koska $\mu(E) = 0$, niin tästä seuraa, että

$$\lim_{n\to\infty} \| f - f_n \|_\infty = 0.$$

□

Huomautus. Yleisimmin vastaavasti määritellään Banachin avaruus $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, kun (Ω, Σ, μ) on (täydellinen) mitta-avaruus ja $1 \leq p \leq \infty$ (vrt. Reaalianalyysi I, 1.4-1.6). Tässä Σ on σ-algebra joukossa Ω ja $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ on positiivinen mitta.

Huomautus : Avaruuden L^∞ täydellisyys voidaan todistaa myös käyttäen edellä kuvattua tekijäavaruuden struktuuria. Nimittäin, jos M on avaruuden X vektorialiavaruus niin yhtälöiden (3.28) avulla määriteltiin uusi vektoriavaruus X/M. Jos nyt X on normiavaruus ja M sen *suljettu* vektorialiavaruus, saadaan X/M:stä normiavaruus asettamalla

$$\| x+M \|_{X/M} = \inf\{\| x+m \| : m \in M\} = \inf\{\| x-m \| : m \in M\} = dist(x, M)$$

Helposti nähdään että $\| x + M \|_{X/M}$ on normi: Jokaisella $m_1, m_2 \in M$

$$\| x + y + M \|_{X/M} \leq \| x + y + m_1 + m_2 \| \leq \| x + m_1 \| + \| y + m_2 \|$$

ja ottamalla inf yli vektoreiden m_1, m_2, saadaan

$$\| x + y + M \|_{X/M} \leq \| x + M \|_{X/M} + \| y + M \|_{X/M}$$

Samalla tavalla nähdään, että $\| ax + M \|_{X/M} = |a| \| x + M \|_{X/M}$. Lisäksi, yllä-olevasta seuraa, että $\| x + M \|_{X/M} = 0 \Leftrightarrow dist(x, M) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{M} = M$, eli $x + M = 0 + M$, avaruuden X/M nolla-alkio.

Lisäksi, harjoituksissa näytetään, että jos X on Banach avaruus ja $M \subset X$ on suljettu v.a.a, niin silloin X/M on Banach avaruus.

Valitsemalla nyt $X = \{f : \Omega \to \mathbb{K} \text{ rajoitettu ja mitallinen}\} \subset B(\Omega, \mathbb{K})$ havaitaan mittateorian avulla, että X on suljettu $B(\Omega, \mathbb{K})$:ssa, ja siis Banach avaruus. Jos $M = \{f \in X : f(x) = 0 \text{ m.k. } x \in \Omega\}$, niin silloin voidaan samaistaa

$$L^\infty = X/M.$$

(Väitteen yksityiskohdat jätetään ylimääräiseksi harjoitustehtäväksi. Huomaa, että samaistuksessa pitää valita alkiolle $f \in L^\infty$ *rajoitettu* edustaja $g : \Omega \to \mathbb{K}$, $g \sim f$, jolle esimerkiksi $|g(x)| \leq \|f\|_\infty$ kaikilla $x \in \Omega$. Näin määriteltynä L^∞ on Banachin avaruus harjoitustehtävän 3:10 perusteella.)

Banachin kiintopistelause (epälineaarinen FA)

Seuraava täydellisyyden aspekti on osoittautunut hyödylliseksi ja monipuoliseksi työkaluksi monissa eri funktionaalianalyysin sovelluksissa.

3.35. **Määritelmä.** Olkoon E Banach-avaruus ja $D \subset E$ osajoukko ($D \neq \emptyset$). Kuvaus $T : D \to E$ on *kontraktio* D:ssä, jos

$$\| T(x) - T(y) \| \leq \| x - y \| \quad \text{kaikilla}\, x, y \in D.$$

Kuvaus $T : D \to E$ on *aito kontraktio* jos on olemassa sellainen vakio $0 \leq k < 1$, että

$$\| T(x) - T(y) \| \leq k\| x - y \| \quad \text{kaikilla}\, x, y \in D.$$

Jokainen kontraktio $T : D \to E$ on tasaisesti jatkuva D:ssä. (Huomaa, että kontraktion ei tarvitse olla lineaarinen kuvaus.) Piste $x \in D$ on kuvauksen $T : D \to E$ *kiintopiste*, jos $T(x) = x$.

Huomautus. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $D \subset X$ osajoukko. Vastaavalla tavalla määritellään (aito) kontraktio $T : D \to X$ ja sen kiintopiste.

3.36. **Lause** (Banachin kiintopistelause, 1922)**.** *Olkoon E Banachin avaruus ja $D \subset E$ suljettu osajoukko ja $T : D \to D$ aito kontraktio. Tällöin kuvauksella T on yksikäsitteinen kiintopiste $x \in D$ (eli $T(x) = x$).*

Todistus. Jos $x_0 \in D$ on *mielivaltainen*, asetetaan rekursiivisesti

$$\begin{cases} x_1 = T(x_0), \\ x_{n+1} = T(x_n), \quad \text{kun } n = 1, 2... \end{cases}$$

Merkitään $\alpha_n = \| x_{n+1} - x_n \|$ $(n \in \mathbb{N})$. Tällöin

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \| x_{n+1} - x_n \| = \| T(x_n) - T(x_{n-1}) \| \leq k\| x_n - x_{n-1} \| \\ &= k\| T(x_{n-1}) - T(x_{n-2}) \| \leq k^2\| x_{n-1} - x_{n-2} \| \\ &\leq ... \leq k^n\| x_1 - x_0 \| = k^n \alpha_0, \end{aligned} \tag{3.37}$$

kun $n \in \mathbb{N}$. Kolmioepäyhtälöä, arviota (3.37) ja geometrisen sarjan summakaavaa käyttämällä saadaan kaikilla $p = 1, 2, \ldots$ ja $n \in \mathbb{N}$ arvio

$$\begin{aligned}\|x_{n+p}-x_n\| &\leq \sum_{j=n}^{n+p-1}\|x_{j+1}-x_j\| = \sum_{j=n}^{n+p-1}\alpha_j \leq \sum_{j=n}^{n+p-1}k^j\alpha_0 \\ &= \alpha_0 k^n\sum_{j=0}^{p-1}k^j \leq \alpha_0 k^n\sum_{j=0}^{\infty}k^j = \frac{\alpha_0 k^n}{1-k} \to 0,\end{aligned} \tag{3.38}$$

kun $n \to \infty$. Siis $(x_n) \subset E$ on Cauchyn jono. Koska E Banachin avaruus, niin on olemassa $\lim_n x_n = x \in E$. Koska $x_n = T(x_{n-1}) \in D$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$, niin

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \in \overline{D} = D,$$

koska D oletettiin suljetuksi. Edelleen kontraktio-oletuksesta seuraa, että T jatkuva, joten

$$T(x) = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x,$$

eli x on kiintopiste. Osoitetaan vielä, että x on yksikäsitteinen. Olkoon $y \in D$ toinen kiintopiste-ehdokas kuvaukselle T eli $T(y) = y$. Tällöin

$$\|x-y\| = \|T(x)-T(y)\| \leq k\|x-y\|$$

jollakin $0 \leq k < 1$, sillä T on aito kontraktio. Siispä ainoa mahdollisuus on, että $\|x-y\| = 0$ eli $x = y$. $\square$

Huomautus. (1) Yllä olevassa todistuksessa kiintopiste x löytyi iteroimalla:

$$x = \lim_{n\to\infty} T(x_n), \text{ missä } x_n = T(x_{n-1}) = \ldots = \underbrace{T\circ\ldots\circ T}_{n\,\mathrm{kpl}}(x_0) = T^n(x_0),$$

missä $x_0 \in D$ oli jopa mielivaltainen. Lisäksi epäyhtälöstä (3.38) saadaan virhearvio (antamalla siinä $p \to \infty$):

$$\|x - T^n(x_0)\| \leq \frac{k^n}{1-k}\|T(x_0)-x_0\| \tag{3.39}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$.
(2) Kiintopistelause ei päde sellaisille kontraktioille $T : D \to D$, joille on voimassa ainoastaan heikompi arvio $\|T(x)-T(y)\| \leq \|x-y\|$ kaikilla $x, y \in D$. (Vertaa harjoitustehtäviä 3:11 ja 3:12).

Seuraavaksi tarkastellaan parilla esimerkillä kuinka Banachin kiintopistelausetta voidaan soveltaa. Sovelluskohteita on itse asiassa lukematon määrä, aina yhden muuttujan numeriikasta esim. fraktaaligeometriaan asti. Sovelluksissa on tietysti löydettävä kuhunkin ongelmaan sopiva Banachin avaruus ja vastaava kontraktiokuvaus.

3.40. **Esimerkki.** Johdantoluvussa [vrt. (0.2)] lupasimme ratkaista integraaliyhtälön

$$f(x) - \lambda \int_0^1 K(x,s) f(s) ds = g(x), \quad x \in [0,1], \tag{3.41}$$

ainakin kun parametri λ on pieni. Nyt meillä on koossa tässä tapauksessa tarvittavat ratkaisun elementit.

Annetuista funktioista $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ ja $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ oletettiin että ne ovat jatkuvia. Siksi on luontevaa valita alla olevaksi Banach avaruudeksi $C(0,1)$ sup-normilla $\| \cdot \|_\infty$ varustettuna. Sopiva kontraktiokuvaus voidaan muodostaa monellakin tavalla; niistä helpoin ja luonnollisin on ehkä

$$T : C(0,1) \to C(0,1), \quad (Tf)(x) = g(x) \ + \ \lambda \int_0^1 K(x,s) f(s) ds, \tag{3.42}$$

sillä heti nähdään, että f on T:n kiintopiste (eli $T(f) = f$) jos ja vain jos f ratkaisee yhtälön (3.41). (Tässä T ei ole lineaarikuvaus jos $g \neq \overline{0}$.)

Esimerkin 2.31 tuloksista seuraa, että $T : C(0,1) \to C(0,1)$ on jatkuva kuvaus. Saman Esimerkin menetelmillä voimme myös tarkemmin selvittää milloin T on aito kontraktio. Nimittäin

$$\begin{aligned} \| Tf - Th \|_\infty &= \sup_{x \in [0,1]} \left| \int_0^1 \lambda \, K(x,s) \, (f(s) - h(s)) \, ds \right| \\ &\leq |\lambda| \, \| K \|_\infty \, \| f - h \|_\infty , \end{aligned}$$

missä $\| K \|_\infty = \sup\{ \ |K(x,s)| : x, s \in [0,1] \ \}$. Havaitaan siis että T on aito kontraktio jos λ on niin pieni, että $|\lambda| < 1/\| K \|_\infty$.

Banachin kiintopistelauseesta seuraa nyt että jos $|\lambda| < 1/\| K \|_\infty$, niin kuvauksella T on kiintopiste $f \in C(0,1)$ ja siten samalla yhtälöllä (3.41) on ratkaisu f; lisäksi f on yksikäsitteinen. (Tässä sovelluksessa $D = C(0,1)$.)

Banachin kiintopistelause on varsin vahva, sillä se antaa myös nopean algoritmin integraaliyhtälön ratkaisun f konstruoimiseksi (esim. numeerisesti): Lauseen jälkeisen huomautuksen mukaan $f = \lim_{n \to \infty} g_n$ missä (valitsemalla iteroinnissa alkuarvoksi $g_0 = g$)

$$g_0(x) = g(x), \quad g_1(x) = (Tg_0)(x) = g(x) \ + \ \lambda \int_0^1 K(x,s) g(s) ds,$$

$$g_2(x) = g(x) \ + \ \lambda \int_0^1 K(x,s) g(s) ds \ + \ \lambda^2 \int_0^1 K(x,t) \Big(\int_0^1 K(t,s) g(s) ds \Big) dt,$$

ja niin edelleen. Lisäksi, arvion (3.39) perusteella jonon (g_n) suppeneminen on eksponentiaalista.

Ainoa pulma Banachin kiintopistelauseessa on että se toimii vain (aidoille) kontraktioille. Erityisesti, herää kysymys: miten yhtälöt (3.41) käyttäytyvät yleisillä parametreilla λ ?!

Seuraava esimerkki näyttää, että yllä λ:n pienuus oli olennaista; yleisten parametrien tapaus on siis paljon monimutkaisempi.

3.43. **Esimerkki.** Valitaan integraaliyhtälön (3.41) ytimeksi $K(x,s) = xs$, $0 \leq x, s \leq 1$, sekä olkoon annettu funktio $g(x) \equiv 1$. Silloin yhtälö (3.41) saa muodon

$$f(x) - \lambda\, x \int_0^1 s f(s) ds = 1, \quad x \in [0,1] \tag{3.44}$$

Koska $\| K \|_\infty = \sup_{x,s \in [0,1]} |K(x,s)| = 1$, yhtälöllä on kiintopistelauseen nojalla ratkaisu ainakin kun $|\lambda| < 1$. Lisäksi kuten yllä, ratkaisun voi löytää iteroimalla kuvausta $h \mapsto Th = 1 + \lambda \int_0^1 xsh(s)ds$; iteroinnissa huomataan että ratkaisun voi kehittää potenssisarjana λ:n suhteen. Valitussa erikoistapauksessamme potenssisarjan voi jopa esittää suljetussa muodossa (Ylimääräinen HT: Määrää ko. sarja ja sen summa).

Toisaalta, tapauksessa $K(x,s) = x\, s$ yhtälön voi myös ratkaista suoraan: Havaitaan nimittäin, että jokainen (3.44):n ratkaisu on muotoa $f(x) = 1 + Cx$ jollakin vakiolla C (Miksi?). Sijoittamalla nähdään että (3.44):n kanssa on yhtäpitävää yhtälö

$$1 + Cx - \lambda\, x \int_0^1 s(1 + Cs) ds = 1, \quad x \in [0,1]. \tag{3.45}$$

Integroinnin jälkeen (Tee se !) tämä identiteetti saa muodon $C - \lambda(1/2 + C/3) = 0$. Siten

$$C = \frac{3}{2} \frac{\lambda}{3 - \lambda} \quad \text{ja} \quad f(x) = 1 + \frac{3\lambda\, x}{6 - 2\lambda}$$

Integraaliyhtälö siis ratkeaa aina kun $\lambda \neq 3$. Kun $\lambda = 3$ ratkaisua ei olemassa, millään vakiolla C.

Ylläolevassa löysimme tasan yhden poikkeusarvon λ. Esimerkkiä muokkaamalla voit helposti löytää ytimiä, joilla on 2, 3 tai useampia poikkeusarvoja.

Kun seuraavassa luvussa olemme rakentaneet Hilbertavaruuksien perusteorian, tulemme osoittamaan vielä enemmän:

3.46. **Esimerkki.** Olkoon

$$K(x,s) = \frac{1}{3 - e^{2\pi i(x-s)}}, \quad x, s \in [0,1] \tag{3.47}$$

[Huom: Eulerin identiteettiä $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ käyttäen yo. ytimen voi kirjoittaa myös trigonometristen funktioiden avulla.]

Tällöin: Jos $\lambda \neq 3^n$, $n = 1, 2, \ldots$, yhtälö (3.41) ratkeaa kaikilla $g \in C(0,1)$. Toisaalta, jos $\lambda = 3^n$ jollakin n, ei ratkaisua kaikilla funktioilla g löydy !
Väitteen todistus seuraa nopeasti Fourier-sarjojen ominaisuuksista, ja jätämme sen siksi lukuun 4. Huomaa, että tässäkin esimerkissä poikkeusarvojen joukko jää diskreetiksi.

Katsotaan lopuksi vielä yksi (hyvin!) erilainen esimerkki Banachin kiintopistelauseen soveltamisesta; tämä esimerkin luonne on yleissivistävä, eikä kuulu varsinaiseen kurssisisältöön; sivuutamme siksi osan todistuksen yksityiskohdista.

Muistetaan aluksi, että Banachin kiintopistelause on yleispätevä periaate, jota voidaan käyttää myös täydellisissä metrisissä avaruuksissa (oleellisesti samalla todistuksella). Konstruoidaan nyt sen avulla Kochin lumihiutalekäyrä!

3.48. **Esimerkki.** Olkoon $\mathcal{X} = \{\ A \subset \mathbb{R}^2 :\ A$ *kompakti*[4] osajoukko, $A \neq \emptyset\ \}$. Jos $A, B \in \mathcal{X}$, asetamme

$$d_H(A,B) = \max\{\sup_{x\in A} \operatorname{dist}(x,B), \sup_{y\in B} \operatorname{dist}(y,A)\},$$

missä etäisyys $\operatorname{dist}(x,B)$ pisteestä x joukkoon A määritellään kaavalla

$$\operatorname{dist}(x,B) = \inf\{\ \|x-b\| :\ b \in B\ \},$$

ja $\|\cdot\|$ on euklidinen normi tasossa $\mathbb{R}^2$. Tällöin voidaan osoittaa, että d_H on *metriikka* joukkoperheessä $\mathcal{X}$ (tätä metriikkaa kutsutaan *Hausdorffin metriikaksi*).

Lisäksi $(\mathcal{X}, d_H)$ on *täydellinen* (tämä perustuu kompaktisuuteen, sivuutetaan yksityiskohdat; HT). Olkoot $f_j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $1 \leq j \leq n$, annettuja aitoja kontraktioita ja $k_j < 1$ vastaavat kontraktiovakiot. Tällöin

$$(*) \qquad k = \max_{j=1,\ldots,n} k_j < 1,$$

jolloin siis $\|f_j(x) - f_j(y)\| \leq k\|x-y\|$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^2$ ja $j = 1, 2, \ldots, n$. Asetetaan

$$\Phi(A) = \bigcup_{j=1}^{n} f_j(A),$$

kun $A \in \mathcal{X}$, eli kun $A \subset \mathbb{R}^2$ on kompakti osajoukko. Koska kompaktien joukkojen äärellinen yhdiste on kompakti (Topologia I) on

$$\Phi(A) = \bigcup_{j=1}^{n} f_j(A)$$

on kompakti kaikilla $A \in \mathcal{X}$. Siis Φ on kuvaus $\mathcal{X} \to \mathcal{X}$.

[4] Heine-Borelin lause: $A \subset \mathbb{R}^2$ on kompakti $\Leftrightarrow$ A on suljettu ja rajoitettu

Väite. *Φ on aito kontraktio* $(\mathcal{X}, d_H) \to (\mathcal{X}, d_H)$

Todistus. Olkoot $A, B \subset \mathbb{R}^2$ kompakteja. Jos

$$z \in \Phi(A) = \bigcup_{j=1}^{n} f_j(A),$$

niin $z = f_l(x)$ joillakin $x \in A$ ja $l \in \{1, \ldots, n\}$. Olkoon $y \in B$ mielivaltainen. Tällöin $f_l(y) \in f_l(B) \subset \Phi(B)$, joten

$$\mathrm{dist}(z, \Phi(B)) \le \| f_l(x) - f_l(y) \| \le k \| x - y \|,$$

missä $k < 1$ ehdon $(*)$ nojalla. Siis ottamalla infimum pisteen $y \in B$ suhteen saadaan, että

$$\mathrm{dist}(z, \Phi(B)) \le k \; \mathrm{dist}(x, B).$$

Koska $z \in \Phi(A)$ on mielivaltainen, niin

$$\sup_{z \in \Phi(A)} \mathrm{dist}(z, \Phi(B)) \le k \sup_{x \in A} \mathrm{dist}(x, B) \le k d_H(A, B).$$

Symmetrian perusteella pätee samoin

$$\sup_{z \in \Phi(B)} \mathrm{dist}(z, \Phi(A)) \le k \sup_{y \in B} \mathrm{dist}(y, A) \le k d_H(A, B).$$

Siispä

$$d_H(\Phi(A), \Phi(B)) \le k d_H(A, B)$$

kun $A, B \in \mathcal{X}$, joten kuvaus Φ on aito kontraktio. □

Nyt Banachin kiintopistelauseen metrisen version nojalla kuvauksella Φ on yksikäsitteinen kiintopiste $A \in \mathcal{X}$, eli on olemassa kompakti osajoukko $A \subset \mathbb{R}^2$, jolle

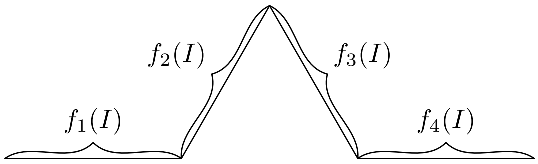
$$A = \Phi(A) = \bigcup_{j=1}^{n} f_j(A).$$

Lisäksi $A = \lim_n \Phi^n(B)$, missä suppeneminen tapahtuu metriikan d_H suhteen: $d_H(A, \Phi^n(B)) \to 0$ kun $n \to \infty$ lähtien mistä tahansa joukosta $B \in \mathcal{X}$.

Valitaan edellä esimerkiksi kontraktiot f_j *similariteeteiksi*, eli

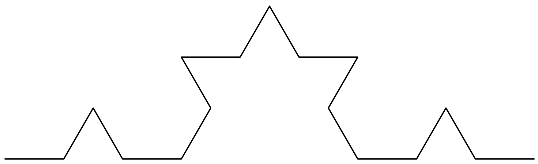
$$f_j(x) = r_j O_j(x) + b_j, \quad j = 1, ..., n,$$

missä $0 < r_j < 1, b_j \in \mathbb{R}^2$ ja $O_j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jokin tason kierto origon ympäri. Tällöin saadaan kauniita esimerkkejä "fraktaaleista" joukoista. Valitaan vaikkapa similaariteetit $f_1, \ldots, f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ siten, että ne kuvaavat yksikköjanan $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ kuten seuraavassa kuvassa.

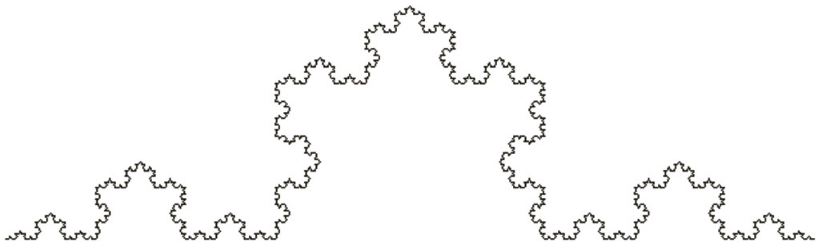


Nämä similariteetit määräävät kuvauksen Φ kuten yllä. Mikä on tällöin vastaava (yksikäsitteinen) invariantti joukko A, jolle $\Phi(A) = A$?!

Banachin kiintopistelauseen todistuksesta tiedämme, että kiintopiste A saadaan iteroimalla kuvausta Φ (esim. lähtien joukosta $I \in \mathcal{X}$). Nyt $\Phi^2(I) = \Phi(\Phi(I))$ näyttää tältä:



Rajalla $A = \lim_{n\to\infty} \Phi^n(I)$ saa seuraavan muodon (Kochin lumihiutalekäyrä):



Edellä oleva Banachin kiintopistelauseen sovellus on peräisin J. E. Hutchinsonilta vuodelta 1981.

Harjoitustehtäviä

3:1 Olkoon E, F Banachin avaruuksia, ja $T : E \to F$ sellainen jatkuva lineaarinen kuvaus, että $\|Tx\| \geq c\|x\|$ kaikilla $x \in E$ jollakin $c > 0$. Näytä, että T on injektio ja että kuvajoukko $T(E) = \{Tx : x \in E\}$ on F:n suljettu vektoriaaliavaruus. [*Apu:* voit tarkistaa, että $T(E)$ on täydellinen.]

3:2 Kiinnitetään $0 < \alpha < 1$ ja olkoon Lip_α sellaisten funktioiden $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ joukko, joille
$$\|f\|_\alpha = |f(0)| + \sup_{s\neq t} \frac{|f(s) - f(t)|}{|s-t|^\alpha} < \infty.$$
Näytä aluksi, että Lip_α on vektoriavaruus ja että $\|\cdot\|_\alpha$ on normi. Osoita sen jälkeen, että $(Lip_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ on Banachin avaruus. (Huomaa että
$$|f(s) - f(t)| \leq \|f\|_\alpha \cdot |s-t|^\alpha \text{ kaikilla } s,t \in [0,1],\ f \in Lip_\alpha.$$

Sanotaan usein, että f on *Hölder-jatkuva* potensilla α, tai kertaluvun α *Lipschitz-funktioksi.*)

3:3. Suppeneeko (funktio)sarja $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{n}$ Banachin avaruudessa $C(0,1)$? Entä suppeneeko kyseinen sarja absoluuttisesti avaruudessa $C(0,1)$? [Edellä sarjan n:s termi on siis funktio $t \mapsto (-1)^n\frac{t^n}{n}$. Muista Analyysi II:sta vuorottelevat sarjat ja Leibniz'in lause.]

3:4. Olkoon $c_{00} = \{x = (x_n) : x_n \neq 0$ äärellisen monella $n \in \mathbb{N}\}$ varustettuna sup-normilla $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$. Etsi sellainen vektorisarja $\sum_n y_n$, että $\sum_n y_n$ ei suppene avaruudessa c_{00}, mutta $\sum_n \|y_n\|_\infty < \infty$.

3:5. Olkoon E epätäydellinen normiavaruus. Konstruoi sellainen avaruuden E absoluuttisesti suppeneva sarja $\sum_n x_n$, että sarja $\sum_n x_n$ ei suppene E:ssa. [*Vihje:* Idea on näkyvissä Lauseen 3.22 todistuksessa.]

3:6. Olkoon $1 \leq p < \infty$. Todista L^p-avaruuksien Minkowskin epäyhtälö:

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p, \quad f, g \in L^p(\Omega).$$

[Tapauksessa $1 < p < \infty$ imitoi Lauseen 2.22 todistusta ja käytä Hölderin epäyhtälöä L^p-avaruuksissa. Tapaus $p = 1$ on suoraviivaisempi.]

3:7. Asetetaan $\phi(f) = \int_0^1 s^{-1/4} f(s)ds$ kaikilla $f \in L^2(0,1)$. Näytä, että ϕ on jatkuva lineaarinen kuvaus $L^2(0,1) \to \mathbb{K}$. [*Muistutus:* Hölderin epäyhtälö L^p-avaruuksissa.]

3:8. (i) Osoita, että

$$\sup_{t\in[0,1]} |f(t)| = \text{ess sup}_{t\in[0,1]}|f(t)|$$

kaikilla jatkuvilla (reaaliarvoisilla) kuvauksilla $f \in C(0,1)$. Päättele, että $C(0,1) \subset L^\infty(0,1)$ on suljettu (vektori)aliavaruus.
(ii) Näytä, että inkluusio $C(0,1) \subset L^\infty(0,1)$ on aito tutkimalla esimerkiksi välin $I = [0,1/2]$ karakteristista funktiota χ_I. [Muista, että avaruudessa $L^\infty(0,1)$ samaistetaan sellaiset funktiot, jotka poikkeavat toisistaan nolla-mittaisessa joukossa.]

3:9. Olkoon E Banachin avaruus, ja $M \subset E$ suljettu vektorialiavaruus.
(i) Tarkista, että tekijäavaruuden E/M laskutoimitukset $(x+M)+(y+M) = (x+y)+M$ ja $\lambda(x+M) = \lambda x + M$ kun $x, y \in E$ ja $\lambda \in \mathbf{K}$ eivät riipu edustajien x, y valinnoista. [*Muista.* $x + M = y + M$ jos ja vain jos $x - y \in M$.]
(ii) Näytä, että $\|x+M\| = \inf\{\|x-m\| : m \in M\}$ määrittelee normin tekijäavaruuteen E/M, jolle $\|x+M\| \leq \|x\|$ kaikilla $x \in E$.

3:10. Osoita, että tehtävässä 3:9 määritelty normiavaruus $(E/M, \|\cdot\|)$ on Banachin avaruus. [*Idea.* On osoitettava, että jokainen avaruuden E/M absoluuttisesti suppeneva sarja $\sum_n \|x_n + M\| < \infty$ todella suppenee tekijäavaruudessa E/M. Määritelmän nojalla jokaisella $n \in \mathbf{N}$ löytyy sellainen edustaja $y_n \in x_n + M$, että $\|y_n\| \leq 2\|x_n + M\|$. Tällöin sarja $\sum_n y_n$ suppenee E:ssä oletuksen nojalla. Näytä että $y + M = \sum_n (x_n + M)$, missä $y = \sum_n y_n$.]

3:11. Määritellään kuvaus $f : B_{\ell^2} \to \ell^2$ asettamalla

$$f(x) = \big(\frac{1}{2}(1 - \|x\|_2), x_1, x_2, \dots\big), \qquad \text{kun } x = (x_k) \in B_{\ell^2},$$

missä $B_{\ell^2} = \{x = (x_k) \in \ell^2 : \|x\|_2 \leq 1\}$ on avaruuden ℓ^2 suljettu yksikköpallo. Näytä: (i) $f(B_{\ell^2}) \subset B_{\ell^2}$, (ii) $\|f(x) - f(y)\|_2 \leq \frac{\sqrt{5}}{2}\|x - y\|_2$ kaikilla $x, y \in B_{\ell^2}$, (iii) ei ole olemassa sellaista jonoa $x \in B_{\ell^2}$, että $f(x) = x$.

3:12. Määritellään kuvaus $T : c_0 \to c_0$ kaavalla

$$T(x) = (1 - \|x\|_\infty, x_1, x_2, \ldots), \quad x = (x_k) \in c_0.$$

Osoita, että T on kontraktio $B_{c_0} \to B_{c_0}$, jolla ei ole kiintopistettä $x = (x_k) \in B_{c_0}$.

3:13. Näytä kiintopistelauseen avulla, että integraaliyhtälöllä

$$4f(x) - \int_0^1 f(s)^2 ds = x, \quad x \in [0, 1],$$

on yksikäsitteinen ratkaisu $f \in B_{C(0,1)} = \{f \in C(0, 1) : \|f\|_\infty \leq 1\}$.

3:14. Olkoon E Banachin avaruus, $D \subset E$ suljettu osajoukko sekä $T : D \to D$ kuvaus. Osoita: jos $T^n = T \circ \ldots \circ T$ (n kpl) on aito kontraktio jollakin $n \geq 2$, niin kuvauksella T on yksikäsitteinen kiintopiste. [*Ohje:* Banachin kiintopistelauseen nojalla kuvauksella T^n on yksikäsitteinen kiintopiste $x \in D$. Näytä, että $T^{n-1}(x)$ on silloin T:n kiintopiste.]

3:15. Olkoon E Banachin avaruus, $U \subset E$ avoin joukko ja $g : U \to E$ aito kontraktio. Asetetaan $f(x) = x - g(x),\ x \in U$. Osoita, että $f(U)$ on avoin joukko E:ssä. [*Juonikuvio:* Olkoon $c < 1$ kuvauksen g kontraktiovakio, $z \in U$ mielivaltainen ja $r > 0$ sellainen säde, että $\overline{B}(z, r) \subset U$. Näytä, että (avoin) pallo $B(f(z), (1 - c)r) \subset f(U)$ kiinnittämällä $y_0 \in B(f(z), (1 - c)r)$ ja soveltamalla Banachin kiintopistelausetta kuvaukseen $\phi(x) = x - (f(x) - y_0) = g(x) + y_0$.]

3:16. Olkoon $T : C(0, 1) \to C(0, 1)$ lineaarikuvaus $(Tf)(t) = tf(t)$, kun $t \in [0, 1]$ ja $f \in C(0, 1)$. Näytä, että $\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ kaikilla $f \in C(0, 1)$, eli T on kontraktio. Olkoon

$$A = \{f \in C(0, 1) : f(0) = 0, f(1) = 1, 0 \leq f(t) \leq 1 \text{ kaikilla } t \in [0, 1]\}.$$

Tarkista, että $A \subset C(0,1)$ on suljettu konveksi joukko ja $T(A) \subset A$. Näytä, ettei kuvauksella T ole kiintopistettä joukossa A.

4. Hilbertin avaruudet

Hilbertin avaruudet ovat ääretönulotteisista normiavaruuksista ominaisuuksiltaan kaikkein lähinnä ”kotiavaruutta” $\mathbb{R}^n$ tai $\mathbb{C}^n$. Tästä syystä niiden teoria on joustava ja käyttökelpoinen monessa tilanteessa. Hilbertin avaruuden normi määräytyy *sisätulosta*.

4.1. **Määritelmä.** Olkoon E vektoriavaruus, jonka skalaarikuntana on $\mathbb{K}$. Kuvaus $f\colon E \times E \to \mathbb{K}$ on *Hermiten muoto*, jos

(i) $f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$ kaikilla $x_1, x_2, y \in E$,

(ii) $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$ kaikilla $x, y \in E$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$

(iii) $f(y, x) = \overline{f(x, y)}$ kaikilla $x, y \in E$. (Tässä $\overline{z} = a - ib$ on kompleksiluvun $z = a + ib \in \mathbb{C}$ konjugaattiluku.)

Huomautus. (1) Jos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, niin ehto (iii) on muotoa $f(y, x) = f(x, y)$ kaikilla $x, y \in E$.

(2) Suoraan laskemalla nähdään, että

$$f(x, y_1 + y_2) = \overline{f(y_1 + y_2, x)} \overset{(i)}{=} \overline{f(y_1, x)} + \overline{f(y_2, x)} = f(x, y_1) + f(x, y_2)$$

ja

$$f(x, \lambda y) = \overline{f(\lambda y, x)} \overset{(ii)}{=} \overline{\lambda}\ \overline{f(y, x)} = \overline{\lambda} f(x, y)$$

kaikilla $x, y_1, y_2 \in E$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$. Hermiten muoto f on siis *konjugaattilineaarinen* jälkimmäisen muuttujan suhteen.

(3) Nolla-alkion tapauksessa $f(\bar{0}, y) = 0 = f(x, \bar{0})$ kun $x, y \in E$, sillä $2f(\bar{0}, y) = f(2 \cdot \bar{0}, y) = f(\bar{0}, y)$.

Hermiten muoto $f : E \times E \to \mathbb{K}$ on *sisätulo* (tai skalaaritulo) avaruudessa E, jos f on lisäksi *aidosti positiivinen* eli

$$f(x, x) \geq 0 \text{ kaikilla } x \in E \text{ , sekä } f(x, x) = 0 \text{ jos ja vain jos } x = \bar{0}.$$

Sisätulon tapauksessa merkitsemme:

$$(\, x \,|\, y \,) = f(x, y), \quad x, y \in E,$$
$$\|\, x \,\| = \sqrt{(\, x \,|\, x \,)}, \quad x \in E.$$

Vektoriavaruus E on *sisätuloavaruus*, jos E on varustettu sisätulolla $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$. Joskus käytämme sisätulolle myös merkintää $(\, x\,,\, y\,)$. (Kirjallisuudesta löytyy lisäksi useita muita merkintöjä: $\langle x, y \rangle$, $\langle x|y \rangle$ yms.)

Seuraava keskeinen arvio tarvitaan sen osoittamiseksi, että $\|\cdot\|$ todella on normi sisätuloavaruudessa E.

4.2. **Lause** (Cauchy–Schwarzin epäyhtälö)**.** *Sisätuloavaruudessa E pätee*

$$\text{(CS)} \qquad |(\,x\,|\,y\,)| \leq \|\,x\,\|\|\,y\,\| \quad \text{kaikilla } x, y \in E.$$

Todistus. Voidaan olettaa, että $x \neq \bar{0}$, $y \neq \bar{0}$ (muuten (CS) on ilmeinen). Jokaisella $\lambda \in \mathbb{K}$ pätee

$$0 \leq (\,x + \lambda y\,|\,x + \lambda y\,) \overset{(i)-(iii)}{=} (\,x\,|\,x\,) + \lambda(\,y\,|\,x\,) + \overline{\lambda}(\,x\,|\,y\,) + \underbrace{\lambda\overline{\lambda}}_{=|\lambda|^2}(\,y\,|\,y\,)$$

$$\overset{(iii)}{=} \|\,x\,\|^2 + \lambda\overline{(\,x\,|\,y\,)} + \overline{\lambda}(\,x\,|\,y\,) + |\lambda|^2\|\,y\,\|^2.$$

Valitaan $\lambda = -\dfrac{(\,x\,|\,y\,)}{\|\,y\,\|^2}$. (On hyvä huomata, että tapauksessa $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tämä on polynomin $\lambda \mapsto \|\,x\,\|^2 + 2\lambda(\,x\,|\,y\,) + \lambda^2\|\,y\,\|^2$ minimikohta!) Tällä valinnalla edellisestä epäyhtälöstä saadaan

$$0 \leq \|\,x\,\|^2 - \frac{2|(\,x\,|\,y\,)|^2}{\|\,y\,\|^2} + \frac{|(\,x\,|\,y\,)|^2}{\|\,y\,\|^4}\|\,y\,\|^2 = \|\,x\,\|^2 - \frac{|(x|y)|^2}{\|\,y\,\|^2}$$

$$\iff |(x|y)|^2 \leq \|\,x\,\|^2\|\,y\,\|^2,$$

mikä osoittaa väitteen. □

4.3. **Seuraus.** *Kuvaus $\|\,x\,\| = \sqrt{(x|x)}$, $x \in E$, on sisätuloavaruuden E normi.*

Todistus. Kolmioepäyhtälö on todistuksen varsinainen epätriviaali kohta. Suoraan laskemalla ja käyttämällä identiteettiä $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$ luvuille $z \in \mathbb{C}$, saadaan

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\,x + y\,\|^2 = (\,x + y\,|\,x + y\,) &\overset{(i)-(iii)}{=} \|\,x\,\|^2 + (\,x\,|\,y\,) + (\,y\,|\,x\,) + \|\,y\,\|^2 \\ &= \|\,x\,\|^2 + (\,x\,|\,y\,) + \overline{(\,x\,|\,y\,)} + \|\,y\,\|^2 \\ &= \|\,x\,\|^2 + 2\operatorname{Re}(\,x\,|\,y\,) + \|\,y\,\|^2. \end{aligned}$$

Koska kompleksiluvuille $z \in \mathbb{C}$ pätee aina $\operatorname{Re} z \leq |z|$, niin edellisen epäyhtälön ja Cauchy–Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} \|\,x + y\,\|^2 &\leq \|\,x\,\|^2 + 2|(\,x\,|\,y\,)| + \|\,y\,\|^2 \\ &\overset{\text{(CS)}}{\leq} \|\,x\,\|^2 + 2\|\,x\,\|\|\,y\,\| + \|\,y\,\|^2 = (\|\,x\,\| + \|\,y\,\|)^2. \end{aligned}$$

Ottamalla neliöjuuri saadaan $\|\,x + y\,\| \leq \|\,x\,\| + \|\,y\,\|$, kun $x, y \in E$.

Edelleen, kun $x \in E$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$, on selvästi voimassa

$$\|\,\lambda x\,\| = \sqrt{(\lambda x|\lambda x)} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}}(\,x\,|\,x\,) = \sqrt{|\lambda|^2\|\,x\,\|^2} = |\lambda|\|\,x\,\|.$$

Myös ehto (N3) toteutuu, sillä $\|\,x\,\| = \sqrt{(x|x)} = 0$ jos ja vain jos $x = \bar{0}$, sillä $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ on sisätulo. □

4.4. **Määritelmä.** Sanomme, että täydellinen sisätuloavaruus $(E, (\,\cdot\,|\,\cdot\,))$ on *Hilbertin avaruus.*

Hilbertin avaruuden nimitys tulee David Hilbertin (1862–1943) mukaan.

4.5. **Esimerkki.**
(1) Jos $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ ja $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, niin kuvaus

$$(x \,|\, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y}_j$$

on vektoriavaruuden $\mathbb{K}^n$ sisätulo. Vastaava normi

$$\| x \|_2 = \sqrt{(x \,|\, x)} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$

on avaruuden $\mathbb{K}^n$ tavallinen euklidinen normi ja $(\mathbb{K}^n, \| \cdot \|_2)$ on Hilbertin avaruus. Merkitään usein $\ell_2^n = (\mathbb{K}^n, \| \cdot \|_2),\ n = 1, 2 \ldots$

(2) Jonoavaruudessa ℓ^2 määritellään sisätulo kaavalla

$$(*) \qquad (x|y) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y}_j, \text{ kun } x = (x_k),\ y = (y_k) \in \ell^2.$$

Huomaa, että jonoavaruuksien Hölderin epäyhtälön 2.20 (tai Schwarzin epäyhtälön 2.21) nojalla

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k \overline{y}_k| \le (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty, \text{ kun } (x_k), (y_k) \in \ell^2,$$

joten sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y}_k$ suppenee (jopa itseisesti) $\mathbb{K}$:ssa, ja $(*)$ on näin mielekäs.

Sisätulon määräämä normi on tässä

$$\| x \|_2 = (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ kun } x = (x_k) \in \ell^2,$$

eli avaruuden ℓ^2 tavallinen normi, jonka suhteen ℓ^2 on täydellinen (Lause 3.23 sivulla 41). Siis $(\ell^2, \| \cdot \|_2)$ on Hilbertin avaruus, eli ääretönulotteinen versio avaruuksista $(\mathbb{K}^n, \| \cdot \|_2)$.

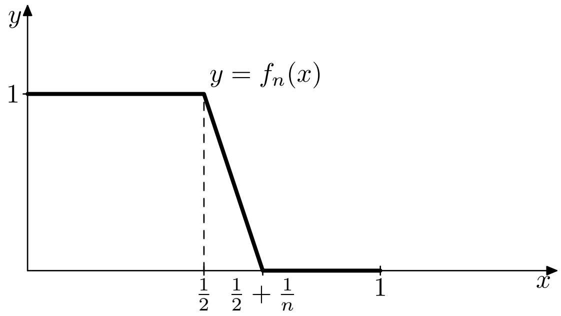
(3) Jos avaruus $C(0,1) = \{ f \colon [0,1] \to \mathbb{K} : \ f \text{ jatkuva} \}$ varustetaan sisätulolla

$$(f \,|\, g) = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} \, \mathrm{d}t, \quad f, g \in C(0,1),$$

niin $(C(0,1), \| \cdot \|_2)$ ei ole Hilbertin avaruus, missä

$$\| f \|_2 = (\int_0^1 |f(t)|^2 \ \mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}},$$

sillä $(C(0,1), \| \cdot \|_2)$ *ei* ole täydellinen. Perusteluksi tarkastele seuraava kuvaa ja pohdi, mitä tapahtuu, kun $n \to \infty$ (vapaa HT).



KUVA 4. Jatkuva funktio f_n, joka approksimoi epäjatkuvaa funktiota $\| \cdot \|_2$-normissa

(4) Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-mitallinen joukko, ja μ n-ulotteinen Lebesgue mitta. Tällöin avaruus $L^2(\Omega)$ varustettuna sisätulolla

$$(f \mid g) = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}d\mu(x), \quad f, g \in L^2(\Omega), \tag{4.6}$$

on Hilbertin avaruus (normissa $\| f \|_2 = (\int_\Omega |f(x)|^2 d\mu(x))^{\frac{1}{2}}$, vrt. Lause 3.31 sivulla 47.) Huomaa myös että tulofunktio $x \mapsto f(x)\overline{g(x)}$ on integroituva ja (4.6) on siis hyvin määritelty kun $f, g \in L^2(\Omega)$; tämä seuraa integraalien Hölderin epäyhtälöstä (Lemma 3.25 sivulla 44).

Kun verrataan kahta viimeistä esimerkkiä, käy ilmi, että vektorialiavaruus $C(0,1)$ on tiheä avaruudessa $(L^2(0,1), \| \cdot \|_2)$ ja siten $L^2(0,1)$ on vektoriavaruuden $C(0,1)$ *täydentymä* $\| \cdot \|_2$-normin suhteen. Tämä osoitetaan myöhemmin kurssin aikana (kts. Lause 5.5 luvussa 5).

Alamme sitten setvimään Hilbertin avaruuksien ominaisuuksia. Havaitaan, että (geo)metrisesti ne toimivat kuten kotiavaruus $\mathbb{K}^n$. Emme kuitenkaan voi vedota äärellisulotteisiin ilmiöihin, mutta esimerkiksi kahden annetun vektorin välinen kulma on järkevä reaalisessa Hilbertin avaruudessa:
Jos $x, y \neq \bar{0}$ ovat $\mathbb{R}$-kertoimisen Hilbertin avaruuden E alkioita, niin määrittelemme niiden välisen kulman $\varphi \in [0, 2\pi)$ tutulla kaavalla

$$(x \mid y) = \| x \| \| y \| \cos\varphi.$$

Olkoon esimerkiksi $x = (2^{-n})_{n=1}^\infty$ ja $y = (3^{-n})_{n=1}^\infty \in \ell^2$. Tällöin (geometrisen sarjan summina)

$$(x \mid y) = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n = \sum_{n=1}^\infty 6^{-n} = 1/5,$$

ja $\| x \|_2 = \sqrt{\sum_n (2^{-n})^2} = 1/\sqrt{3}$ sekä vastaavasti $\| y \|_2 = 1/\sqrt{8}$. Näin ollen

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{24}}{5} \Rightarrow \varphi \sim 11^o.$$

Funktioiden välisiä kulmia pohdittaessa kaikkein helpoin on tilanne, jossa vektorit ovat kohtisuorassa. Tämä on sisätuloavaruuksille varsin keskeinen käsite:

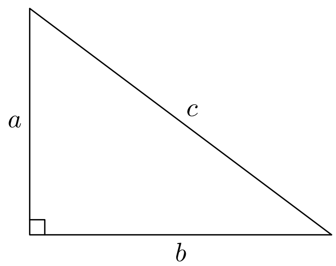
4.7. **Määritelmä.** Sisätuloavaruuden E vektorit $x, y \in E$ ovat *ortogonaaliset* (eli *kohtisuorat*), jos $(\, x \,|\, y\,) = 0$. Ortogonaalisuutta merkitään $x \perp y$. Osajoukot $A, B \subset E$ ovat *ortogonaaliset*, merkitään $A \perp B$, jos $x \perp y$ kaikilla $x \in A$ ja $y \in B$.

Ortogonaalisten vektorien summilla on seuraava tuttu ominaisuus. Hilbertin avaruuksien hajotelmia konstruoitaessa sillä tulee olemaan keskeinen rooli.

4.8. **Lause** (Pythagoras)**.** *Olkoon E sisätuloavaruus. Jos $\{x_1, \dots, x_n\} \subset E$ ja vektorit ovat keskenään ortogonaaliset eli $x_j \perp x_k$, kun $j \neq k$, niin*

$$\| x_1 + x_2 + \dots + x_n \|^2 = \| x_1 \|^2 + \| x_2 \|^2 + \dots + \| x_n \|^2.$$

Huomautus. Kun kolmiossa $a = \| x \|$ ja $b = \| y \|$, niin $c = \sqrt{\| x \|^2 + \| y \|^2}$, joten tapaus $n = 2$ on alkeisgeometriasta tuttu lause $a^2 + b^2 = c^2$.



Todistus. Väite osoitetaan induktiolla muuttujan n suhteen. Jos $n = 2$ ja $x_1 \perp x_2$ niin,

$$\begin{aligned} \| x_1 + x_2 \|^2 &= (\, x_1 + x_2 \,|\, x_1 + x_2\,) = \| x_1 \|^2 + (\, x_1 \,|\, x_2\,) + (\, x_2 \,|\, x_1\,) + \| x_2 \|^2 \\ &= \| x_1 \|^2 + \| x_2 \|^2. \end{aligned}$$

Oletetaan, että väite on osoitettu, kun $n = k$. Tällöin kohdan $n = 2$ ja induktio-oletuksen nojalla on voimassa

$$\begin{aligned} \| x_1 + \dots + x_k + x_{k+1} \|^2 &= \| x_1 + \dots + x_k \|^2 + \| x_{k+1} \|^2 \\ &\overset{\text{ind.ol.}}{=} \| x_1 \|^2 + \dots + \| x_k \|^2 + \| x_{k+1} \|^2, \end{aligned}$$

Ensimmäinen yhtäsuuruus on voimassa, sillä oletuksen nojalla

$$(\, x_1 + \dots + x_k \,|\, x_{k+1}\,) \overset{\text{lin.}}{=} \sum_{j=1}^{k} (\, x_j \,|\, x_{k+1}\,) = 0,$$

eli $(x_1 + \cdots + x_k) \perp x_{k+1}$. □

Tilanteissa, joissa avaruuden vektoripari ei ole kohtisuorassa, voimme korvata Pythagoraan suunnikasyhtälöllä. (Piirrä ao. lauseesta esimerkkikuva!)

4.9. **Lause** (Suunnikasyhtälö). *Jos E on sisätuloavaruus ja $x, y \in E$, niin*

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2).$$

Todistus. Lasketaan suoraan: sisätulon ominaisuuksista seuraa, että

$$\begin{aligned}\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 &= (x + y \,|\, x + y) + (x - y \,|\, x - y) \\ &= (x \,|\, x) + (x \,|\, y) + (y \,|\, x) + (y \,|\, y) \\ &\quad + (x \,|\, x) - (x \,|\, y) - (y \,|\, x) + (y \,|\, y) \\ &= 2(\| x \|^2 + \| y \|^2).\end{aligned}$$

□

Suunnikasyhtälön avulla voidaan helposti tarkistaa, että monet konkreettiset Banachin avaruudet *eivät* ole Hilbertin avaruuksia (eli avaruuden normi *ei* voi tulla sisätulosta).

4.10. **Esimerkki.** $(\ell^1, \| \cdot \|_1)$ ja $(C(0,1), \| \cdot \|_\infty)$ eivät ole Hilbertin avaruuksia.

Ratkaisu: Olkoon $x = (1, 0, 0, \ldots),\ y = (0, 1, 0, \ldots) \in \ell^1$. Tällöin

$$\begin{aligned}\| x + y \|_1 &= \| (1, 1, 0, \ldots) \|_1 = 2, \\ \| x - y \|_1 &= \| (1, -1, 0, \ldots) \|_1 = 2, \\ \| x \|_1 &= \| y \|_1 = 1,\end{aligned}$$

joten

$$\| x + y \|_1^2 + \| x - y \|_1^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \ \neq 4 = 2(\| x \|_1^2 + \| y \|_1^2).$$

Siispä $(\ell^1, \| \cdot \|_1)$ ei ole Hilbertin avaruus.

Olkoon nyt $f, g \in C(0,1)$ kuvaukset $f(t) = t$ ja $g(t) = 1 - t$ kun $t \in [0,1]$. Tällöin selvästi $\| f \|_\infty = \| g \|_\infty = 1$. Koska $(f+g)(t) = 1$ ja $(f-g)(t) = 2t - 1$ kun $t \in [0,1]$, niin $\| f + g \|_\infty = \| f - g \|_\infty = 1$. Siis

$$\| f + g \|_\infty^2 + \| f - g \|_\infty^2 = 2 \neq 4 = 2(\| f \|_\infty^2 + \| g \|_\infty^2),$$

eli $(C(0,1), \| \cdot \|_\infty)$ ei myöskään ole sisätuloavaruus. □

Huomautus. (1) Samoin $(\ell^p, \| \cdot \|_p)$ ja $(L^p(\Omega), \| \cdot \|_p)$ eivät ole Hilbertin avaruuksia kun $p \neq 2$. (Harjoitukset)

(2) [Lisätieto] Itse asiassa suunnikasyhtälö (Lause 4.9) karakterisoi sisätuloavaruudet: jos E on sellainen normiavaruus, että

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2), \qquad \text{kaikilla } x, y \in E,$$

niin E:n normi $\| \cdot \|$ on peräisin sisätulosta. Polarisaatiokaava (HT 4:2) kertoo miten sisätulon $(\cdot | \cdot)$ tulee määritellä, mutta sisätulon ominaisuuksien verifioiminen suunnikasyhtälöstä lähtien vaatii jonkinverran työtä. (Tämä on ns. Jordan- von Neumannin lause, katso esimerkiksi sivu 8 kirjasta D. Amir: *Characterizations of inner product spaces* (1986)).

Seuraavaksi alamme tarkastella minimointitehtäviä. Näillä on monia sovelluksia, esimerkiksi differentiaaliyhtälöistä aina käytännön prosessien optimointiin asti. Kun tilanteita mallinnetaan Hilbertin avaruuksilla tulee (usein) tehtäväksi selvittää, millä ehdoin joukoista löytyy normin minimoivia alkioita, ts. *jos E on Hilbertin avaruus ja $A \subset E$ on osajoukko, niin milloin on olemassa sellainen $x_0 \in A$, että*

$$\|x_0\| = \inf\{\|x\| : x \in A\} \; ?$$

Koska avaruutemme ovat ääretönulotteisia, minimien olemassaolo ei ole ollenkaan selvää, kuten seuraava yksinkertainen esimerkki näyttää.

4.11. **Esimerkki.** Olkoon $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \ell^2$; siis jonon n:s termi $= 1$. Jos $A = \{ \frac{n+2}{n+1} e_n : \; n \in \mathbb{N} \}$, tällöin A on suljettu ja rajoitettu, koska $\|\frac{n+2}{n+1}e_n - \frac{m+2}{m+1}e_m\|_2^2 = (\frac{n+2}{n+1})^2 + (\frac{m+2}{m+1})^2 \geq 2$ kun $n \neq m$. Kuitenkaan ei löydy sellaista vektoria $x \in A$, jolle olisi

$$\| x \| = \inf\{ \| y \| : \; y \in A \} = 1,$$

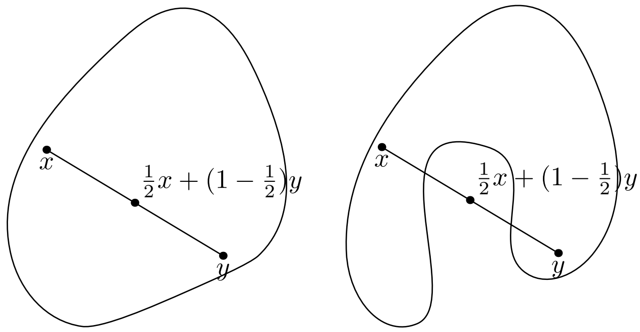
koska $\|\frac{n+2}{n+1}e_n\|_2 = \frac{n+2}{n+1} \to 1$ kun $n \to \infty$.

Joukkojen kompaktisuus tietysti takaisi minimoivien alkioiden olemassaolon, mutta ääretönulotteisissa avaruuksissa tämä oletus olisi aivan liian rajoittava. (Esimerkiksi suljettu yksikköpallo $B_{\ell^2} = \{x \in \ell^2 : \|x\|_2 \leq 1\}$ ei ole kompakti joukko, koska $\|e_n - e_m\|_2 = \sqrt{2}$ kaikilla $n \neq m$, kun $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \ell^2$, missä 1 on n:ssa paikassa.) On itse asiassa yllättävää, että Hilbertin avaruuksissa minimointitehtävä ratkeaa suhteellisen yleisesti. Olennainen ominaisuus tällaisissa minimointitehtävissä on *konveksisuus*.

Muistetaan, että pisteiden x ja y välinen *yhdysjana* on joukko

$$\{ \; x + t(y - x) : \; t \in [0, 1] \; \} = \{ \; tx + (1 - t)y : \; t \in [0, 1] \; \}.$$

4.12. **Määritelmä.** Vektoriavaruuden E osajoukko A on *konveksi*, jos pisteiden $x, y \in A$ välinen yhdysjana aina sisältyy joukkoon A eli jos $tx + (1-t)y \in A$ aina, kun $x, y \in A$ ja $0 \le t \le 1$.



Kuva 5. Konveksi joukko (vasemmalla) ja ei-konveksi joukko (oikealla); Kuvassa myös pisteiden x ja y väliset yhdysjanat.

4.13. **Esimerkki.** Olkoon E normiavaruus. Tällöin avoimet pallot $B(a,r)$ ja suljetut pallot $\overline{B}(a,r)$ ovat konvekseja joukkoja kaikilla $a \in E$ ja $r > 0$. Nimittäin, jos $y_1, y_2 \in B(a,r)$ ja $0 < t < 1$, niin

$$\|ty_1 + (1-t)y_2 - a\| = \|t(y_1 - a) + (1-t)(y_2 - a)\| \le t\|y_1 - a\| + (1-t)\|y_2 - a\| < r.$$

Tapaus $\overline{B}(a,r)$ samoin.

4.14. **Lause.** *Jos F on Hilbertin avaruuden E konveksi suljettu osajoukko, niin on olemassa* täsmälleen yksi *normin minimoiva alkio $x_0 \in F$, eli alkio $x_0 \in F$ joka toteuttaa ehdon*

$$\| x_0 \| \le \| x \| \text{ kaikilla } x \in F.$$

Toisin sanoen, $\| x_0 \| = \inf \{\|x\| : x \in F\} = dist(\overline{0}, F)$.

Todistus. Olkoon $\delta = \inf\{ \| x \| : \ x \in F \}$. Sovelletaan suunnikasyhtälöä (4.9) $\| u + v \|^2 + \| u - v \|^2 = 2\| u \|^2 + 2\| v \|^2$ vektoreihin $u = \frac{1}{2}x$, $v = \frac{1}{2}y$, kun $x, y \in F$. Tästä seuraa, että

$$\frac{1}{4}\| x - y \|^2 = \frac{1}{2}\| x \|^2 + \frac{1}{2}\| y \|^2 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2.$$

Koska konveksisuuden nojalla $\frac{1}{2}(x+y) \in F$, niin

$$(*) \qquad \| x - y \|^2 \le 2\| x \|^2 + 2\| y \|^2 - 4\delta^2.$$

Jos nyt $\| x \| = \| y \| = \delta$, niin arvion $(*)$ nojalla $\| x - y \|^2 \leq 0$, joten $x = y$. Siis normin minimoiva alkio on ainakin yksikäsitteinen, jos se on olemassa.

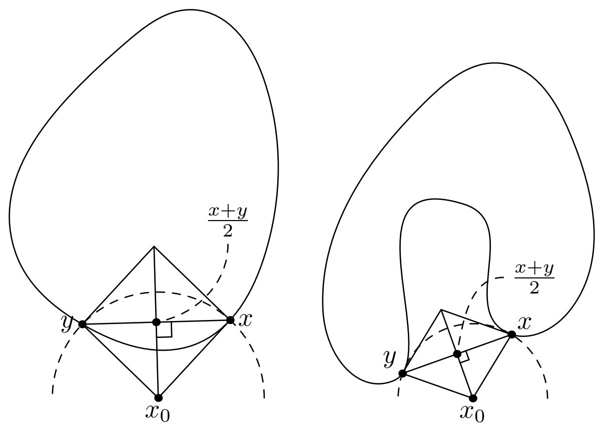
Olemassaoloa varten valitaan sellainen jono $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset F$, että $\| x_n \| \to \delta$, kun $n \to \infty$. Korvataan x ja y arviossa $(*)$ jonon alkioilla x_n ja x_m, josta

$$\| x_n - x_m \|^2 \leq 2\| x_n \|^2 + 2\| x_m \|^2 - 4\delta^2,$$

koska $\frac{1}{2}(x_n + x_m) \in F$ kaikilla n, m. Silloin $\| x_n - x_m \| \to 0$, kun $n, m \to \infty$. Siispä $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono Hilbertin avaruudessa E, joten on olemassa $x_0 \in E$ jolle $x_n \to x_0 \in E$, kun $n \to \infty$. Koska normi $\| \cdot \|$ on jatkuva funktio, niin

$$\| x_0 \| = \lim_{n \to \infty} \| x_n \| = \delta.$$

Koska F on suljettu ja $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset F$, niin raja-alkio $x_0 \in F$. □



KUVA 6. Minimointiongelman yksikäsitteisyyden geometrinen ajatus konveksille joukolle (vasemmalla) ja ei-konveksille joukolle (oikealla)

Edellinen lause voidaan muotoilla myös invariantisti, niin ettei origolla ole erikoisasemaa.

4.15. **Seuraus.** *Olkoon E Hilbertin avaruus, F sen suljettu konveksi osajoukko sekä $x \in E$. Silloin on täsmälleen yksi alkio $y_0 \in F$, jolle*

$$\| x - y_0 \| = \operatorname{dist}(x, F).$$

Tässä $\operatorname{dist}(x, F) = \inf\{ \| x - y \| : \ y \in F \}$ *on x:n etäisyys F:stä.*

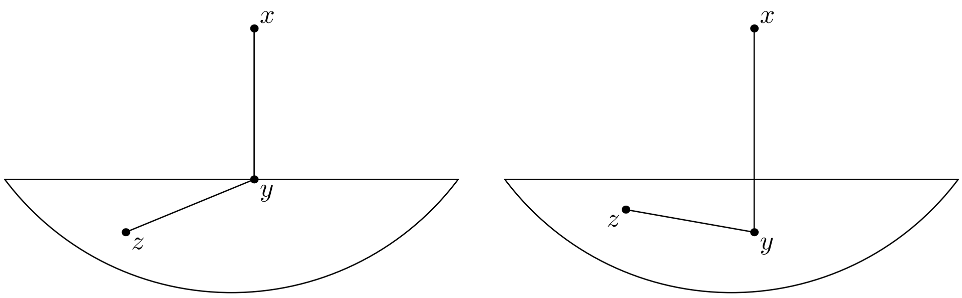
Todistus. Joukko $x - F$ on suljettu ja konveksi (tarkista!), sekä

$$\min\{ \| x - y \| : \ x - y \in x - F \} = \min\{ \| x - y \| : \ y \in F \}.$$

Nyt väite seuraa suoraan Lauseesta 4.14. □

Yo. lauseilla on suoraan sovelluksia konveksissa optimoinnissa, mutta niitä voidaan käyttää monissa muissakin minimointitehtävissä, esim. variaatiolaskennassa.

Olemme todistaneet minimoivan alkion y_0 olemassaolon ja yksikäsitteisyyden, mutta se voidaan myös helposti tunnistaa ! Seuraava lause kertoo, että $\| x - y_0 \| = \operatorname{dist}(x, F)$ jos ja vain jos vektoreiden $x - y_0$ ja $z - y_0$ välinen kulma on tylppä kaikilla $z \in F$. [Muista, että ($\mathbb{R}$-kertoimisessa) Hilbertin avaruudessa kahden vektorin a ja b välinen kulma $\varphi \in [0, 2\pi)$ saatiin ehdosta $(a \,|\, b) = \| a \| \| b \| \cos \varphi$.]



Kuva 7. vasemmalla tylppä kulma; oikealla terävä

4.16. **Lause.** *Olkoon E Hilbertin avaruus sekä $F \subset E$ sen suljettu konveksi ja epätyhjä osajoukko. Olkoon myös $x \in E$ ja $y \in F$. Tällöin*

$$\| x - y \| = \operatorname{dist}(x, F) \quad \Leftrightarrow \quad Re\, (x - y \,|\, z - y) \leq 0 \quad \textit{kaikilla } z \in F.$$

Todistus. Olkoon $\| x - y \| = \operatorname{dist}(x, F)$. Jos $z \in F$ ja $0 < t < 1$, niin konveksisuuden nojalla $y + t(z - y) = (1 - t)y + tz \in F$. Siispä

$$\| x - y - t(z - y) \|^2 \geq \| x - y \|^2,$$

josta kehittämällä vasen puoli auki sisätulon avulla saadaan

$$\| x - y \|^2 - 2t \operatorname{Re} (x - y \,|\, z - y) + t^2 \| z - y \|^2 \geq \| x - y \|^2.$$

Saamme tästä $\operatorname{Re} (x - y \,|\, z - y) \leq (t/2) \| z - y \|^2$ kaikilla $0 < t < 1$. Antamalla $t \to 0$ nähdään, että $\operatorname{Re} (x - y \,|\, z - y) \leq 0$.

Kääntäen, oletetaan että $\operatorname{Re} (x - y \,|\, z - y) \leq 0$ kaikilla $z \in F$. Tällöin oletuksen perusteella

$$\begin{aligned} \| x - z \|^2 &= \| x - y - (z - y) \|^2 \\ &= \| x - y \|^2 - 2 \operatorname{Re} (x - y \,|\, y - z) + \| z - y \|^2 \\ &\geq \| x - y \|^2 \end{aligned}$$

kaikilla $z \in F$. Tämä tarkoittaa, että $y \in F$ on normin minimoiva alkio, joten $\| x - y \| = \operatorname{dist}(x, F)$. Lause on näin todistettu. □

Ortogonaaliset projektiot

Seuraava käsite on keskeinen Hilbertin avaruuksien teoriassa.

4.17. **Määritelmä.** Jos $A \subset E$, niin joukon A *ortokomplementti* $A^\perp$ on joukko

$$A^\perp := \{\, y \in E : \ (\, x \,|\, y \,) = 0 \text{ kaikilla } x \in A \,\}.$$

Ortokomplementin ominaisuuksia varten tarvitsemme seuraavan aputuloksen.

4.18. **Lause.** *Sisätulon ehto* $(x, y) \mapsto (\, x \,|\, y \,)$ *määrää jatkuvan kuvauksen* $E \times E \to \mathbb{K}$.

Todistus. Jos $x_0 \in E$ ja $y_0 \in E$, niin kolmioepäyhtälön ja Cauchy–Schwarzin epäyhtälön nojalla, sekä kehittämällä auki $(\, x \,|\, y \,) = (\, x - x_0 + x_0 \,|\, y - y_0 + y_0 \,)$ saadaan

$$\begin{aligned}|(\, x \,|\, y \,) - (\, x_0 \,|\, y_0 \,)| &= |(\, x - x_0 \,|\, y - y_0 \,) + (\, x - x_0 \,|\, y_0 \,) + (\, x_0 \,|\, y - y_0 \,)| \\ &\le \|\, x - x_0 \,\| \, \|\, y - y_0 \,\| + \|\, x_0 - x \,\| \, \|\, y_0 \,\| + \|\, x_0 \,\| \, \|\, y - y_0 \,\|,\end{aligned}$$

missä oikea puoli $\to 0$, kun $x \to x_0$ ja $y \to y_0$. $\square$

Käy ilmi, että monimutkaisenkin osajoukon A ortokomplementti on hyvin säännöllinen:

4.19. **Lause.** *Jos* $A \subset E$, *niin sen ortokomplementti* $A^\perp$ *on avaruuden* E *suljettu aliavaruus.*

Todistus. Joukko $A^\perp$ on avaruuden E aliavaruus: Jos $y_1, y_2 \in A^\perp$ ja $a, b \in \mathbb{K}$, niin

$$(\, x \,|\, ay_1 + by_2 \,) = \overline{a}(\, x \,|\, y_1 \,) + \overline{b}(\, x \,|\, y_2 \,) = 0 + 0 = 0$$

kaikilla $x \in A$, joten $ay_1 + by_2 \in A^\perp$. Siispä $A^\perp$ on aliavaruus.

Seuraavaksi huomataan, että jos $x \in E$ on kiinteä vektori, niin

$$x^\perp \equiv \{x\}^\perp = \{y \in E : (\, x \,|\, y \,) = 0\}$$

on jatkuvan funktion $y \mapsto (\, x \,|\, y \,)$ alkukuva nollasta. Siispä joukko $x^\perp$ on suljettu. Näin ollen mielivaltaisella $A \subset E$,

$$A^\perp = \bigcap_{x \in A} x^\perp$$

on suljettujen joukkojen leikkauksena suljettu. $\square$

Huomautus. (a) Nolla-alkion $\bar{0}$ ortokomplementti on E eli $\{\bar{0}\}^\perp = E$.

(b) Koko avaruuden E ortokomplementti on $\{\bar{0}\}$ eli $E^\perp = \{\bar{0}\}$. Nimittäin, jos $y \in E^\perp$, niin $(\,x\,|\,y\,) = 0$ kaikilla $x \in E$. Erityisesti $(\,y\,|\,y\,) = \|\,y\,\|^2 = 0$, joten $y = \bar{0}$.

(c) Sama päättely antaa: jos $y \in A \cap A^\perp$, niin $y = \bar{0}$.

Olemme itse asiassa verifioineet seuraavan hyödyllisen havainnon.

4.20. **Lause.** *Jos $y_1, y_2 \in E$ ja $(\,x\,|\,y_1\,) = (\,x\,|\,y_2\,)$ kaikilla $x \in E$, niin $y_1 = y_2$.*

Todistus. Koska $0 = (\,x\,|\,y_1 - y_2\,)$ kaikilla $x \in E$, niin $y_1 - y_2 \in E^\perp = \{\bar{0}\}$, eli $y_1 = y_2$. □

Sovellamme seuraavaksi minimointilausetta 4.15 erikoistapaukseen, missä F on suljettu vektorialiavaruus. Tämä johtaa ortoprojektioihin, jotka tulevat olemaan lineaarisia kuvauksia.

4.21. **Lause.** *Olkoon E Hilbertin avaruus ja M sen suljettu vektorialiavaruus. Jos $x \in E$ ja $y \in M$, niin*

$$\|\,x - y\,\| = \operatorname{dist}(x, M) \quad \Leftrightarrow \quad (x - y) \perp M \ (\textit{eli}\ (\,x - y\,|\,z\,) = 0\ \forall z \in M).$$

Todistus. Oletamme ensin, että $\|\,x - y\,\| = \operatorname{dist}(x, M)$. Jos $z \in M$ sekä $\lambda \in \mathbb{K}$, niin lineaarinen kombinaatio $y + \lambda z \in M$ (koska M on vektorialiavaruus), ja Lauseen 4.16 nojalla

$$0 \geq \operatorname{Re}\left((\,x - y\,|\,(y + \lambda z) - y\,)\right) = \operatorname{Re}\left(\overline{\lambda}(\,x - y\,|\,z\,)\right)$$

kaikilla $\lambda \in \mathbb{K}$. Valitsemalla $\lambda = (\,x - y\,|\,z\,)$ tästä seuraa, että

$$|(\,x - y\,|\,z\,)|^2 \leq 0,$$

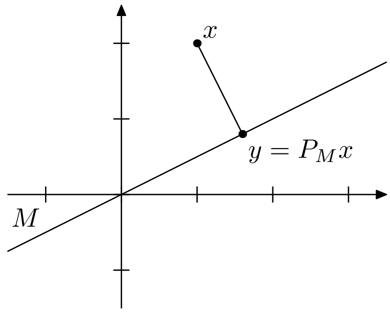
eli $(\,x - y\,|\,z\,) = 0$ kaikilla $z \in M$. Toisin sanoen, $x - y \in M^\perp$.

Kääntäen, oletetaan nyt, että $x - y \in M^\perp$. Jos $z \in M$, niin $z - y \in M$ ja siten $0 = (\,x - y\,|\,z - y\,) = \operatorname{Re}(\,x - y\,|\,z - y\,)$ kaikilla $z \in M$. Lauseen 4.16 nojalla tästä seuraa, että $\|\,x - y\,\| = \operatorname{dist}(x, M)$. □

Kun M on avaruuden E suljettu vektorialiavaruus, olkoon $P_M \colon E \to E$ kuvaus, joka liittää vektoriin x sen yksikäsitteisen vektorin $y \in M$, joka minimoi x:n etäisyyden vektorialiavaruuteen M. Siis

$$P_M(x) = y \quad \text{jos ja vain jos} \quad \|\,x - y\,\| = \operatorname{dist}(x, M). \tag{4.22}$$

Sanomme, että kuvaus P_M on avaruuden E *ortoprojektio* vektorialiavaruudelle M ja $y = P_M x$ on vektorin x ortoprojektio avaruudelle M.



Huomautus. Havaitaan lisäksi, että Lause 4.21 antaa seuraavanlaisen tavan karakterisoida vektorin x ortoprojektio:

$$y = P_M x \quad \text{jos ja vain jos} \quad y \in M \ \text{ ja } \ x - y \perp M. \tag{4.23}$$

Toisin sanoen, ehdon (4.23) mukaan seuraava esitys määrää ortoprojektion *yksikäsitteisesti* kaikilla vektoreilla $x \in E$:

$$x = P_M(x) + (x - P_M(x)), \text{ missä } P_M x \in M \quad \text{ja} \quad x - P_M x \in M^\perp. \tag{4.24}$$

Yksikäsitteisyys nähdään seuraavasti: jos $x \in E$ ja $x = y + z$, missä $y \in M$ ja $z \in M^\perp$, niin tällöin $P_M(x) + (x - P_M(x)) = y + z$. Tämä tarkoittaa, että

$$P_M(x) - y = z - (x - P_M(x)) \in M \cap M^\perp = \{\bar{0}\},$$

joten $y = P_M(x)$ (ja myös $z = x - P_M(x)$).

Ylläolevista tuloksista saadaan erityisesti

$$P_M x = \bar{0} \ \text{ kun } x \in M^\perp, \quad P_M x = x \ \text{ kun } x \in M. \tag{4.25}$$

Jos nimittäin $x \in M^\perp$, niin $x = \bar{0} + x$ on yksikäsitteinen esitys ehdossa (4.24), joten siis $P_M x = \bar{0}$. Jälkimmäinen väite seuraa suoraan määritelmästä (4.22).

Määrittelimme yllä ortoprojektion puhtaasti *metrisenä* suureena, mutta Hilbert avaruuden vektoriavaruus-struktuurin takia päädymme lineaariseen operaattoriin.

4.26. **Lause.** *Olkoon M suljettu vektorialiavaruus Hilbertin avaruudessa E. Silloin ortoprojektio $P_M : E \to E$ on lineaarinen kuvaus.*

Todistus. Lineaarisuuden havaitsemiseksi käytetään esitystä

$$x + \lambda y = \underbrace{P_M x + \lambda P_M y}_{\in M} + \underbrace{(x - P_M x) + \lambda(y - P_M y)}_{\in M^\perp},$$

kun $x, y \in E$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$. Esityksestä ja ehdon (4.24) yksikäsitteisyydestä seuraa, että $P_M(x + \lambda y) = P_M x + \lambda P_M y$. Siis P_M on lineaarinen.

□

Olkoon E vektoriavaruus. Lineaarialgebrasta muistamme, että lineaarikuvaus $P\colon E \to E$ on *projektio*, jos $P^2 = P$. (Tässä $P^2 = P \circ P$.) Mikäli $U = P(E)$ ja $V = \ker P = \{x \in E : Px = \overline{0}\}$, sanomme että P on projektio *avaruudelle U suuntaan V*.

Läheinen lineaarialgebran käsite on nk. suora summa. Sanomme, että E on aliavaruuksien U ja V *suora summa*, merkitään $E = U \oplus V$, jos

$$E = U + V = \{u + v : u \in U, v \in V\}, \text{ ja } U \cap V = \{\bar{0}\}.$$

Voidaan osoittaa, että jos P on projektio avaruudelle U suuntaan V, niin $E = U \oplus V$. (Nimittäin: jos $x \in E$, niin $x = Px + (x - Px)$, missä $Px \in U = P(E)$ ja $x - Px \in \ker(P) = V$.) Kääntäen, jos $E = U \oplus V$, niin suora summa määrittelee projektion P avaruudelle U suuntaan V. Nimittäin silloin jokaisella $x \in E$ on *yksikäsitteinen* esitys $x = u + v$, missä $u \in U$ ja $v \in V$. Asetetaan tällöin $P(x) = u$; nyt P on lineaarinen projektio ja $U = P(E)$, $V = \ker P$. [Näiden väitteiden (helpot) yksityiskohdat jätetään ylimääräiseksi lineaarialgebran harjoitustehtäväksi].

4.27. **Lause.** *Jos M on Hilbertin avaruuden E suljettu vektorialiavaruus, niin $E = M \oplus M^\perp$ ja P_M on avaruuden E projektio aliavaruudelle M suuntaan $M^\perp$. Lisäksi*

$$\| P_M x \| \le \| x \| \quad \textit{kaikilla } x \in E,$$

joten P_M on jatkuva lineaarinen operaattori.

Todistus. Lauseesta 4.19 sivulla 72 muistetaan, että $M^\perp$ on avaruuden E vektorialiavaruus. Lisäksi (4.24) osoitti että jokainen $x \in E$ voidaan hajottaa summaksi $x = P_M x + x - P_M x$, missä $P_M x \in M$ ja $x - P_M \in M^\perp$. Siis $E = M + M^\perp$. Lisäksi, jos $x \in M \cap M^\perp$, niin $\| x \|^2 = (x \,|\, x) = 0$, joten $x = \bar{0}$. Siispä $M \cap M^\perp = \{\bar{0}\}$ ja $E = M \oplus M^\perp$ on siten suora summa.

Seuraavaksi tarkastellaan esitystä $x = P_M x + z$, missä $z = x - P_M x \in M^\perp$. Koska edellä havaitsimme että $P_M z = \bar{0}$, niin lineaarisuuden avulla saadaan

$$P_M^2 x = P_M(P_M x) = P_M(x - z) = P_M x - P_M z = P_M x.$$

Siis P_M on projektio. Ehto $P_M(E) = M$ seuraa kaavasta (4.23) [valitaan $y = x$]. Todettiin edellä, että $M^\perp \subset Ker(P)$. Kääntäen, jos $x \in E$ ja $P_M(x) = \bar{0}$, niin esityksen (4.24) yksikäsitteisyydestä seuraa $x = \bar{0} + x \in M^\perp$.

Lopuksi, normiarviota varten käytetään Pythagoraan lausetta (Lause 4.8),

$$\| x \|^2 = \| P_M x + (x - P_M x) \|^2 = \| P_M x \| + \| x - P_M x \|^2 \ge \| P_M x \|^2,$$

joten väite seuraa. □

4.28. *Huomautus.* (1) Lauseesta 4.27 seuraa myös, että itse asiassa $\| P_M \| = 1$ kun $M \neq E$ (Miksi ? !).
(2) Olkoon yleisemmin $F \subset E$ suljettu konveksi joukko. Seurauksen 4.15 nojalla on olemassa sellainen *metrinen projektio* $P_F : E \to E$, että jokaisella $x \in E$ pätee $P_F(x) = y$, missä $y \in F$ on se yksikäsitteinen vektori jolle $\|x - y\| = dist(x, F)$. Metrinen projektio P_F ei yleensä ole lineaarikuvaus, mutta se on kuitenkin aina *kontraktio* (HT 4:9):

$$\|P_F(u) - P_F(v)\| \leq \|u - v\| \quad \text{kaikilla } u, v \in E.$$

Ortonormaalit kannat

4.29. **Määritelmä.** Sisätuloavaruuden jono (e_n) on *ortonormaali* (tai *ortonormitettu*), jos

$$(e_i \,|\, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Toisin sanoen, jono (e_j) on ortonormaali, jos $e_i \perp e_j$ aina kun $i \neq j$ ja $\| e_j \| = 1$ jokaisella j.

4.30. **Esimerkki.**
(1) Kanoniset kantavektorit $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \ell^2$, missä nollasta eroava termi on n:s, $n \in \mathbb{N}$, muodostavat ortonormaalin jonon avaruudessa ℓ^2.

(2) $E = L^2(0, 2\pi)$ varustettuna sisätulolla

$$(x \,|\, y) = \int_0^{2\pi} x(t)\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t,$$

on Hilbertin avaruus; jono $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, missä

$$x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\cos(nt) + i\sin(nt)), \quad n \in \mathbb{Z},$$

on ortonormitettu jono avaruudessa E. Nimittäin, jos $n \neq m$ niin

$$\begin{aligned} (x_n \,|\, x_m) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{int}\overline{e^{imt}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{i2\pi(n-m)}(e^{i(n-m)2\pi} - e^{i(n-m)0}) = 0. \end{aligned}$$

Edellä käytettiin tietoa $\overline{e^{imt}} = e^{-imt}$.

Ortonormaaleja jonoja ja niiden määräämiä vektorisummia voi helposti kontrolloida tärkeän *Besselin epäyhtälön* avulla.

Lause (Besselin epäyhtälö)**.** *Jos* (e_n) *on ortonormaali jono Hilbertin avaruudessa* E*, niin*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(\, x \mid e_k \,)|^2 \le \|\, x \,\|^2 \tag{B}$$

kaikilla $x \in E$*. Erityisesti,*

$$\lim_{k\to\infty} (\, x \mid e_k \,) = 0.$$

Huomautus. Besselin epäyhtälö (B) pätee myös äärelliselle ortonormaalille jonolle $(e_1, \dots, e_m) \subset E$. (Todistus kuten alla, mutta ilman vaihetta $n \to \infty$.)

Todistus. Jos (e_n) on ortonormaali jono avaruudessa E ja $x \in E$, niin havaitaan aluksi että vektorit $x - \sum_{k=1}^{n} (\, x \mid e_k \,) e_k$ ja $\sum_{k=1}^{n} (\, x \mid e_k \,) e_k$ ovat kohtisuoria toisiaan kohtaan kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Nimittäin, ottamalla sisätulo termeittäin saadaan

$$\begin{aligned} (\, x - \sum_{k=1}^{n} (\, x \mid e_k \,) e_k \mid e_j \,) &= (\, x \mid e_j \,) - \textstyle\sum_{k=1}^{n} (\, x \mid e_k \,)(\, e_k \mid e_j \,) \\ &= (\, x \mid e_j \,) - (\, x \mid e_j \,) = 0, \end{aligned} \tag{4.31}$$

kun $j = 1, \dots, n$. Näin siis $x - \sum_{k=1}^{n} (\, x \mid e_k \,) e_k \perp \sum_{k=1}^{n} (\, x \mid e_k \,) e_k$ (muista: ortokomplementti on vektorialiavaruus). Siten Pythagoraan lauseen mukaan

$$\begin{aligned} \|\, x \,\|^2 &= \Big\| \, x - \textstyle\sum_{k=1}^{n} (\, x \mid e_k \,) e_k \Big\|^2 + \Big\| \textstyle\sum_{k=1}^{n} (\, x \mid e_k \,) e_k \Big\|^2 \\ &\ge \Big\| \textstyle\sum_{k=1}^{n} (\, x \mid e_k \,) e_k \Big\|^2 = \textstyle\sum_{k=1}^{n} |(\, x \mid e_k \,)|^2 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Edellä myös viimeinen yhtäsuuruus perustui Pythagoraan lauseeseen (ja siihen että $\|\, e_j \,\| = 1$ jokaisella j).

Olemme siis näyttäneet, että jokaisella $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$\sum_{k=1}^{n} |(\, x \mid e_k \,)|^2 \le \|\, x \,\|^2.$$

Antamalla lopuksi $n \to \infty$ saadaan Besselin epäyhtälö (B). □

4.33. **Määritelmä.** Jos (e_n) on ortonormaali jono Hilbertin avaruudessa E ja $x \in E$, niin lukuja $(\, x \mid e_k \,)$ sanotaan vektorin x *Fourier-kertoimiksi* jonon (e_n) suhteen.

Jos E on vektoriavaruus ja $A \subset E$, olkoon $\operatorname{span}(A)$ joukon A virittämä avaruuden E vektorialiavaruus, eli

$$\operatorname{span}(A) := \{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i : \ n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{K}, a_i \in A \}.$$

Edelleen $\overline{\text{span}}\,(A)$ on aliavaruuden $\text{span}\,(A)$ sulkeuma avaruudessa E.

Seuraava tulos antaa hyödyllisen ja konkreettisen kaavan ortoprojektiolle vektoreiden $e_1, \dots, e_n$ virittämälle aliavaruudelle, tapauksessa missä $(e_1, \dots, e_n)$ on äärellinen ortonormaali jono Hilbertin avaruudessa E.

4.34. **Lause.** *Olkoon E Hilbertin avaruus, $(e_j)_{j=1}^n \subset E$ äärellinen ortonormaali jono sekä $M = span(\{e_1, \dots, e_n\})$. Tällöin*

a) M on suljettu E:n vektorialiavaruus, eli $M = \overline{span}\,(\{e_1, \dots, e_n\})$.

b) jos $P = P_M$ on ortoprojektio M:lle, niin

$$Px = \sum_{k=1}^{n} (\, x \,|\, e_k \,)\, e_k, \quad x \in E. \tag{4.35}$$

Todistus. Kaavan (4.35) määrittelemä kuvaus P on selvästi lineaarinen, koska kuvaus $x \mapsto (\, x \,|\, e_j \,)$ on lineaarinen kaikilla j. Lisäksi Pythagoraan lauseen ja Besselin epäyhtälön nojalla $\|\, Px \,\|^2 = \sum_{k=1}^n |(\, x \,|\, e_k \,)|^2 \le \|\, x \,\|^2$ kun $x \in E$, joten P on jatkuva (luku 2).

Toisaalta, jos $x \in M$, niin $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k\, e_k$ joillakin skalaareilla $\lambda_k \in \mathbb{K}$. Ottamalla tästä sisätulo e_j:n kanssa, saadaan ortogonaalisuuden nojalla $\lambda_j = (\, x \,|\, e_j \,)$, $j = 1, \dots, n$. Mutta tämä kertoo, että $Px = x$ jokaisella $x \in M$. Koska $Px \in M$ määritelmän nojalla, niin

$$M \;=\; \{x \in E : Px = x\} \;=\; \ker(I - P),$$

missä I on avaruuden E identtinen kuvaus. Jatkuvan lineaarikuvauksen $I - P$ ytimenä $M = (I - P)^{-1}(\{\bar{0}\})$ on näin ollen suljettu vektorialiavaruus.

Lopuksi, kuten yhtälössä (4.31) nähdään, että

$$e_j \perp \Big(x - \sum_{k=1}^{n} (\, x \,|\, e_k \,)\, e_k\Big) = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

eli yhtäpitävästi $x - Px \in M^\perp$, $x \in E$. Lauseen 4.21 mukaan ehdot $Px \in M$ ja $x - Px \in M^\perp$ karakterisoivat ortoprojektion yksikäsitteisesti; vrt. myös (4.23). Siis $P_M x = \sum_{k=1}^n (\, x \,|\, e_k \,)\, e_k = Px$ kaikilla $x \in E$, joten olemme todistaneet myös väitteen b). □

4.36. *Huomautus.* (1) Pätee yleisesti: Jokaisessa Banachin avaruudessa jokainen äärellisulotteinen aliavaruus on suljettu [Tähän (ehkä) palataan myöhemmin].

(2) Lineaarialgebran kurssilta tunnetulla Gram-Schmidtin menetelmällä jokaiseen Hilbert-avaruuden äärellisulotteiseen aliavaruuteen M voidaan konstruoida ortonormaali kanta (vrt. Lauseen 4.41 todistus alla); tällöin Lause 4.34 antaa konkreettisen lausekkeen M:n ortoprojektiolle.

(3) Voimme nyt yhdistää Lauseet 4.21 ja 4.34, jolloin saamme seuraavan tulkinnan: Jos $(e_1,\dots .e_n)$ on ortonormaali jono E:ssä, niin jokaisella $x \in E$ funktio

$$(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \mapsto \Big\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \Big\|, \quad \mathbb{K}^n \to [0,\infty),$$

saa pienimmän arvonsa *täsmälleen* (!) silloin, kun

$$\lambda_k = (\, x \,|\, e_k \,), \quad \text{kaikilla } k = 1,\dots,n.$$

Kyseinen pienin arvo on $\Big\| x - \sum_{k=1}^{n} (\, x \,|\, e_k \,) e_k \Big\| = dist(x,M)$.

Tutkimme seuraavaksi ortonormaaleista vektoreista muodostettujen sarjojen summautumista Hilbertin avaruuksissa. Osoittautuu, että summautuminen riippuu vain kerroinjonon ominaisuuksista (yleisissä Banach-avaruus summissa tilanne ei ole lainkaan yhtä helppo):

4.37. **Lause.** *Olkoon $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormaali jono Hilbertin avaruudessa E. Jos $\lambda_n \in \mathbb{K}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin sarja*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k \text{ suppenee jos ja vain jos } \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 < \infty.$$

Tällöin pätee

$$\Big\| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k \Big\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2.$$

Todistus. Olkoon $s_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$ sarjan n:s osasumma kun $n = 1,2,\dots$. Tällöin määritelmän ja täydellisyyden nojalla sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$ suppenee jos ja vain jos (s_n) on Cauchyn jono.

Olkoon tätä varten $p,q \in \mathbb{N}$ ja $p < q$, jolloin Pythagoraan lauseen nojalla

$$\|s_q - s_p\|^2 = \Big\| \sum_{k=1}^{q} \lambda_k e_k - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k \Big\|^2 = \Big\| \sum_{k=p+1}^{q} \lambda_k e_k \Big\|^2 = \sum_{k=p+1}^{q} |\lambda_k|^2.$$

Siispä osasummat (s_n) muodostavat Cauchyn jonon avaruudessa E jos ja vain jos positiiviterminen sarja $\sum_k |\lambda_k|^2$ suppenee. Tämä osoittaa väitteen ensimmäisen osan. Jos nyt

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k,$$

niin sisätulon jatkuvuuden ja ortonormaalisuuden nojalla

$$(\, x \,|\, e_j \,) = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k \,|\, e_j \Big) = (\, \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \,|\, e_j \,) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (\, e_k \,|\, e_j \,) = \lambda_j$$

kaikilla $j \in \mathbb{N}$, mistä samoin

$$\| x \|^2 = (x \,|\, x) = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k \,|\, x \Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (e_k \,|\, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overline{\lambda}_k = \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k|^2 .$$

□

4.38. **Seuraus** (Riesz–Fischerin lause)**.** *Olkoon E Hilbertin avaruus ja $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sen ortonormaali jono. Jos $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^2$, niin löytyy sellainen $x \in E$, että*

$$(x \,|\, e_k) = \lambda_k \,, \qquad \textit{kaikilla } k \in \mathbb{N},$$

toisin sanoen, kuvaus $x \mapsto ((x \,|\, e_k))_{k\in\mathbb{N}}$ on surjektio $E \to \ell^2$.

Todistus. Lauseen 4.37 nojalla $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$ suppenee E:ssa, ja Fourier kertoimet $(x \,|\, e_k) = \lambda_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ (vrt. edellä Lauseen 4.37 todistus). □

4.39. **Määritelmä.** Hilbertin avaruuden E ortonormaali jono $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on *Hilbertin kanta* (tai *ortonormaali kanta*) avaruudessa E, jos

$$\overline{\mathrm{span}}\,(\{ e_n : \ n \in \mathbb{N} \}) = E.$$

Huomautus. (1) Jono $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on Hilbertin kanta jos ja vain jos $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on maksimaalinen ortonormaali joukko avaruudessa E.

Todistus. Jos $M = \overline{\mathrm{span}}\,(\{ e_n : \ n \in N \})$, niin $M \neq E \iff M^{\perp} \neq \{\bar{0}\}$ (muista: $E = M \oplus M^{\perp}$ Lauseen 4.27 nojalla). Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että löytyy $x \in M^{\perp}$, jolle $\| x \| = 1$. Tämä on edelleen yhtäpitävää sen kanssa, että joukko $\{x\} \cup \{ e_n : \ n \in \mathbb{N} \}$ on ortonormaali $\iff$ M ei ole maksimaalinen ortonormaali joukko avaruudessa E. □

(2) Äärellisulotteisissa Hilbertin avaruuksissa E tilanne on helpompi (ja lineaarialgebran tiedot riittävät): jos $dim(E) = n < \infty$, niin ortonormaali jono $(e_1, \ldots, e_n)$ on *Hilbertin kanta* avaruudessa E. Nimittäin, ortonormaali jono $(e_1, \ldots, e_n)$ on aina vapaa, joten dimension perusteella pätee jopa $E = \mathrm{span}(\{e_1, \ldots, e_n\})$.

Seuraava Hilbertin kantojen karakterisaatiolause on keskeinen Hilbertin avaruuksien teoriassa ja sovelluksissa. Tulos formuloidaan tässä ääretönulotteisessa tapauksessa (vrt. Huomautuksessa (2) oleva kommentti äärellisulotteisesta tilanteesta).

4.40. **Lause.** *Olkoon $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormaali jono Hilbertin avaruudessa E. Silloin seuraavat viisi ehtoa ovat yhtäpitäviä:*

a) jono $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on Hilbertin kanta avaruudessa E, *b*) *sisätulot* $(x \,|\, e_n) = 0$ *kaikilla* $n \in \mathbb{N}$ *jos ja vain jos* $x = \bar{0}$,

c) *jokaisella* $x \in E$ *on voimassa* $x = \sum_{n=1}^{\infty}(x \,|\, e_n)\, e_n$ *(suppeneminen on normin mielessä, eli*

$$\| \, x - \sum_{n=1}^{N}(x \,|\, e_n)\, e_n \, \| \to 0, \quad \textit{kun } N \to \infty),$$

d) *jokaisella* $x \in E$ *on voimassa*

$$\| \, x \, \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x \,|\, e_n)|^2,$$

e) *jokaisella* $x, y \in E$ *on voimassa*

$$(x \,|\, y) = \sum_{n=1}^{\infty}(x \,|\, e_n)\overline{(y \,|\, e_n)}.$$

Huomautus. (1) Ehtoa d) sanotaan *Parsevalin yhtälöksi* ja ehtoa e) *Plancherelin kaavaksi.* (Kirjallisuudessa on terminologiassa vaihtelua: joskus sekä ehtoa d) että e) kutsutaan Parsevalin yhtälöiksi.)
(2) Ehdossa b) esityksen $x = \sum_{n=1}^{\infty}(x \,|\, e_n)\, e_n$ kertoimet $(x \,|\, e_n), n \in \mathbb{N}$, ovat yksikäsitteiset kaikilla $x \in E$.
(3) Vastaavanlainen karakterisaatio pätee kun $dim(E) = m$ ja $(e_1, \ldots, e_m) \subset E$ on ortonormaali jono. (Ehdoissa c) - e) summataan silloin vain 1:stä m:ään.) Todistus on helpompi variaatio allaolevasta.

Todistus. Havaitaan aluksi että jokaisella joukolla $A \subset E$ pätee

$$(\overline{A})^{\perp} = A^{\perp},$$

missä $\overline{A}$ on A:n sulkeuma. Nimittäin, jos $x \in A^{\perp} = \{x \in E : (x \,|\, a) = 0 \; \forall \, a \in A\}$ niin sisätulon jatkuvuuden nojalla myös $(x \,|\, a) = 0$ kaikilla $a \in \overline{A}$, eli $x \in (\overline{A})^{\perp}$. Toisaalta, käänteinen inkluusio $(\overline{A})^{\perp} \subset A^{\perp}$ on selvä. Erityisesti, jos $M = \overline{\mathrm{span}}\,(\{e_n : n \in \mathbb{N}\})$, niin b) on yhtäpitävää ehdon $M^{\perp} = \{\bar{0}\}$ kanssa. Tämä taas on yhtäpitävää sen kanssa että $M = E$, koska $E = M \oplus M^{\perp}$ (vrt. Lause 4.27). Toisin sanoen, *a*) ja *b*) ovat yhtäpitäviä.

Helposti havaitaan, että

$$e) \implies d) \implies b).$$

Käänteiseen suuntaan osoitetaan ensin, että $b) \implies c)$. Oletetaan siis, että ehto *b*) on voimassa. Jos $x \in E$, niin olkoon

$$\widehat{x} = \sum_{n=1}^{\infty}(x \,|\, e_n)\, e_n,$$

missä oikeanpuoleinen sarja suppenee avaruudessa E Besselin epäyhtälön ja Lauseen 4.37 nojalla. Nyt kaikilla $k \in \mathbb{N}$ pätee

$$(\widehat{x} \,|\, e_k) = \lim_{N\to\infty} \Big(\sum_{n=1}^{N} (x \,|\, e_n)\, e_n \,|\, e_k \Big) = (x \,|\, e_k)$$

eli $(\widehat{x} - x \,|\, e_k) = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Ehdon b) nojalla siis $\widehat{x} = x$, joten olemme näyttäneet, että c) pätee.

Lopuksi, näytetään $c) \implies e)$. Koska oletuksen mukaan

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x \,|\, e_n)\, e_n$$

kaikilla $x \in E$, on siis taas jatkuvuuden ja lineaarisuuden perusteella

$$\begin{aligned} (x \,|\, y) &= \lim_{N\to\infty} \Big(\sum_{n=1}^{N} (x \,|\, e_n)\, e_n \,|\, y \Big) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (x \,|\, e_n)(e_n \,|\, y) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (x \,|\, e_n)(e_n \,|\, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x \,|\, e_n) \overline{(y \,|\, e_n)}. \end{aligned}$$

(Edellä oikeanpuoleinen sarja suppenee Hölderin epäyhtälön perusteella.) □

Jos Hilbertin avaruudessa E ylipäätään on Hilbertin kanta, niin selvästi E on separoituva. Käy ilmi että tämä onkin ainoa rajoite Hilbertin kannan löytymiselle.

4.41. **Lause.** *Jokaisessa separoituvassa Hilbertin avaruudessa E on Hilbertin kanta.*

Todistus. (1) Oletetaan, että $\dim E = n < \infty$. Silloin avaruudella E on lineaarinen kanta $(x_1, \dots, x_n)$. Käyttämällä Lineaarialgebrasta tuttua *Gram-Schmidtin menetelmää* voidaan tästä kannasta konstruoida uusi, ortonormaali kanta. Tämä on tehty yksityiskohtaisesti esim. Honkasalon monisteessa s. 70, Lauseessa 3.3.3.

Kertaamme tässä lyhyesti Gram-Schmidtin konstruktion: Olkoon

$$M_q = \operatorname{span} (\{ x_j : \ 1 \le j \le q \})$$

Osoitetaan induktiolla luvun q suhteen, että avaruudella M_q on ortonormaali kanta jokaisella $q = 1, \dots, n$. Väite seuraa tästä, kun $q = n$.

Tapaus $n = 1$ on selvä valitsemalla $e_1 = \| x_1 \|^{-1} x_1$. Oletetaan, että avaruudella M_q on ortonormaali kanta $(e_1, \dots, e_q)$. Olkoon P_q avaruuden E ortoprojektio aliavaruudelle M_q ja $y_{q+1} = x_{q+1} - P_q x_{q+1}$. Koska jono $(x_1, \dots, x_n)$ on lineaarisesti vapaa, tiedämme että $x_{q+1} \notin M_q$, joten $y_{q+1} \neq \bar{0}$ ja $y_{q+1} \perp M_{q+1}$

Lauseen 4.21 mukaan. Valitaan $e_{q+1} = \| y_{q+1} \|^{-1} y_{q+1}$. Tällöin induktio-oletuksen nojalla joukko $\{e_1, \ldots, e_{q+1}\}$ muodostaa avaruuden M_{q+1} ortonormaalin kannan, koska $dim(M_{q+1}) = q + 1$. Siispä väite on osoitettu.

(2) Oletetaan sitten, että $\dim E = \infty$. Koska E on separoituva, voimme löytää tiheän jonon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Konstruoidaan induktiolla sellainen osajono (x_{n_j}), että kaikilla $p \in \mathbb{N}$ on voimassa:

(i) joukko $\{x_{n_1}, \ldots, x_{n_p}\}$ on lineaarisesti vapaa, ja

(ii) $x_m \in \operatorname{span}(\{x_{n_1}, \ldots, x_{n_p}\})$ aina, kun $1 \le m \le n_p$, toisin sanoen,

$$\operatorname{span}(\{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_p}\}) = \operatorname{span}(\{x_r : 1 \le r \le n_p\}). \tag{4.42}$$

[*Konstruktio:* Jos on löydetty $n_1 < \ldots < n_p$ siten että ehdot (i) ja (ii) ovat voimassa, olkoon luku $n_{p+1} > n_p$ pienin luonnollinen luku $m > n_p$, jolle $\{x_{n_1}, \ldots, x_{n_p}, x_m\}$ on vapaa joukko. Tällöin myös

$$x_r \in span(\{x_{n_1}, \ldots, x_{n_p}, x_{n_{p+1}}\})$$

aina kun $n_p < r < n_{p+1}$. Nimittäin: valinnan perusteella on $cx_r + \sum_{j=1}^{p} c_j x_{n_j} = \overline{0}$ jollakin $c \neq 0$ (mieti miksi!)]

Merkitään $y_k = x_{n_k}$ kun $k \in \mathbb{N}$. Soveltamalla kohdan (1) ortonormeeraustekniikkaa jonoon (y_k) saamme konstruoitua avaruuteen E Hilbertin kannan (e_k). Edellä tarvittava ominaisuus $E = \overline{span}(\{e_n : n \in \mathbb{N}\})$ seuraa jonon (x_n) tiheydestä, sekä ehdosta (4.42) (tarkista!) $\square$

Olkoon $(e_j)_{j \in \mathcal{J}}$ separoituva Hilbertin avaruuden ortonormaali kanta, missä $\mathcal{J} = \mathbb{N}$ tai $\mathcal{J} = \{1, \ldots, n\}$ jollakin $n \in \mathbb{N}$. Tällöin jokaisella $x \in E$ on yksikäsitteinen esitys

$$x = \sum_{k \in \mathcal{J}} (\, x \mid e_k \,)\, e_k.$$

Olkoon aluksi $\mathcal{J} = \mathbb{N}$. Määritellään lineaarikuvaus $T \colon \ell^2 \to E$ asettaen

$$T\big((\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}\big) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k e_k, \quad (\lambda_k) \in \ell^2.$$

Tällöin T on lineaarinen *isomorfismi* $\ell^2 \to E$ (toisin sanoen, T on sellainen lineaarinen bijektio $\ell^2 \to E$, että T ja sen käänteiskuvaus T^{-1} ovat jatkuvia). Nimittäin: Lauseen 4.37 nojalla

$$\| Tx - Ty \| = \| \sum_k (x_k - y_k) e_k \| = (\sum_k |x_k - y_k|^2)^{1/2} = \|x - y\|_2$$

kaikilla $x = (x_k), y = (y_k) \in \ell^2$. (Itse asiassa, T on jopa *isometria*, eli etäisyydet säilyvät tarkalleen.) Lisäksi T on lineaarinen bijektio Lauseiden 4.37 ja 4.40 perusteella. Lineaarisuus seuraa suppenevien sarjojen ominaisuuksista (tarkista!). Jos $x = (x_k) \in \ell^2$ ja $Tx = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k = \overline{0}$, niin $x_k = 0$ kaikilla

k esityksen yksikäsitteisyyden nojalla. Tosiaalta, jos $x = \sum_{k=1}^{\infty}(\, x \,|\, e_k \,)e_k \in E$, niin jono $((\, x \,|\, e_k \,))_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ Parsevalin kaavan perusteella, ja

$$x = \sum_{k=1}^{\infty}(\, x \,|\, e_k \,)e_k = T((\, x \,|\, e_k \,)_{k\in\mathbb{N}}).$$

Tapauksessa $\mathcal{J} = \{1, \ldots, n\}$ saadaan lineaarikuvaus $T\colon \mathbb{K}^n \to E$ ehdolla

$$T\big((\lambda_k)_{k\in\mathcal{J}}\big) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k.$$

Tässäkin T on samoin lineaarinen isomorfismi $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2) \to E$.

Yhteenvetona siis kaikki separoituvat Hilbertin avaruudet ovat isomorfismia vaille joko tyyppiä ℓ^2 tai $\ell_2^n = (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$!

4.43. **Esimerkkejä.**

(1) Olkoon $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) \in \ell^2$ (ykkönen n:nnessa kohdassa) kun $n = 1, 2, \ldots$. Tällöin (e_n) on jonoavaruuden ℓ^2 ortonormaali kanta: jos $x = (x_n) \in \ell^2$ ja $0 = (\, x \,|\, e_n \,) = x_n$ kaikilla n, niin $x = \overline{0}$. (Lause 4.40, ehto b))

(2) Olkoon $L^2(0,1) \equiv L^2([0,1])$ reaalikertoiminen Hilbertin avaruus, joka koostuu 2-integroituvista funktioista $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, joille $\|f\|_2^2 = \int_0^1 |f(t)|^2 dt < \infty$ (tarkemmin: vastaavista ekvivalenssiluokista, vrt. lukua 3). *Haarin systeemi* $(h_n(x))_{n=0}^{\infty}$ on ehkä helpoin tapa konstruoida Hilbertin kanta avaruuteen $L^2(0,1)$]. Lähdemme liikkeelle välin $[0,1]$ karakteristisesta funktiosta ja valitsemme $h_0(x) = \chi_{[0,1]}(x) = 1$ kaikilla $x \in [0,1]$. Selvästi $\|\, h_0 \,\|_2 = 1$.

Muut kantafunktiot valitaan seuraavasti: Jos $0 \le j < 2^k$, olkoon $n = 2^k + j$ ja

$$\Delta_n = \left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right] \subset [0,1],$$
$$\Delta_n^+ = \left(\frac{j}{2^k}, \frac{j+1/2}{2^k}\right), \quad \Delta_n^- = \left(\frac{j+1/2}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right).$$

Asetetaan

$$h_n(t) = 2^{\frac{k}{2}}\left(\chi_{\Delta_n^+}(t) - \chi_{\Delta_n^-}(t)\right) = \begin{cases} 2^{\frac{k}{2}}, & t \in \Delta_n^+ \\ -2^{\frac{k}{2}}, & t \in \Delta_n^- \\ 0, & t \notin \Delta_n^+ \cup \Delta_n^- \end{cases}$$

kun $n = 1, 2, 3, \ldots$, ja $n = 2^k + j$ kuten edellä.
(Piirrä itsellesi neljän ensimmäisen Haarin funktion $h_0, \ldots, h_4$ kuvaajat !)

Näin muodostettu Haarin systeemi $(h_n(x))_{n=0}^{\infty} \subset L^2(0,1)$ on Hilbertin kanta. [Mittateoreettisine yksityiskohtineen tämä on pitkähkö harjoitustehtävä, katso HT 4:12 ja 4:13.] Haarin kannan Fourier-kertoimet funktiolle $f \in L^2(0,1)$

saadaan kaavoista

$$(f \mid h_0) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t, \quad (f \mid h_n) = 2^{\frac{k}{2}} \left[\int_{\Delta_n^+} f\,\mathrm{d}t - \int_{\Delta_n^-} f\,\mathrm{d}t \right]$$

kun $n = 2^k + j$ kuten edellä. Siis kaikilla $f \in L^2(0,1)$ on

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} (f \mid h_n)\, h_n$$

ja sarja suppenee avaruudessa $L^2(0,1)$, so. L^2-normin mielessä.

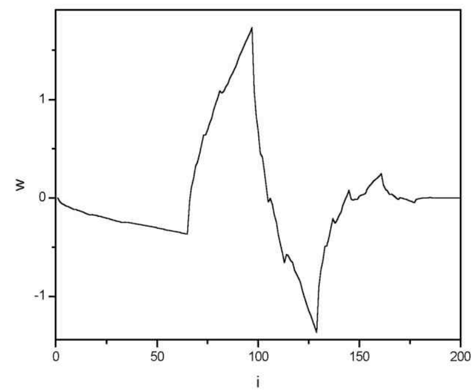
(3) Luvussa 5 osoitetaan, että jono $(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$ on ortonormaali kanta $\mathbb{C}$-kertoimisessa Hilbertin avaruudessa $L^2(0,2\pi)$.

Allaolevat kohdat (4) - (6) ovat tekstissä mainittu lisätietoina, eivätkä kuulu tentittävään osuuteen.
(4) Haarin systeemillä on seuraava mainio skaalausominaisuus,

$$h_n(x) = 2^{k/2}\, h_1(2^k x - j)$$

kun $n = j + 2^k$ ja $x \in \Delta_n$ kuten edellä. Tällaiset skaalaus-ominaisuudet helpottavat merkittävästi numerisointia.

Toisaalta Haarin systeemin pulmana on se että kantafunktiot h_n ovat epäjatkuvia. Etsittäessä kantafunktioita, jotka ovat jatkuvia tai sileitä, ja joilla on samat skaalausominaisuudet, on päädytty niin sanottuihin *wavelet*-kantoihin, joita on viime aikoina on tutkittu erityisen paljon.



Näillä on myös käytännön mielenkiintoa monissa sovelluksissa, jotka liittyvät muun muassa signaalinkäsittelyyn, kuvankäsittelyyn jne. Pulmana on ettei kompaktikantajaisella waveletillä (= funktion h_1 vastineella) ole esitystä alkeisfunktioiden avulla, paitsi sarjakehitelmänä. Esitämme siksi tässä vain kuvan tyypillisestä wavelet-kannasta. Esimerkiksi, jos ψ on yo. kuvan funktio niin funktiot $2^{j/2}\psi(2^j x - k)$, missä $x \in \mathbb{R}$ ja $j, k \in \mathbb{Z}$, muodostavat Hilbertin kannan L^2:ssa.

(5) Soveltamalla Lauseen 4.41 kohdan (1) yhteydessä esiteltyä *Gram–Schmidt* ortonormeeraus menetelmää polynomeihin saadaan Hilbertin kantoja moniin eri (painotettuihin) L^2-avaruuksiin. Esimerkiksi, olkoon

$$p_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\big((t^2-1)^n\big)$$

n:s *Legendren polynomi.* Analyysin peruskurssien tietojen avulla tiedämme, että

$$(\, p_n \,|\, p_k \,) = \int_{-1}^{1} p_n(t) p_k(t) \, \mathrm{d}t = \frac{2}{2n+1} \delta_{nk},$$

missä δ_{nk} on *Kroneckerin δ-symboli* eli

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k. \end{cases}$$

Merkitään $e_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\, p_n$. Voidaan todistaa, että saatu jono $(e_n)_{n=0}^{\infty}$ on Hilbertin kanta avaruudessa $L^2([-1,1])$. Jono voidaan konstruoida myös suoraan käyttämällä Gram–Schmidtin menetelmää polynomien jonoon $(1, t, t^2, t^3, \ldots)$.

(6) Olkoon

$$L^2(\mathbb{R}, \rho) := \{\, f : \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \rho(t) \, \mathrm{d}\mu < \infty \,\}, \quad \rho(t) = e^{-t^2}.$$

Tällöin *Hermiten polynomit*

$$H_n(t) = n! \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k (2t)^{n-2k}}{k!\,(n-2k)!}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

muodostavat avaruuden $L^2(\mathbb{R}, e^{-t^2})$ ortonormaalin kannan. Myös tämä jono on saatu Gram–Schmidtin menetelmällä jonosta $(1, t, t^2, t^3, \ldots)$.

Laguerren polynomit määritellään kaavalla

$$L_n^{(\alpha)}(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{t^k}{k!}, \quad \alpha > -1,\ n = 0, 1, \ldots.$$

Systeemi $(L_n^{(\alpha)})_{n=0}^{\infty}$ on ortonormaali kanta avaruudessa $L^2(\mathbb{R}_+, te^{-t})$.

Harjoitustehtäviä

4:1 Olkoon (x_n) sellainen sisätuloavaruuden E jono, että $\|x_n\| \to \|x\|$ sekä $(x_n|x) \to \|x\|^2$ kun $n \to \infty$. Näytä, että $\|x_n - x\| \to 0$ kun $n \to \infty$.

4:2 Olkoon E sisätuloavaruus. Totea, että seuraava *polarisaatiokaava* on voimassa:
(i) jos skalaarikunta $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, niin

$$4(x|y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2, \quad x, y \in E.$$

(ii) jos skalaarikunta $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, niin

$$4(x|y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2, \quad x, y \in E.$$

4:3. Olkoon (x_n) Hilbertin avaruuden H jono. Sanomme että (x_n) suppenee *heikosti* kohti vektoria $x \in H$ jos $(x_n|y) \to (x|y)$ kun $n \to \infty$ kaikilla $y \in H$. Tällöin merkitään $x_n \xrightarrow{w} x$ kun $n \to \infty$. Näytä:
(i) jos $x_n \xrightarrow{w} x$ ja lisäksi $\|x_n\| \to \|x\|$ kun $n \to \infty$, niin $\|x_n - x\| \to 0$ kun $n \to \infty$,
(ii) jos $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) \in \ell^2$ (ykkönen n:nnellä paikalla), niin $e_n \xrightarrow{w} \overline{0}$ avaruudessa ℓ^2 kun $n \to \infty$.

4:4 Totea, että avaruudet $L^p(0,1)$, $1 \leq p < \infty, p \neq 2$, eivät ole Hilbertin avaruuksia (siis normi $\|\cdot\|_p$ ei ole minkään sisätulon indusoima). [*Ohje.* Testaa suunnikasyhtälön (Lause 4.9) voimassaoloa sopivilla yksinkertaisilla funktioilla f ja g.]

4:5 Määritellään uusi normi avaruuteen ℓ^2 asettamalla

$$\|x\| = \|x\|_2 + \sup_n |x_n|, \quad x = (x_n) \in \ell^2.$$

Näytä: $\|\cdot\|$ on ekvivalentti tavallisen normin $\|\cdot\|_2$ kanssa, mutta $(\ell^2, \|\cdot\|)$ ei ole Hilbertin avaruus (ts. $\|\cdot\|$ ei ole minkään avaruuden ℓ^2 sisätulon indusoima normi).

4:6 Näytä: (i) $A = \{f \in C(0,1) : f(0) = 1\}$ on avaruuden $C(0,1)$ suljettu konveksi joukko, jossa on äärettömän monta normin minimoivaa alkiota f.

(ii) $B = \{f \in C(0,1) : f(0) = 0 \text{ ja } \int_0^1 f(t)dt = 1\}$ on avaruuden $C(0,1)$ suljettu konveksi joukko, jossa ei ole yhtään normin minimoivaa alkiota.

4:7 Laske

$$\min_{a,b,c \in \mathbf{R}} \int_{-1}^{1} |t^3 - a - bt - ct^2|^2 dt.$$

[*Ohje:* Etsi sopiva ortoprojektio Hilbertin avaruudessa $L^2([-1,1])$.]

4:8 Olkoon E Hilbertin avaruus, M sen suljettu vektorialiavaruus ja asetetaan $M^{\perp\perp} = (M^\perp)^\perp$. Osoita, että $M^{\perp\perp} = M$. [*Vihje:* Jos $x \notin M$, näytä että $x \notin M^{\perp\perp}$ Lauseen 4.21 avulla.]

4:9. Olkoon $F = \{f \in L^2(0,1) : \int_0^1 f d\mu = 0\}$.

(i) Määrää ortokomplementti $F^\perp$ etsimällä konkreettinen esitys $f = f_1 + f_2$, missä $f_1 \in F$.
(ii) Määrää etäisyys $dist(g, F) = \inf\{\|g - f\|_2 : f \in F\}$, missä $g(t) = e^t$ kun $t \in [0, 1]$.

4:10 Olkoon E Hilbertin avaruus ja $\emptyset \neq K \subset E$ suljettu konveksi osajoukko. Minimointitulosten 4.14 ja 4.15 nojalla on olemassa kuvaus $P_K : E \to E$, jolle $P_K x \in K$ ja $\|x - P_K x\| = \mathrm{dist}(x, K)$ kaikilla $x \in E$. Osoita, että *metrinen* projektio P_K on kontraktio, eli

$$\|P_K x_1 - P_K x_2\| \leq \|x_1 - x_2\|, \quad x_1, x_2 \in E.$$

[*Juonikuvio.* Olkoon $y_i = P_K x_i$ kun $i = 1, 2$. Lauseen 4.16 nojalla pätee $Re(x_i - y_i|z - y_i) \leq 0$ kaikilla $z \in K$ kun $i = 1, 2$. Sijoita $z = y_2$ kun $i = 1$, $z = y_1$ kun $i = 2$, ja laske arviot sopivasti yhteen. Lopuksi sovella Cauchy-Schwarzin epäyhtälöä.]

4:11 Olkoon E Hilbertin avaruus, $M \subset E$ suljettu vektorialiavaruus, sekä $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Hilbertin kanta aliavaruudelle M. Näytä, että avaruuden E ortoprojektio P_M aliavaruudelle M on

$$P_M x = \sum_{n=1}^{\infty} (\, x \,|\, e_n \,) e_n, \quad x \in E.$$

[*Ohje:* katso Lauseen 4.34 todistusta.]

4:12 Näytä, että Haarin systeemi $(h_n(x))_{n=0}^{\infty}$ on ortonormaali jono avaruudessa $L^2(0, 1) \equiv L^2([0, 1])$.

4:13 Osoita, että Haarin systeemi $(h_n(x))_{n=0}^{\infty} \subset L^2(0, 1)$ on Hilbertin kanta etenemällä seuraavien askeleitten kautta (käyttäen mittateorian tietoja):
(i) Dyadisten välien Δ_k karakteristiset funktiot

$$\chi_{\Delta_k} \in \mathrm{span}\,(\{\, h_n : \; n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \,\})$$

in $L^2(0, 1)$ kaikilla k,
(ii) $\chi_G \in \overline{\mathrm{span}}\,(\{\, h_n : \; n \in \mathbb{N} \,\})$ kaikilla avoimilla joukoilla $G \subset [0, 1]$,
(iii) $\chi_A \in \overline{\mathrm{span}}\,(\{\, h_n : \; n \in \mathbb{N} \,\})$ kaikilla mitallisilla joukoilla $A \subset [0, 1]$,
(iv) kaikki yksinkertaiset funktiot $f \in \overline{\mathrm{span}}\,(\{\, h_n : \; n \in \mathbb{N} \,\})$,
(v) $L^2(0, 1) = \overline{\mathrm{span}}\,(\{\, h_n : \; n \in \mathbb{N} \,\})$.

4:14 (*Banach-Saksin lause*) Olkoon E Hilbertin avaruus ja $(x_k) \subset E$ sellainen rajoitettu jono, että $(\, x_k \,|\, y \,) \to 0$ kun $k \to \infty$ kaikilla $y \in E$. Osoita, että on olemassa sellainen osajono $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$, että keskiarvot

$$y_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_{k_j} \to \overline{0}, \quad n \to \infty.$$

[*Ohje:* Etsi induktiolla indeksit $k_1 < k_2 < \dots$ siten, että $|(\, x_{k_{j+1}} \,|\, x_{k_i} \,)| < 1/j$ kun $i = 1, 2, \dots, j$ ja $j \in \mathbb{N}$, sekä kehitä $\|y_n\|^2$ auki sisätulon avulla.]

4:15 Olkoon Γ epätyhjä joukko ja $\ell^2(\Gamma)$ kaikkien kuvausten $f : \Gamma \to \mathbb{K}$ muodostama vektoriavaruus, joille

$$\|f\|_2^2 = \sum_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|^2 < \infty.$$

(Tällöin joukko $\{\gamma \in \Gamma : f(\gamma) \neq 0\}$ on numeroituva jokaisella $f \in \ell^2(\Gamma)$.) Näytä: (i) $(\ell^2(\Gamma), \|\cdot\|_2)$ on Hilbertin avaruus, (ii) $(\ell^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ ei ole separoituva. [*Vihje:* tarkastele osajoukkoa $\{e_t : t \in \mathbb{R}\} \subset \ell^2(\mathbb{R})$, missä $e_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on määritelty ehdolla $e_t(t) = 1$ ja $e_t(s) = 0$ jos $s \neq t$.]

4:16 Normiavaruuden E *konveksisuusmoduli* on

$$\delta_E(\varepsilon) = \inf\{\, 1 - \|\frac{x+y}{2}\| : x, y \in E, \|x\| = 1 = \|y\|, \|x-y\| \geq \varepsilon\}$$

kun $0 < \varepsilon \leq 2$. Avaruus E on *tasaisesti konveksi*, jos $\delta_E(\varepsilon) > 0$ kaikilla $0 < \varepsilon \leq 2$ (piirrä kuva !). Osoita, että jokainen Hilbertin avaruus H on tasaisesti konveksi. [Vihje: arvioi $\delta_H(\varepsilon)$ alaspäin suunnikasyhtälön avulla]

4:17 Olkoon $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ rajoitettu avoin joukko, $K : \Omega \times \Omega \to \mathbf{C}$ Lebesgue-mitallinen kuvaus,

$$\int_\Omega \int_\Omega |K(x,y)|^2 dx dy < \infty.$$

sekä $f \in L^2(\Omega)$ annettu. Osoita, että on olemassa sellainen pieni $\delta_0 > 0$ että integraaliyhtälöllä

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_\Omega K(x,y) u(y) dy$$

on yksikäsitteinen ratkaisu $u \in L^2(\Omega)$ kaikilla luvuilla $\lambda \in \mathbf{C}$, joille $|\lambda| < \delta_0$. [*Ohje:* tarkista Hölderin epäyhtälön avulla, että $u \mapsto \int_\Omega K(x,y)u(y)dy$ määrittelee rajoitetun operaattorin $L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$. Sovella Banachin kiintopistelause kuvaukseen $\Phi(u)(x) = f(x) + \lambda \int_\Omega K(x,y)u(y)dy$ avaruudessa $L^2(\Omega)$.]

5. Fourier-sarjat

Fourier esitti vuonna 1822 lämmönjohtamista koskevien tutkimusten yhteydessä kuuluisan menetelmänsä esittää mielivaltainen 2π-jaksollinen funktio kehitelmänä

$$f(x) = c_0 + c_1 e^{ix} + c_{-1}e^{-ix} + c_2 e^{2ix} + \cdots .$$

Tämä herättää useita tärkeitä kysymyksiä, esimerkiksi:

- suppeneeko sarja kohti funktiota f ja missä mielessä suppeneminen tapahtuisi?

- Määrääkö Fourier-sarja funktion f yksikäsitteisesti, ja jos näin on, miten kertoimet c_n kuvaavat funktion f ominaisuuksia ?

Nämä kysymykset ovat olleet keskeisiä (koko) analyysin kehityksessä. Tutkimme seuraavaksi, mitä voidaan Hilbertin avaruus-metodeilla tässä tapauksessa saada aikaan.

Esitarkasteluja. Olkoon $L^2 = L^2(0, 2\pi)$ ja $f \in L^2$. Jos $n \in \mathbb{Z}$, niin f:n n:s *Fourier kerroin* on mukavinta määritellä kaavalla

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\, \mathrm{d}x.$$

[Muistutus: $e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$ kun $n \in \mathbb{Z}$ ja $x \in [0, 2\pi]$. Erityisesti $|e^{inx}|^2 = \cos^2(nx) + \sin^2(nx) \equiv 1$.] Esimerkiksi, jos

$$f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}\, \mathrm{d}x = \sum_{n=-N}^{N} c_n \left(\cos(nx) + i\sin(nx)\right),$$

eli f on *trigonometrinen polynomi*, saamme tällöin kaavan $e^{ikx}e^{-inx} = e^{i(k-n)x}$ avulla

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N} c_k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)x}\, \mathrm{d}x = c_n.$$

kun $n \in \{-N, \ldots, N\}$ ja $\widehat{f}(n) = 0$ kun $|n| > N$.

Olkoon $(\, f \mid g\,) = \int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\, \mathrm{d}x$ avaruuden $L^2(0{,}1)$ tavallinen sisätulo. Fourier-kertoimet liittyvät silloin ortonormaaliin jonoon (Esimerkki 4.30 (2))

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad n \in \mathbb{Z},\ x \in [0, 2\pi]. \tag{5.1}$$

Nimittäin

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{e^{inx}}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f|e_n).$$

[Huomaa kuitenkin, että tässä määritelty Fourier kerroin $\widehat{f}(n)$ eroaa luvun 4 yleisestä määritelmästä 4.33 vakion $1/\sqrt{2\pi}$ verran.]

Jos $f \in L^2$ (tai jos $f \in L^p(0,2\pi)$, $1 \le p < \infty$), sen n:s *Fourier-osasumma* on

$$s_n(x) \iff s_n(f;x) := \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\, e^{ikx}, \quad x \in [0,2\pi],$$

Summafunktio $s_n\,(f;x)$ on *pisteittäin* määritelty, koska funktio e^{ikx} on jatkuva kaikilla $k \in \mathbb{Z}$.

Haluamme seuraavaksi selvittää, muodostaako Fourier jono (5.1) avaruuden $L^2(0,2\pi)$ Hilbertin kannan. Tätä varten tarvitaan

5.2. **Lemma.** *Fourier-osasummalle s_n on integraaliesitys*

$$s_n\,(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, D_n(x-t)\,\mathrm{d}t,$$

missä

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(x/2\right)}$$

on n:s Dirichlet'n ydin*, kun $n \in \mathbb{N}$.*

Todistus. Fourier-kertoimen $\widehat{f}(n)$ määritelmän nojalla

$$\begin{aligned} s_n\,(f;x) &= \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\, e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikx}\,\mathrm{d}t\right) e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, D_n(x-t)\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

missä siis merkitään

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = e^{-inx}(1 + e^{ix} + e^{i2x} + \cdots + e^{i2nx}) = e^{-inx}\sum_{k=0}^{2n}\left(e^{ix}\right)^k.$$

Soveltamalla (kompleksiarvoisen) geometrisen sarjan osasummakaavaa saadaan

$$D_n(x) = e^{-inx}\left(\frac{1 - e^{i(2n+1)x}}{1 - e^{ix}}\right) = \frac{e^{-inx} - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}.$$

[toisin sanoen, olemme käyttäneet identiteettiä $(1-z)(1+z+z^2+\cdots+z^n) = (1-z^{n+1})$, missä $z \in \mathbb{C}$ ja $n \in \mathbb{N}$.] Kertomalla yo. yhtälö puolittain termillä $e^{-ix/2}(e^{ix}-1)$, saadaan

$$\left(e^{ix/2} - e^{-ix/2}\right) D_n(x) = e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x} - e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}.$$

Eulerin kaava $e^{iu} - e^{-iu} = 2i\sin u$, missä $u \in \mathbb{R}$, antaa lopuksi

$$2i\sin(x/2)D_n(x) = 2i\sin\left((n+\tfrac{1}{2})x\right).$$

$\square$

Tarvitsemme myös nk. *Fejérin ytimiä*

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x), \quad x \in [0,2\pi],\ n = 0,1,2,\dots,$$

eli Dirichlet-ytimien aritmeettisia keskiarvoja.

5.3. **Lemma.** *i) Kaikilla $n = 0,1,2,\dots$ on voimassa*

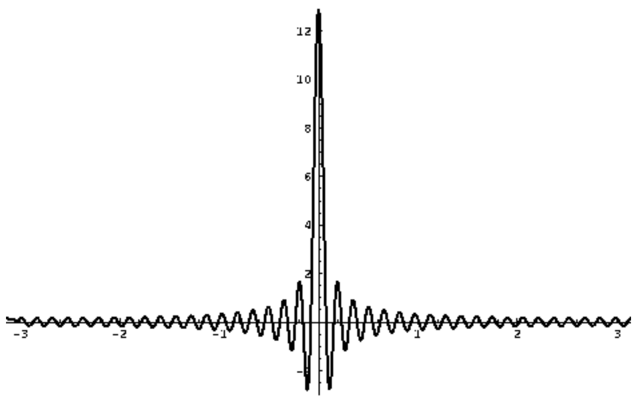
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} D_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

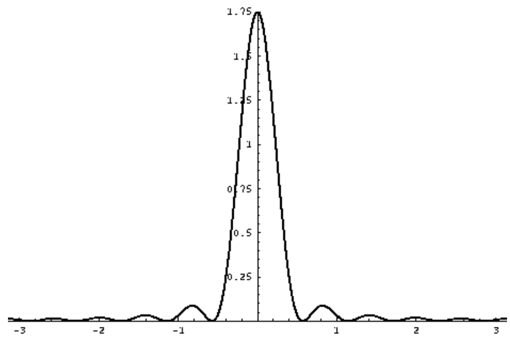
ii) funktio $K_n(x) \geq 0$ kaikilla $x \in [0,2\pi]$ ja lisäksi

$$K_n(x) \leq \frac{2}{(n+1)(1-\cos\delta)},$$

kun $0 < \delta < x < 2\pi - \delta$.

Huomautus. Ominaisuus (*ii*) kertoo, että Fejérin ytimet K_n ovat positiivisia ja kun $n \to \infty$, $K_n \to 0$ tasaisesti, kunhan x ei ole lähellä päätepisteitä 0 tai 2π. Dirichlet ytimillä D_n ei ole näitä ominaisuuksia. Tästä syystä Fourier-sarjojen *pisteittäisen* suppenemisen teoria on vaikeaa!





Yllinnä Dirichlet'n ydin, sen alla Fejerin ydin

Lemman 5.3 todistus. (i) Koska $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{int}\,\mathrm{d}t = \delta_{n,0}$, saadaan

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} D_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{ikx}\,\mathrm{d}x = 1$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Siispä sama väite pitää paikkaansa Dirichlet'n ytimien aritmeettiselle keskiarvolle K_n.

(ii) Lemman 5.2 todistuksessa osoitimme, että $(e^{ix}-1)D_n(x) = e^{i(n+1)x}-e^{-inx}$. Siten

$$(e^{-ix}-1)(n+1)K_n(x)(e^{ix}-1) = (e^{-ix}-1)\sum_{k=0}^{n}\left(e^{i(k+1)x} - e^{-ikx}\right).$$

Yhtälön oikean puolen summa on kahden geometrisen sarjan erotus, joten edelleen hieman sieventämällä saadaan

$$\begin{aligned}(n+1)K_n(x)(e^{ix}-1)(e^{-ix}-1) &= (e^{-ix}-1)\left(e^{ix}\sum_{k=0}^{n}(e^{ix})^k - \sum_{k=0}^{n}(e^{-ix})^k\right)\\ &= (e^{-ix}-1)e^{ix}\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} + \left(1-e^{-i(n+1)x}\right)\\ &= 1-e^{i(n+1)x} + 1 - e^{-i(n+1)x} = 2-2\cos\left((n+1)x\right).\end{aligned}$$

Koska $(e^{ix}-1)\left(e^{-ix}-1\right) = 2\left(1-\cos x\right)$, saamme Fejerin ytimelle arvion, josta sen positiivisuus seuraa,

$$K_n(x) = \frac{1-\cos\left((n+1)x\right)}{(n+1)(1-\cos x)} \geq 0$$

Lopuksi, koska $cos(t)$ on parillinen ja vähenevä kun $0 < t < \pi$, saamme

$$K_n(x) \leq \frac{2}{(n+1)(1-\cos\delta)}$$

kun $0 < \delta < x < 2\pi - \delta < 2\pi$. □

Seuraavaksi tutkimme Fejérin ytimien käyttäytymistä konvoluutioissa. Alla oleva keskeinen ydintä koskeva tulos tunnetaan *Fejérin lauseen* nimellä.

5.4. **Lause.** *Olkoon $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ jatkuva, $f(0) = f(2\pi)$, sekä*

$$K_n * f(x) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,K_n(x-t)\,\mathrm{d}t$$

kun $x \in [0, 2\pi]$ ja $n \in \mathbb{N}$. Silloin

$$\| K_n * f - f \|_\infty = \sup_{x\in[0,2\pi]} |K_n * f(x) - f(x)| \to 0,$$

eli $K_n * f(x) \to f(x)$ tasaisesti, *kun $n \to \infty$.*

Todistus. (vrt Reaalianalyysi I) Oletuksen nojalla f on tasaisesti jatkuva ja se voidaan jatkaa 2π-periodisena koko reaalilukujen joukkoon $\mathbb{R}$. Myös K_n on 2π-periodinen ja jatkuva, joten muuttujanvaihtoa $u = x - t$ soveltamalla saadaan

$$\begin{aligned} K_n * f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, K_n(x-t)\,\mathrm{d}t \overset{u=x-t}{=} -\frac{1}{2\pi}\int_x^{x-2\pi} f(x-u)\, K_n(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)\, K_n(t)\,\mathrm{d}t \quad (\,= f * K_n(x)) \end{aligned}$$

Olkoon $\varepsilon > 0$ annettu. Koska f on tasaisesti jatkuva, niin löytyy sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x-u) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

kaikilla $|u| < \delta$ ja $x \in [0, 2\pi]$. Merkitään

$$M = \|f\|_\infty = \sup_{u\in[0,2\pi]} |f(u)| < \infty.$$

Lemman 5.3 kohdan *ii*) nojalla on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbb{N}$, että

$$0 \le K_n(u) < \frac{\varepsilon}{4M},$$

kun $\delta \le u \le 2\pi - \delta$ ja $n \ge n_0$. Lemman 5.3 molempien kohtien ja konvoluutiokaavan $K_n * f = f * K_n$ avulla saadaan nyt

$$\begin{aligned} |K_n * f(x) - f(x)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f(x-u) - f(x))\; K_n(u)\,\mathrm{d}u\right| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x-u) - f(x)|\; K_n(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \underbrace{\int_0^{\delta} \cdots + \int_{2\pi-\delta}^{2\pi} \cdots}_{=I_1} + \underbrace{\int_{\delta}^{2\pi-\delta} \cdots}_{=I_2} \end{aligned}$$

Käsittelemme erikseen integroinnit yli edellä määrättyjen välien. Nyt Lemman 5.3 kohdan *i*), 2π-periodisuuden ja luvun δ valinnan nojalla

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} |f(x-t) - f(x)| K_n(t)\,\mathrm{d}t \le \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} K_n(t)\,\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Jälkimmäistä termiä voimme arvioida K_n:n positiivisuuden ja Lemman 5.3 *i)* avulla seuraavasti,

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta} |f(x-t) - f(x)| K_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &\le 2\Big(\sup_{[0,2\pi]} |f(x)|\Big)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(t)\,\mathrm{d}t \le 2M\frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Siispä jokaisella $x \in [0, 2\pi]$ on voimassa $|K_n * f(x) - f(x)| \le I_1 + I_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, joten väite seuraa. $\square$

Huomautus. Lemmojen 5.2 ja 5.3 sekä integraalin lineaarisuuden nojalla

$$K_n * f(x) = \Big(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k\Big) * f(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k * f(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k(f;x)$$

kun $x \in [0, 2\pi]$ ja $n \in \mathbb{N}$. Lauseen 5.4 perusteella siis jatkuvan 2π-periodisen funktion f Fourier-osasummien *aritmeettinen keskiarvo* suppenee tasaisesti kohti f:ää välillä $[0, 2\pi]$ ja siten myös *pisteittäin* kaikilla $x \in [0, 2\pi]$.

Seurauksena tästä saadaan tärkeä yksikäsitteisyysominaisuus.

5.5. **Seuraus.** *Jos $f \in C\,(0, 2\pi)$ on 2π-periodinen, eli $f(0) = f(2\pi)$, ja jos $\widehat{f}(k) = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$, silloin $f \equiv 0$.*

Todistus. Jos $\widehat{f}(k) = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$, niin $s_n(f;x) = \sum \widehat{f}(k)\, e^{ikx} = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja kaikilla $x \in [0, 2\pi]$. Lauseen 5.4 jälkeisen huomautuksen nojalla $f(x) = \lim K_n * f(x) = 0$ kaikilla $x \in [0, 2\pi]$. □

Siis jatkuvien funktioiden tapauksessa Fourier-kertoimet määräävät funktion eli jos f ja g ovat jatkuvia ja 2π-periodisia, niin $\widehat{f} = \widehat{k}$ kaikilla $k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow f = g$.

Tavoitteenamme on laajentaa tämä yksikäsitteisyystulos L^2-funktioihin. Sitä varten tarvitsemme seuraavan L^p-funktioiden keskeisen approksimaatiotuloksen.[5] Tämä tulos kertoo sen, että sileät funktiot ovat tiheässä avaruudessa $L^p[0, 2\pi]$, kun $p \neq \infty$.

5.6. **Lause.** *Olkoon $f \in L^p[0, 2\pi]$, kun $1 \leq p < \infty$, ja $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa 2π-periodinen C^∞-funktio g, jolle*

$$\text{(A)} \qquad \| f - g \|_p = \Big(\int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^p \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Todistus. Havaitaan, että $K_n * g$ on C^∞-funktio, sillä se on Lauseen 5.4 jälkeisen huomautuksen nojalla äärellinen summa trigonometrisistä funktioista, jotka ovat C^∞-funktioita.

Lauseen 5.4 nojalla riittää siis löytää *jatkuva* funktio g, jolle (A) on voimassa, sillä

$$\| f - K_n * g \|_p \leq \| f - g \|_p + \| g - K_n * g \|_p,$$

missä

$$\| g - K_n * g \|_p = \Big(\int_0^{2\pi} |g(x) - K_n * g(x)| \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} \leq c \| g - K_n * g \|_\infty \to 0,$$

kun $n \to \infty$. Etsitään haluttu jatkuva funktio g ”asteittain”:

[5] Vertaa Reaalianalyysi I

1.) Olkoon $f = \chi_F$ *suljetun* joukon $F \subset [0,2\pi]$ karakteristinen funktio. Asetetaan

$$g_n(x) = \frac{1}{1 + n\,\mathrm{dist}(x,F)}, \qquad \text{kun } x \in [0,2\pi] \text{ ja } n \in \mathbb{N}.$$

Etäisyysfunktio $x \mapsto \mathrm{dist}(x,F)$ on jatkuva (tarkista!), joten $g_n \colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ on jatkuva kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Lisäksi $g_n(x) = 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, jos $x \in F$ ja $g_n(x) \to 0$, kun $x \notin F$ ja $n \to \infty$, sillä tällöin $\mathrm{dist}(x,F)) > 0$. Siis $g_n \to \chi_F$ pisteittäin, kun $n \to \infty$. Koska $0 \le g_n(x) \le 1$ kaikilla $x \in [0,2\pi]$ ja $n \in \mathbb{N}$, niin Lebesguen dominoidun suppenemisen lauseen nojalla,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \| g_n - \chi_F \|_p^p &= \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |g_n(x) - \chi_F(x)|^p \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{2\pi} \lim_{n\to\infty} |g_n(x) - \chi_F(x)|^p \,\mathrm{d}x = 0.\end{aligned}$$

Lisäksi muuttamalla funktiota g_n pienessä välissä $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ voi olettaa että $g_n(0) = g_n(2\pi)$.

2.) Olkoon $f = \chi_A$ avoimen joukon $A \subset [0,2\pi]$ karakteristinen funktio. Tämä seuraa kohdasta 1.), koska komplementti $A^c = [0,2\pi] \setminus A$ on suljettu ja $\chi_A = 1 - \chi_{A^c}$.

3.) Olkoon $f = \chi_A$, kun $A \subset [0,2\pi]$ Lebesgue-mitallinen joukko. Tällöin Lebesguen mitan määritelmä nojalla löytyy sellainen jono avoimia joukkoja $G_n \subset [0,2\pi]$, että

$$G_n \supset A \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N} \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} \mu(G_n \setminus A) = 0,$$

kun μ on Lebesguen mitta. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $n \in \mathbb{N}$ niin suureksi, että $\mu(G_n \setminus A) < (\varepsilon/2)^p$. Edelleen kohdan 2.) nojalla löytyy sellainen jatkuva 2π-periodinen funktio, jolle $\| g - \chi_{G_n} \|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Siispä

$$\| g - \chi_A \|_p \le \| g - \chi_{G_n} \|_p + \| \chi_{G_n} - \chi_A \|_p \le \frac{\varepsilon}{2} + \mu(G_n \setminus A)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

4.) Olkoon $f \in L^p(0,2\pi)$ mielivaltainen. Tällöin Lebesguen integraalin määritelmä nojalla löytyy sellainen yksinkertainen funktio

$$g = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j},$$

että $\| f - g \|_p < \varepsilon$. Soveltamalla kohtaa 3.) kuhunkin karakteristiseen funktioon χ_{A_j} löydetään sellainen jatkuvat 2π-periodiset funktiot g_j, että

$$\| \chi_{A_j} - g_j \|_p < \frac{\varepsilon}{nM},$$

missä $M = \max\{|a_1|, \dots, |a_n|\}$. Siispä kolmioepäyhtälön nojalla

$$\Big\| f - \sum_{j=1}^{n} a_j g_j \Big\|_p \le \| f - g \|_p + \sum_{j=1}^{n} |a_j| \, \| g_j - \chi_{A_j} \|_p$$
$$< \varepsilon + \sum_{j=1}^{n} |a_j| \frac{\varepsilon}{nM} \le 2\varepsilon.$$

Koska $\sum a_j g_j$ on myös 2π-periodinen jatkuva funktio, väite seuraa.

□

5.7. *Huomautus.*

1) Lauseen 5.6 nojalla sileiden $\mathbb{C}^\infty$-funktioiden muodostama aliavaruus on tiheä myös avaruudessa $L^p(a,b)$, kun $a < b$ ja $1 \le p < \infty$, mikä seuraa lineaarisesta "muuttujanvaihdosta" $[a,b] \to [0, 2\pi]$.
2) Lause 5.6 *ei päde* tapauksessa $p = \infty$ (HT).
3) Jos $f \in L^p(\mathbb{R})$, kun $1 \le p < \infty$ ja $\varepsilon > 0$, niin on olemassa sellainen $M > \infty$, että
$$\int_{J_M} |f(x)|^p \, \mathrm{d}\mu(x) < \varepsilon,$$
kun $J_M = \{|x| > M\}$. Siis $C^\infty(\mathbb{R})$ on myös tiheä avaruudessa $L^p(\mathbb{R})$, kun $1 \le p < \infty$.
4) Jos $\Omega \subset \mathbb{R}$ on mitallinen, $\mu(\Omega) > 0$ ja $f \in L^p(\Omega)$, niin asetetaan $\widetilde{f} = f \cdot \chi_\Omega$ eli
$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \Omega, \end{cases},$$
jolloin $\widetilde{f} \in L^p(\mathbb{R})$. Tämän avulla voidaan päätellä, että $C^\infty|_\Omega$ on tiheä avaruudessa $L^p(\Omega)$, kun $1 \le p < \infty$.
5) Voidaan myös osoittaa, että $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ on tiheä avaruudessa $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p < \infty)$, katso Reaalianalyysi I, luku 2.4. (n-ulotteinen tapaus on vastaava, mutta joudumme korvaamaan Fejérin ytimien $K_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k$ erikoisominaisuudet muilla sopivilla ytimillä).

Seurauksena näemme, että yleiselle L^2-funktioille Fourier-kertoimet (tai -sarjat) määräävät funktion arvot melkein kaikkialla:

5.8. **Seuraus.** *Jos* $f \in L^2(0, 2\pi)$ *ja*

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, \mathrm{d}t = 0 \quad \textit{kaikilla } k \in \mathbb{Z},$$

niin $f = 0$. *Erityisesti, jos*

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad x \in [0, 2\pi], n \in \mathbb{Z},$$

niin silloin $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *on Hilbertin kanta avaruudessa* L^2.

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Aproksimaatiolauseen 5.6 nojalla on olemassa sellainen *jatkuva* ja 2π-periodinen $g \in C(0, 2\pi)$, että $\| f - g \|_2 < \varepsilon$.

Lauseen 5.4 sivulla 93 mukaan konvoluutio $K_n * g \to g$ *tasaisesti* välillä $[0, 2\pi]$, kun $n \to \infty$, joten

$$\| g - K_n * g \|_2 \leq \sqrt{2\pi}\, \| g - K_n * g \|_\infty < \varepsilon$$

jollakin $n \in \mathbb{N}$. Sivun 95 huomautuksen nojalla

$$K_n * g = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_n(g, \cdot) = \sum_{k=-n}^{n} a_k\, e_k \qquad \text{(trigonometrinen polynomi)},$$

missä $e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$. Koska $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ortonormaali jono, niin Huomautuksen 4.36 sivulla 78 nojalla vastaava ortoprojektio minimoi etäisyyden aliavaruuteen $M = \operatorname{span}(\{e_k : -n \leq k \leq n\})$, toisin sanoen

$$\Big\| f - \sum_{k=-n}^{n} (\, f \,|\, e_k \,)\, e_k \Big\|_2 \leq \Big\| f - \sum_{k=-n}^{n} a_k e_k \Big\|_2.$$

Toisaalta, oletuksen nojalla $(\, f \,|\, e_k \,) = \sqrt{2\pi}\, \widehat{f}(k) = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$. Näin kolmioepäyhtälön ja yo. arvion nojalla saamme

$$\begin{aligned} \|f\|_2 = & \Big\| f - \sum_{k=-n}^{n} (\, f \,|\, e_k \,)\, e_k \Big\|_2 \leq \|f - K_n * g\|_2 \\ & \leq \| f - g \|_2 + \Big\| g - K_n * g \Big\|_2 < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Koska $\varepsilon > 0$ mielivaltainen, niin $f = \bar{0}$.

Lauseen 4.40 sivulla 80 ehdon *b*) nojalla jono $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ on siis Hilbertin kanta avaruudessa $L^2(0, 2\pi)$. $\square$

Yhteenveto (Fourier-sarjojen L^2-teoriasta)

Kokoamme lyhyesti saamamme tulokset Fourier-sarjojen L^2-teoriasta:

1.) Jos $e_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$, niin $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ on ortonormaali jono avaruudessa L^2.

2.) Jos $f \in L^2$ ja $\widehat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\, f \mid e_n \,) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$, niin $f = \bar{0}$. (Seuraus 5.8)

3.) Jos $f \in L^2$, niin

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\, f \mid e_n \,)\, e_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{inx},$$

missä sarja suppenee L^2*-mielessä*. Konkreettisesti

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \Big| f(x) - \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{ikx} \Big|^2 \, \mathrm{d}x = 0.$$

(Lause 4.40 sivulla 80 ja Seuraus 5.8)

4.) Parsevalin identiteetin eli Lauseen 4.40 sivulla 80 kohdan d) nojalla

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2, \quad \text{kun } f \in L^2,$$

koska $\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} (\, f \mid e_n \,)$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$.

5.) Kääntäen, jos $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, niin tällöin on olemassa $f \in L^2(0, 2\pi)$, jolle

$$\widehat{f}(k) = \lambda_k \quad \text{kaikilla } k \in \mathbb{Z}.$$

Tämä on Riesz–Fischerin lause eli Seuraus 4.38 sivulla 80.

Yllä esitetty Fourier sarjojen L^2 teoria osoittaa, että ainakin keskimäärin (so. integraalin tai L^2-normin mielessä) Fourier sarja suppenee kohti funktiota $f(x)$. Mutta on vähintäin yhtä luonnollista kysyä, suppeneeko Fourier sarja (melkein) jokaisessa pisteessä x ? Tästä *pisteittäisen suppenemisen* teoriasta mainitsemme vain seuraavan tuloksen, joka toimii esimerkiksi jatkuvasti derivoituville funktioille.

5.9. **Lause.** *Jos* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *on* 2π*-periodinen ja toteuttaa Lipschitz-ehdon* $|f(x)-f(y)| \le L|x-y|$ *kaikilla* $x, y \in \mathbb{R}$*, niin*

$$S_n(f;x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} \to f(x),$$

kun $n \to \infty$ *kaikilla* $x \in \mathbb{R}$*.*

Todistus. Jos $h \in L^2$, niin Besselin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}(5.10)\qquad \int_0^{2\pi} h(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t &= \tfrac{1}{2}\left((\, h \,|\, e^{in\cdot}\,) + (\, h \,|\, e^{-in\cdot}\,)\right) \\ &= \tfrac{\sqrt{2\pi}}{2}\left((\, h \,|\, e_n\,) + (\, h \,|\, e_{-n}\,)\right) \to 0,\end{aligned}$$

kun $n \to \infty$. Samoin

$$(5.11)\qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} h(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Valitaan nyt

$$(*)\qquad h_x(t) = \frac{f(x-t)-f(x)}{\sin(t/2)}.$$

Tällöin Lipschitz-ehdon nojalla funktio $h_x \in L^\infty[0, 2\pi \subset L^2[0, 2\pi]$. Lemman 5.2 nojalla

$$\begin{aligned}S_n(f;x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t - f(x) \\ = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(t)f(x-t)\,\mathrm{d}t - f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(t)\left(f(x-t)-f(x)\right)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Toinen identiteeteistä seuraa Lauseen 5.4 sivulla 93 todistuksessa olevasta konvoluutiokaavasta ja viimeinen siitä, että Lemman 5.3 sivulla 92 nojalla Dirichletin ytimen intgraali $\frac{1}{2\pi}\int D_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Koska

$$D_n(t) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{\sin(t/2)} = \cos(nt) + \frac{\sin(nt)\cos(t/2)}{\sin(t/2)},$$

niin soveltamalla edellisiä identiteettejä yhteen saadaan

$$\begin{aligned}S_n(f;x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(nt)\left(f(x-t)-f(x)\right)\,\mathrm{d}t \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h_x(t)\cos(t/2)\sin(nt)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Koska kiinteällä $x \in \mathbb{R}$ sekä $h(t) = f(x-t) - f(x) \in L^2$ että $h(t) = h_x(t)\cos(t/2) \in L^2$, niin todistuksen alkuosan kahden raja-arvokaavojen (5.10) ja (5.11) perusteella

$$\lim_{n\to\infty} |S_n(f;x) - f(x)| = 0.$$

□

HUOM.: seuraavat sivujen 101 - 114 väliset asiat ovat ylimääräistä lisätietoa, jota ei käydä läpi tällä kurssilla (v. 2012), eikä niistä tule harjoituksia tai koetehtäviä.

Sobolev-avaruudet

Olkoon $f \in C^1(0, 2\pi)$ jatkuvasti derivoituva, $f(0) = f(2\pi)$. Tällöin osittaisintegroinnilla saadaan

$$\widehat{(f')}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\Big/_{\!0}^{2\pi} f(t)e^{-ikt} + \frac{ik}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = ik\widehat{f}(k),$$

kaikilla $k \in \mathbb{Z}$. Parsevalin identiteetin (Lause 4.40 sivulla 80) nojalla saadaan

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (|f(t)|^2 + |f'(t)|^2)\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + k^2)|\widehat{f}(k)|^2. \tag{5.12}$$

Riesz–Fischerin lause (Seuraus 4.38 sivulla 80) vihjaa, että kaava (5.12) voisi olla voimassa yleisemmille funktioille f ja että on olemassa avaruuden L^2 vastine derivoituville funktioille; siis avaruus, joka koostuu funktioista $f \in L^2$, joille myös $f' \in L^2$. Tämä johtaa seuraavaan pulmaan.

Ongelma. Mikä on "derivaatta" f', jos $f \in L^2$?

Tarkastellaan aluksi *testifunktioiden* avaruutta $\mathscr{D}(\Omega)$, missä $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ on avoin väli (voi olla $\Omega = \mathbb{R}$). Palautetataan mieleen, että jos $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva, niin

$$\operatorname{supp}(\psi) := \overline{\{x \in \mathbb{R} : \psi(x) \neq 0\}}$$

on funktion ψ *kantaja*. Asetetaan nyt

$$\mathscr{D}(\Omega) = \{\ \psi \in C^\infty(\mathbb{R}) :\ \operatorname{supp}(\psi) \subset \Omega \text{ on kompakti}\ \}$$

(Muistutus: Heine-Borelin lauseen nojalla (Väisälä: *Topologia I*, 13.14) kantaja $\operatorname{supp}(\psi)$ on siis suljettu ja rajoitettu joukko $\mathbb{R}$:ssä).

Huomautus. Jos $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$, niin sen derivaatat $\psi^{(k)} \in \mathscr{D}(\Omega)$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

Olkoon Ω avoin väli ja $f \in C^1(\Omega)$ jatkuvasti derivoituva. Tällöin osittaisintegroimalla saadaan

$$\int_\Omega f'\varphi\,dx = -\int_\Omega f\varphi'\,dx \quad \text{kaikilla } \varphi \in \mathscr{D}(\Omega). \tag{5.13}$$

Edellisessä kaavassa ei ole sijoitustermiä, sillä testifunktio φ häviää joukon Ω reunalla. Kaavan (5.13) avulla voimme siis yrittää samaistaa derivaatan f' ja sitä vastaavan *lineaarikuvauksen*

$$\varphi \mapsto -\int_\Omega f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x,$$

missä $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ ja $f \in C^1(\Omega)$. Otamme tämän havainnon lähtökohdaksi *heikon* derivaatan määritelmässä.

5.14. **Määritelmä.** Olkoon $\Omega = (a,b)$ avoin väli ja $f \in L^2(\Omega)$. Funktio $g \in L^2(\Omega)$ on f:n *heikko* derivaatta (eli *yleistetty* derivaatta tai *distribuutioderivaatta*), jos

$$\int_\Omega g\,\varphi\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega f\,\varphi'\,\mathrm{d}x \quad \text{kaikilla } \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Jos f:lla on heikko derivaatta g, niin merkitään edelleen $g = f'$.

Osoitamme seuraavaksi, että funktion $f \in L^2(\Omega)$ heikko derivaatta on yksikäsitteinen (jos se on olemassa), sekä jos $f \in C^1(\Omega)$ niin heikko derivaatta samaistuu L^2-mielessä tavallisen derivaatan f' kanssa (toki edellyttäen että $f' \in L^2(\Omega)$).

5.15. **Lemma.** *Olkoon $f \in L^2(\Omega)$ ja Ω rajoitettu avoin väli. Jos $g_1, g_2 \in L^2(\Omega)$ toteuttavat ehdot*

$$\int_\Omega g_1\,\varphi\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega f\,\varphi'\,\mathrm{d}x = \int_\Omega g_2\,\varphi\,\mathrm{d}x \quad \textit{kaikilla } \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \tag{5.16}$$

niin $g_1 = g_2$.

Erityisesti, jos $f \in C^1(\Omega)$ on jatkuvasti derivoituva ja $f' \in L^2(\Omega)$, niin silloin tavallinen derivaatta f' on myös funktion f heikko derivaatta.

Todistus. Oletuksesta (5.16) ja integraalin lineaarisuudesta seuraa, että

$$\int_\Omega (g_1 - g_2)\varphi\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{kaikilla } \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Tällöin $(g_1 - g_2) \perp \mathscr{D}(\Omega)$ avaruudessa $L^2(\Omega)$, missä $\mathscr{D}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ on vektorialiavaruus. Riittää siis näyttää, että $\overline{\mathscr{D}(\Omega)} = L^2(\Omega)$ normin $\|\cdot\|_2$ suhteen, sillä tällöin testifunktioiden ortokomplementti $\mathscr{D}(\Omega)^\perp = \overline{\mathscr{D}(\Omega)}^\perp = \{\bar{0}\}$, joten $g_1 = g_2$ avaruuden $L^2(\Omega)$ alkioina.

Koska Ω on rajoitettu väli, niin Lauseen 5.6 sivulla 95 perusteella tiedämme että $\overline{C^\infty(\Omega) \cap L^2(\Omega)} = L^2(\Omega)$. Tämän tiedon nojalla riittääkin todistaa, että $C^\infty(\Omega) \cap L^2(\Omega) \subset \overline{\mathscr{D}(\Omega)}$ avaruudessa $L^2(\Omega)$.

Olkoon $\Omega = (0,1)$ (yleinen tapaus $\Omega = (a,b)$ palautetaan tähän lineaarisella muunnoksella). Todetaan ensin, että kiinteällä $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ on olemassa funktio $\eta_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$, jolle pätee

1. $0 \leq \eta_\varepsilon(x) \leq 1$ kaikilla $x \in \Omega$,
2. nollan ja ykkösen ympäristöissä funktio η_ε on identtisesti nolla, eli $\eta_\varepsilon(x) \equiv 0$, kun $0 < x < \varepsilon$ tai $1 - \varepsilon < x < 1$,
3. funktio $\eta_\varepsilon(x) \equiv 1$ kaikilla $2\varepsilon < x < 1 - 2\varepsilon$.

Sellaisen funktion tarkka konstruoiminen jätetään harjoitustehtäväksi (HT 5:5). (Kannattaa lähteä liikkeelle tiedosta, että

$$h(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

on C^∞-funktio, vrt. *Reaalianalyysi I.*)

Jos $f_0 \in C^\infty(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ on mielivaltainen, niin selvästi $\eta_\varepsilon f_0 \in \mathscr{D}(\Omega)$. Lebesguen dominoidun konvergenssin lauseen nojalla

$$\| f_0 - \eta_\varepsilon f_0 \|_2^2 = \int_0^1 |1 - \eta_\varepsilon(x)|^2 |f_0(x)|^2 \, \mathrm{d}x \to 0,$$

kun $\varepsilon \to 0^+$. (Tarkasti ottaen: LDK pitää edellä soveltaa mielivaltaisella positiivisella jonolla (ε_k), jolle $\lim_k \varepsilon_k = 0$.) Siispä $C^\infty(\Omega) \cap L^2(\Omega) \subset \overline{\mathscr{D}(\Omega)}$ avaruudessa $L^2(\Omega)$, joten lauseen ensimmäinen väite on todistettu.

Jos $f \in C^1(\Omega)$ ja $f' \in L^2(\Omega)$, niin kaavasta (5.13) ja yksikäsitteisyydestä seuraa, että f' on heikko derivaatta f:lle (L^2-mielessä). $\square$

5.17. *Huomautus.* Lemman 5.15 todistus perustuu Lauseeseen 5.6 sivulla 95, ja siten välin Ω on oltava rajoitettu. Jos $\Omega \subset \mathbb{R}$ on rajoittamaton avoin väli, niin tämä tekninen rajoitus voidaan helposti kiertää soveltamalla Lemman tulosta sellaisiin avoimiin rajoitettuihin väleihin $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots \subset \Omega$, että $\Omega = \bigcup_j \Omega_j$.

Huomautus (Lisätieto). Yllä olevien heikkojen derivaattojen tarkastelu johtaa *distribuutioihin* (eli yleistettyihin funktioihin). Näihin joudutaan (esimerkiksi) seuraavista luontevista vaatimuksista:

(a) jokainen jatkuva funktio on distribuutio,

(b) jokaisella distribuutioilla on *kaikkien* kertalukujen derivaatat, jotka ovat edelleen distribuutioita. Jos $f \in C^1$, niin sen derivaatta ”distribuutiona” on tavallinen derivaatta f'.

(c) derivaatan tavallisten laskusääntöjen tulee olla voimassa (distribuutioiden *tulo* on ongelma!).

(d) distribuutioilla tulee olla riittävän hyviä suppenemisominaisuuksia (rajaprosesseja varten).

Itse asiassa, *distribuutio* määritellään lineaarikuvauksena $\Lambda\colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$. Jokainen jatkuva $f \in C(\Omega)$ määrää lineaarikuvauksen $\Lambda_f : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$ ehdolla

$\Lambda_f(\varphi) = \int_\Omega f\varphi \,\mathrm{d}x$, kun $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ (siis (a) on voimassa). Jos määrittelemme kaavan (5.13) sivulla 101 motivoimana:

$$\Lambda'(\varphi) = -\Lambda(\varphi'), \quad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega),$$

niin ehdot (b) ja (c) tulevat täytetyiksi. Kohtaa (d) varten testifunktioiden avaruus $\mathscr{D}(\Omega)$ pitää lisäksi varustaa sopivalla topologialla τ, jolloin distribuutiot ovat tarkalleen *jatkuvat* lineaarikuvaukset $(\mathscr{D}(\Omega), \tau) \to \mathbb{K}$. Tämän topologian määrittely sekä karakterisointi vaatii lisätyötä, joten se sivuutetaan tällä kurssilla.[6]

5.18. **Esimerkki.** Olkoon $\Omega = (-1, 1)$ ja

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad (\textit{Heavisiden} \text{ funktio}).$$

Tällöin $H \in L^2(\Omega)$, mutta kaikilla $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ pätee

$$-\int_{-1}^{1} \varphi'(x)H(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0) - \underbrace{\varphi(1)}_{=0} = -\varphi(0).$$

Toisaalta: koska $H'(x) = 0$ tavallisessa mielessä kun $x \neq 0$, niin ei ole olemassa funktiota $g \in L^2(\Omega)$, jolle samalla myös

$$\int_\Omega g(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0) \quad \text{kaikilla } \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

(Vrt. myös Lemmaa 5.15.)

Huomautus. Heavisiden funktion H derivaatta "distribuutiona" on ns. *Diracin deltafunktionaali* δ, jolle

$$\delta(x) = 0 \text{ kun } x \neq 0 \text{ ja } \int_\Omega \delta(x)\,dx = 1.$$

Tällöin δ ei voi olla tavallinen funktio, vaan se on *aito distribuutio*; itse asiassa δ on lineaarikuvaus $\varphi \mapsto \varphi(0) : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$. [Huomaa myös, että edellisessä esimerkissa heikko derivaatta on **eri asia** kuin derivaatta "distribuutiona".]

5.19. **Määritelmä.** Olkoon $\Omega = (a, b)$ avoin väli. *Sobolev-avaruus* $H^1 = H^1(\Omega)$ koostuu niistä L^2-funktioista f, joilla on heikko derivaatta $f' \in L^2$ eli

$$H^1 = \{\, f \in L^2(\Omega) : \text{ funktiolla } f \text{ on heikko derivaatta } f' \in L^2(\Omega) \,\}.$$

Merkintä H^1 viittaa derivaatan kertalukuun ja H Hilbertin avaruuteen. Usein merkitään myös $H^1 = W_2^1 = W^{1,2}$.

[6] katso esimerkiksi Walter Rudin: "Functional Analysis".

5.20. **Lause.** *H^1 on Hilbert-avaruus varustettuna sisätulolla*

$$(f \mid h) = \int_\Omega [f(x)\overline{h(x)} + f'(x)\overline{h'(x)}]\,\mathrm{d}x, \quad f, h \in H^1.$$

Todistus. Avaruuden H^1 määritelmän ja Cauchy–Schwarzin epäyhtälön 4.2 sivulla 63 nojalla muoto $(f,h) \mapsto (f \mid h)$ on hyvin määritelty, sillä funktiot $f, h, f', h' \in L^2(\Omega)$. Lisäksi

$$\begin{aligned} \| f - h \|_{H^1}^2 &= \int_\Omega [(f(x) - h(x))(\overline{f(x)} - \overline{h(x)}) + \underbrace{(f-h)'(x)}_{=f'(x)-h'(x)}\,\overline{(f-h)'(x)}]\,\mathrm{d}x \\ &= \| f - h \|_{L^2}^2 + \| f' - h' \|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

kaikilla $f, h \in H^1$. Edellä $(f-h)' = f' - h'$ yksikäsitteisyyden nojalla (Lemma 5.15), koska

$$\int_\Omega (f' - h')\phi dx = \int_\Omega f'\phi\,\mathrm{d}x - \int_\Omega h'\phi\,\mathrm{d}x = \int_\Omega (f-h)\phi'\,\mathrm{d}x, \quad \phi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Jos $(f_n) \subset H^1$ on Cauchyn jono, niin jonot $(f_n) \subset L^2(\Omega)$ ja $(f_n') \subset L^2(\Omega)$ ovat myös Cauchyn jonoja. Koska $L^2(\Omega)$ on täydellinen, niin löytyy sellaiset $f, g \in L^2(\Omega)$, että $f_n \to f$ ja $f_n' \to g$ avaruudessa $L^2(\Omega)$. Riittää siis näyttää, että g on funktion f heikko derivaatta, eli $g = f'$.

Jos $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, niin

$$\int_\Omega f_n\varphi'\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega f_n'\varphi\,\mathrm{d}x$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$, joten Cauchy–Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega f\varphi'\,\mathrm{d}x + \int_\Omega g\varphi\,\mathrm{d}x \right| &= \left| \int_\Omega (f - f_n)\varphi'\,dx + \int_\Omega (g - f_n')\varphi\,dx \right| \\ &\leq \| f - f_n \|_{L^2} \| \varphi' \|_{L^2} + \| g - f_n' \|_{L^2} \| \varphi \|_{L^2} \to 0, \end{aligned}$$

kun $n \to \infty$. Siis

$$\int_\Omega g\,\varphi\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega f\,\varphi'\,\mathrm{d}x \quad \text{kaikilla } \varphi \in \mathscr{D}(\Omega),$$

eli $f' = g \in L^2(\Omega)$. □

Tarvitsemme allaolevassa sovelluksessa Sturm-Liouvillen ongelmaan (Lause 5.27) joitakin Sobolev-funktioiden perusominaisuuksia. Aluksi osoitetaan seuraava versio analyysin peruslauseesta heikoille derivaatoille.

5.21. **Lemma.** *Jos $f \in L^2(\Omega)$ ja $\int_\Omega f\,\varphi'\,\mathrm{d}x = 0$ kaikilla $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ (eli siis heikko derivaatta $f' = \bar{0}$), niin $f(x) \equiv C$ (vakio) m.k. $x \in \Omega$, toisin sanoen, on olemassa vakio C jolle joukko $\{ x \in \Omega : f(x) \neq C \}$ on 0-mittainen.*

Todistus. Olkoon $\Omega = (a,b)$. Kinnitetään funktio $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$ jolle $\int_\Omega \psi\, dx = 1$. Jos $w \in \mathscr{D}(\Omega)$ on mielivaltainen, niin asetetaan

$$\varphi(x) = \int_a^x \Big(w(t) - \Big(\int_\Omega w(y)\,\mathrm{d}y \Big) \psi(t) \Big)\, \mathrm{d}t.$$

Tällöin $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Tämän havaitsemiseksi lasketaan ensin funktion φ derivaatta, joka on $\varphi'(t) = w(t) - (\int w\,\mathrm{d}x)\psi(t)$. Olkoon nyt väli $[c,d] \subset \Omega = (a,b)$ sellainen, että $\mathrm{supp}(\psi) \cup \mathrm{supp}(w) \subset [c,d]$. Silloin kaikilla $c' \in [a,c]$ pätee $\varphi(c') = 0$ ja kaikilla $d' \in [d,b]$ lisäksi

$$\begin{aligned}\varphi(d') = \varphi(d') - \varphi(c') = \int_{c'}^{d'} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{c'}^{d'} \Big(w(t) - \Big(\int_\Omega w\,\mathrm{d}x \Big) \psi(t) \Big)\, \mathrm{d}t \\ &= \int_\Omega w(t)\,\mathrm{d}t - \int_\Omega \psi(t)\,\mathrm{d}t \cdot \int_\Omega w(x)\,\mathrm{d}x = 0,\end{aligned}$$

sillä $\int \psi\,\mathrm{d}x = 1$. Siispä $\mathrm{supp}(\varphi) \subset \Omega$ on kompakti.

Oletuksen ja Fubinin lauseen[7] nojalla on siis

$$\begin{aligned}0 = \int_\Omega f\,\varphi'\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega f(t) \Big(w(t) - \Big(\int_\Omega w\,\mathrm{d}x \Big) \psi(t) \Big)\, \mathrm{d}t \\ &= \int_\Omega w(x) \Big(f(x) - \int_\Omega f(t)\psi(t)\,\mathrm{d}t \Big)\, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Koska $w \in \mathscr{D}(\Omega)$ on mielivaltainen ja $\overline{\mathscr{D}(\Omega)} = L^2(\Omega)$ (Lauseen 5.15:n todistus), niin tästä seuraa, että

$$f(x) - \underbrace{\int_\Omega f\,\psi\,\mathrm{d}t}_{=C=\text{vakio}} = 0 \qquad \text{m.k.} \quad x \in \Omega.$$

$\square$

Määritelmän perusteella $f \in L^2(\Omega)$ ja heikko derivaatta $f' \in L^2(\Omega)$ kun $f \in H^1(\Omega)$. Analyysin peruslauseen (Lemma 5.21) avulla voimme osoittaa, että Sobolev-funktiot $f \in H^1(\Omega)$ ovatkin hieman sileitä myös tavallisessa mielessä. Tarkemmin sanoen seuraava tulos on voimassa. (Tämä on erikoistapaus yleisemmästä Sobolevin upotuslauseesta.)

5.22. **Lause.** *Jos $\Omega = (a,b)$ on rajoitettu väli, $f \in H^1(a,b)$ ja $f' \in L^2(\Omega)$ on sen heikko derivaatta, niin*
(a) on olemassa (tasaisesti) jatkuva $\widetilde{f} : [a,b] \to \mathbb{K}$, jolle $\widetilde{f}(x) = f(x)$ m.k. $x \in \Omega$, eli funktion f määräämä L^2-luokka sisältää jatkuvan edustajan $\widetilde{f}$.
(b)

$$f(x) = \int_{x_0}^x f'(t)\,\mathrm{d}t + f(x_0) \qquad \textit{m.k.} \quad x, x_0 \in (a,b).$$

[7] integroimisjärjestyksen vaihto, kts. *Mitta ja integraali* kurssi

Huomautus. (1) Ominaisuus ”on olemassa jatkuva edustaja” on vahvempi kuin ominaisuus ”m.k. jatkuva”. Esimerkiksi välin $[0,1]$ karakteristinen funktio $\chi_{[0,1]}$ on jatkuva m.k. $x \in \mathbb{R}$, mutta ei ole olemassa sitä vastaavaa jatkuvaa edustajaa. (2) Jos f on *jatkuva* funktio, jolle löytyy tavallisessa mielessä $f'(x)$ m.k. $x \in \Omega$ ja $f' \in L^2(\Omega)$, niin tällöin (b) *ei* aina päde (*Reaalianalyysi I*: on olemassa jatkuva ns. *Cantorin funktio* $f : [0,1] \to [0,1]$, jolle $f'(x) = 0$ m.k. $x \in [0,1]$, sekä $f(0) = 0, f(1) = 1$).

Lauseen 5.22 todistus. Voidaan vapaasti olettaa, että $(a,b) = (0,1)$. Olkoon $x_0 \in (0,1)$. Määritellään funktio

$$h(x) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t,$$

joka on hyvin määritelty, koska $f' \in L^2(0,1) \subset L^1(0,1)$ Schwarzin tai Hölderin epäyhtälön nojalla. (Tässä kohdassa tarvitaan, että väli Ω on rajoitettu.) Jos $x, y \in (0,1)$ ja $x < y$, niin Hölderin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}|h(x) - h(y)| &= \left|\int_{x_0}^{x} f'(t)dt - \int_{x_0}^{y} f'(t)dt\right| = \left|\int_{x}^{y} f'(t)dt\right| \\ &\le \left(\int_x^y |f'(t)|^2\ dt\right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\int_x^y 1dt\right)^{\frac{1}{2}}}_{=|y-x|^{\frac{1}{2}}} \le \| f \|_{H^1} |x-y|^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

eli h on tasaisesti jatkuva $(0,1) \to \mathbb{K}$ ja siten myös jatkuva välillä $[0,1]$.

Väite: $f(x) - h(x) = C$ (vakio) m.k. $x \in (0,1)$ (*Huom*: kohdat (a) ja (b) seuraavat heti tästä).
Voidaan olettaa edellä merkintöjen helpottamiseksi että $x_0 = 0$. Olkoon $\varphi \in \mathscr{D}(0,1)$ mielivaltainen. Fubinin lauseen, heikon derivaatan määritelmän sekä $\varphi(1) = 0$, avulla saadaan

$$\begin{aligned}\int_0^1 \varphi'(x)h(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \varphi'(x)\left(\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{Fub.}}{=} \int_0^1 f'(t) \underbrace{\left(\int_t^1 \varphi'(x)\,\mathrm{d}x\right)}_{=\varphi(1)-\varphi(t)=-\varphi(t)} \mathrm{d}t = -\int_0^1 f'(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 f(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

joten

$$\int_0^1 \varphi'(t)(h(t) - f(t))\,\mathrm{d}t = 0$$

kaikilla $\varphi \in \mathscr{D}(0,1)$. Siispä Lemman 5.21 nojalla $f(x) - h(x) \equiv C$ m.k. $x \in (0,1)$. (Perustele itsellesi miten edellä Fubinin lausetta käytetään, kun integroimisjoukkona on

$$A = \{(x,t) : 0 \le x \le 1, 0 \le t \le x\} = \{(x,t) : 0 \le t \le 1, t \le x \le 1\}.)$$

$\square$

Seuraavassa oletetaan aina, että Sobolev-funktio $f \in H^1(a,b)$ on jatkuva (siis edustajana Lauseen 5.22.(a) mielessä) ja erityisesti

$$f(a) = \lim_{x \to a+} f(x) \quad \text{ja} \quad f(b) = \lim_{x \to b-} f(x)$$

ovat olemassa (katso Lauseen 5.22 todistus). Siis tässä mielessä

$$H^1(a,b) \subset C(a,b)\, (= \{\, f \colon [a,b] \to \mathbb{K} :\ f \text{ on jatkuva } \}).$$

Kirjoitetaan näkyviin pari seurausta Lauseelle 5.22.

5.23. **Seuraus.** *Jos $f \in H^1(a,b)$ ja heikko derivaatta $f' \in C(a,b)$, niin $f \in C^1(a,b)$.*

Todistus. Lauseen 5.22 ja derivaatan f' jatkuvuuden nojalla

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\, \mathrm{d}t$$

kaikilla $x_0, x \in [a,b]$. $\square$

5.24. **Seuraus.** *Joukko $H_0^1(a,b) = \{\ f \in H^1(a,b) :\ f(a) = f(b) = 0\ \}$ on avaruuden $H^1(a,b)$* suljettu *aliavaruus (ja siten Hilbert avaruus).*

Todistus. HT 5:9. $\square$

Huomautus. (1) Koska avaruuden H^1 funktiot ovat jatkuvia, niin 2π-periodisessa tapauksessa $H^1(0,2\pi)$ voidaan karakterisoida Fourier-kertoimien avulla: eli funktio $f \in H^1(0,2\pi)$ ja $f(0) = f(2\pi)$ jos ja vain jos

$$f \in L^2(0,2\pi) \quad \text{ja} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)|\widehat{f}(k)|^2 < \infty.$$

Tämä seuraa sivulla 101 olevasta johdantotekstistä Sobolev-avaruuksiin, kun lisäksi yhdistämme tähän päättelyyn HT:ssa 5:7 osoitettua tulosta.
(2) Sobolev-avaruudet voidaan rakentaa korkeammissakin dimensioissa ja L^p-avaruuksissa: kun $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on alue ja $1 \le p < \infty$ määritellään

$$W_p^1(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : f\text{:n heikot osittaisderivaatat } \partial_1 f, \dots, \partial_n f \in L^p(\Omega)\}.$$

Vastaavasti vaatimalla, että L^p-funktion f kaikkien korkeintaan astetta[8] k olevat heikot derivaatat $\partial^\alpha f \in L^p$, voimme myös määritellä Sobelev-avaruudet $W_p^k(\Omega)$ sekä $H^k(\Omega) \equiv W_2^k(\Omega)$. Tällöin voidaan osoittaa Lauseen 5.22 sivulla 106 vastine eli erikoistapaus *Sobolevin upotuslauseesta*:

Jos $k > \frac{n}{2}$ ja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on riittävän sileäreunainen, niin $H^k(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.

Sovelluksista differentiaaliyhtälöihin

Hilbertin avaruus-metodeja voidaan käyttää apuna myös differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisessa. Tarkastellaan klassisena esimerkkinä *Sturmin–Liouvillen* yhtälöitä: Oletetaan, että on annettu funktiot $p \in C^1(0,1)$, $q \in C(0,1)$ ja etsitään funktiota $u \in C^2(0,1)$, joka toteuttaa seuraavat ehdot

$$\text{(SL)} \qquad \begin{cases} -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = 0 & \text{kaikilla } x \in (0,1) \\ u(0) = \alpha, u(1) = \beta. \end{cases}$$

Teemme seuraavat *lisäoletukset*: on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$p(x) \geq \delta \quad \text{ja} \quad q(x) \geq \delta \quad \text{kaikilla } x \in [0,1] \tag{5.25}$$

Seuraava tärkeä *heikon ratkaisun* käsite kytkee yhteen differentiaaliyhtälöt ja Hilbertin avaruudet.

5.26. **Määritelmä.** Funktio $u \in H^1(0,1)$ on yhtälön (SL) *heikko ratkaisu*, jos $u(0) = \alpha$, $u(1) = \beta$ sekä

$$\int_0^1 p(x)u'(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 q(x)u(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

kaikilla testifunktiolla $\varphi \in \mathscr{D}(0,1)$.

Toisin sanoen, funktio u on Sturmin–Liouvillen yhtälön (SL) heikko ratkaisu, jos funktion pu' heikko derivaatta on qu. Todistamme nyt Hilbertin avaruusmenetelmillä seuraavan tunnetun tuloksen.

5.27. **Lause.** *Jos p ja q ovat alhaalta rajoitettuja ehdon* (5.25) *mielessä, niin yhtälöllä* (SL) *on yksikäsitteinen ratkaisu $u \in C^2(0,1)$.*

Todistamme väitteen useissa pienissä askeleissa.
1. askel: Ensimmäisenä askeleena osoitetaan, että

Väite. *Jos $u \in C^2$ on yhtälön* (SL) *klassinen ratkaisu, niin u on myös heikko ratkaisu. (Klassinen ratkaisu $u \in C^2(0,1)$ tarkoittaa tässä, että toinen derivaatta u'' on jatkuva suljetulla välillä $[0,1]$ ja u toteuttaa reuna-arvotehtävän* (SL)*.)*

[8] sanomme, että $\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} f$ on astetta k, jos $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = k$

Todistus. Olkoon $\varphi \in \mathscr{D}(0,1)$. Nyt osittaisintegroimalla saadaan

$$\begin{aligned}\int_0^1 (p\,u'\,\varphi' + q\,u\varphi)(x)\,\mathrm{d}x &= \Big/_{0}^{1} p(x)\varphi(x)u'(x)\\ &\quad + \int_0^1 \varphi(x)\underbrace{\big(-(p\,u')' + q\,u\big)(x)}_{\equiv 0}\,\mathrm{d}x = 0.\end{aligned}$$

Sijoitustermi häviää, koska $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Siis u on Määritelmän 5.26 nojalla myös heikko ratkaisu. $\square$

2. askel: Asetetaan avaruuteen $H^1(0,1)$ uusi sisätulo

$$\langle\, u \,|\, v \,\rangle = \int_0^1 p(x)u'(x)\overline{v'(x)}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 q(x)u(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Selvästi $\langle\, u \,|\, v \,\rangle$ on funktion u suhteen lineaarinen, $\langle\, u \,|\, v \,\rangle = \overline{\langle\, v \,|\, u \,\rangle}$ ja lisäksi $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ on aidosti positiviinen, sillä $p(x) \geq \delta \geq 0$ ja $q(x) \geq \delta \geq 0$. Siispä $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ on todella sisätulo avaruudessa $H^1(0,1)$.

Väite. *Joukko $H^1(0,1)$ varustettuna sisätulolla $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ on Hilbertin avaruus.*

Todistus. On siis vielä näytettävä, että $H^1(0,1)$ on täydellinen normissa

$$|||\, u \,||| := \sqrt{\langle\, u \,|\, u \,\rangle}, \quad u \in H^1(0,1).$$

Olemme olettaneet, että $\delta \leq p, q$ ja koska p sekä q ovat jatkuvina funktioina rajoitettuja välillä $[0,1]$, niin jollakin vakiolla $M > 0$ on

$$0 < \delta \leq p(x) \leq M < \infty, \quad 0 < \delta \leq q(x) \leq M < \infty.$$

Nyt

$$\begin{aligned}|||\, u - v \,|||^2 &= \int_0^1 [p(x)|u'(x) - v'(x)|^2 + q(x)|u(x) - v(x)|^2]\,\mathrm{d}x\\ &\leq M \int_0^1 [|u'(x) - v'(x)|^2 + |u(x) - v(x)|^2]\,\mathrm{d}x = M\|\, u - v \,\|_{H^1}^2.\end{aligned}$$

Samoin nähdään, että $\delta\|\, u - v \,\|_{H^1}^2 \leq |||\, u - v \,|||^2$. Siis, jos (u_n) on Cauchyn jono avaruudessa $(H^1, |||\cdot|||)$, niin se on Cauchyn jono myös avaruudessa $(H^1, \|\cdot\|_{H^1})$. Koska $(H^1, \|\cdot\|_{H^1})$ on täydellinen (Lause 5.20 sivulla 105), niin löytyy sellainen $u \in H^1$, että $\|\, u_n - u \,\|_{H^1} \to 0$, kun $n \to \infty$. Tällöin $|||\, u_n - u \,||| \leq M\|\, u_n - u \,\|_{H^1} \to 0$, ja siis myös avaruus $(H^1, |||\cdot|||)$ on täydellinen. $\square$

3. askel: Seuraava askel on näyttää, kuinka yhtälölle (SL) löydetään heikko ratkaisu.

Väite. *Yhtälöllä* (SL) *on heikko ratkaisu.*

Todistus. Olkoon $E = (H^1, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$, missä sisätulo $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ on sama kuin askeleessa 2, jolloin siis E on Hilbertin avaruus. Kiinnitetään aluksi jokin $f \in E$, jolle $f(0) = \alpha$ ja $f(1) = \beta$, esimerkiksi funktio $f(x) = \alpha + (\beta - \alpha)x$ kelpaa. Seurauksen 5.24 sivulla 108 nojalla H_0^1 on avaruuden H^1 suljettu aliavaruus ja edellisen askeleen todistuksen nojalla H_0^1 on myös avaruuden E suljettu aliavaruus. Siispä voimme soveltaa luvun 4 normin minimointituloksia: Seurauksen 4.15 sivulla 70 nojalla on olemassa yksikäsitteinen $g \in H_0^1$, jolle

$$|||\, f - g \,||| = \inf\{\, |||\, f - h \,||| : \ h \in H_0^1 \,\}.$$

Edelleen Lauseen 4.21 sivulla 73 nojalla $(f - g) \perp H_0^1$ sisätulon $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ suhteen. Jos nyt merkitään $u = f - g$, niin

$$u(0) = f(0) - g(0) = \alpha - 0 = \alpha \quad \text{ja} \quad u(1) = f(1) - g(1) = \beta.$$

Koska selvästi $\mathscr{D}(0,1) \subset H_0^1(0,1)$, niin jokaisella $\varphi \in \mathscr{D}(0,1)$ pätee

$$0 = \langle \cdot \mid \cdot \rangle f - g\overline{\varphi} = \int_0^1 [p(x)u'(x)\varphi'(x) + q(x)u(x)\varphi(x)]\,\mathrm{d}x$$

eli funktio u on yhtälön (SL) heikko ratkaisu! □

Huomautus. Edellä esitetty heikon ratkaisun konstruointi voidaan tulkita myös *Dirichlét'n periaatteena*: Jos

$$I(u) = \int_0^1 [p(x)|u'(x)|^2 + q(x)|u(x)|^2]\,\mathrm{d}x = |||\, u \,|||,$$

niin yhtälön (SL) heikko ratkaisu on funktio $u_0 \in H^1(0,1)$, joka toteuttaa reunaehdot $u_0(0) = \alpha$, $u_0(1) = \beta$ ja jolle pätee

$$I(u_0) = \inf\{\, I(u) : \ u(0) = \alpha \text{ ja } u(1) = \beta \,\}.$$

4. askel: Tässä askeleessa osoitamme, että yhtälöllä (SL) on korkeintaan yksi ratkaisu. Yhdessä edellisen askeleen kanssa tämä takaa sen, että yhtälöllä on tarkalleen yksi heikko ratkaisu. Tätä varten tarvitsemme seuraavan lemman, joka osoittaa, että testifunktiot ovat tiheässä avaruudessa H_0^1 (mutta eivät kuitenkaan koko Sobolev-avaruudessa H^1 !!).

5.28. **Lemma.** *Testifunktioiden sulkeuma $\overline{\mathscr{D}(\Omega)} = H_0^1(\Omega)$, kun Ω on rajoitettu avoin väli ja sulkeuma otetaan H^1-normin suhteen.*

Todistus. Oletetaan seuraavassa laskujen yksinkertaistamiseksi, että $\Omega = (0,1)$. Ensiksi, $\overline{\mathscr{D}(\Omega)} \subset H_0^1(\Omega)$, koska $\mathscr{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ ja aliavaruus $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ on suljettu.

Kääntäen, jos $f \in H_0^1(\Omega)$, niin Lauseen 5.22 sivulla 106 nojalla

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Edelleen Lemman 5.15 sivulla 102 todistuksessa osoitettiin, että $\overline{\mathscr{D}(\Omega)} = L^2(\Omega)$ (normin $\| \cdot \|_2$ suhteen), joten löytyy $g \in \mathscr{D}(\Omega)$, jolle $\| f' - g \|_2 < \varepsilon$. Koska väli $[0,1]$ on rajoitettu, niin tiedämme, että $\| f' - g \|_1 \leq \| f' - g \|_2 < \varepsilon$. Siten

$$(*) \qquad \Big| \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \Big| = \Big| \int_0^1 [g(x) - f'(x)]\,\mathrm{d}x \Big| \leq \| g - f' \|_1 < \varepsilon,$$

missä ensimmäinen yhtälö seuraa tiedosta $0 = f(1) = \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t$.

Väitteen osoittamiseksi haluaisimme nyt konstruoida funktion $h \in \mathscr{D}(0,1)$, jolle sekä $\| f - h \|_2$ ja $\| f' - h' \|_2$ olisivat pieniä. Hyvä kandidaatti vaikuttaisi olevan funktion g integraalifunktio, eli

$$(**) \qquad h(x) := \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Kuuluuko h kuitenkin avaruuteen $\mathscr{D}(0,1)$? Jotta se kuuluisi, on oltava $h(1) = 0$, mikä tarkoittaa, että vakio

$$c = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Meillä on edellä tiedossa ainoastaan arvio $(*)$. Korjataksemme tämän puutteen argumentoimme Lemman 5.21 tapaan: *kiinnitämme* testifunktion $\varphi \in \mathscr{D}(0,1)$, joka toteuttaa ehdot $\varphi \geq 0$ ja $\| \varphi \|_1 = \int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Olkoon nyt $\widetilde{g} := g - c\varphi$. Silloin $\widetilde{g} \in \mathscr{D}(0,1)$, $\int_0^1 \widetilde{g}\,\mathrm{d}t = 0$ ja lisäksi

$$\| g - \widetilde{g} \|_2 = |c| \, \| \varphi \|_2 < \varepsilon \| \varphi \|_2$$

arvion $(*)$ nojalla. Voimme nyt vaihtaa funktion g funktioksi $\widetilde{g}$, jolloin kaavan $(**)$ määräämä integraalifunktio $h \in \mathscr{D}(0,1)$. Nyt loppuargumentti etenee suoraviivaisesti:

$$\begin{aligned}
\| f - h \|_{H^1}^2 &= \int_0^1 |f(x) - h(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 |f'(x) - h'(x)|^2\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \Big| \int_0^x (f'(t) - \widetilde{g}(t))\,\mathrm{d}t \Big|^2 \mathrm{d}x + \int_0^1 |f'(x) - \widetilde{g}(x)|^2\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_0^1 \Big(\int_0^x |f'(t) - \widetilde{g}(t)|\,\mathrm{d}t \Big)^2 \mathrm{d}x + \| f' - \widetilde{g} \|_2^2 \\
&\leq \int_0^1 |f'(t) - \widetilde{g}(t)|^2\,\mathrm{d}t + \| f' - \widetilde{g} \|_2^2 \leq 2(1 + \| \varphi \|_2)^2 \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Toiseksi viimeinen arvio seuraa Cauchy–Schwarzin (tai Hölderin) epäyhtälön nojalla. Siispä $H_0^1(\Omega) \subset \overline{\mathscr{D}(\Omega)}$. □

Edeltävän lemman avulla voimme nyt osoittaa askeleen 4. väitteen:

Väite. *Yhtälön* (SL) *heikko ratkaisu on yksikäsitteinen.*

Todistus. Osoitimme 3. askeleessa, että jos $g \in H_0^1$ on se *yksikäsitteinen* alkio, jolle $f - g \perp H_0^1$, niin $u = f - g$ toteuttaa yhtälön (SL).

Kääntäen, jos u_1 toteuttaa yhtälön (SL), niin reunaehdon nojalla $u_1 = f - g_1$, missä $g_1 \in H_0^1(0,1)$. Heikon ratkaisun määritelmän nojalla $\langle \cdot | \cdot \rangle u_1 \varphi = 0$ jokaisella $\varphi \in \mathscr{D}(0,1)$ eli $f - g_1 \perp \mathscr{D}(0,1)$. Mutta Lemman 5.28 mukaan $\overline{\mathscr{D}(0,1)} = H_0^1$, joten $f - g_1 \perp H_0^1$. Siispä Lauseen 4.21 sivulla 73 nojalla $\| f - g_1 \| = \operatorname{dist}(f, H_0^1)$, joten Lauseen 4.14 sivulla 69 nojalla $u_1 = f - g_1 = f - g = u$, eli heikko ratkaisu on yksikäsitteinen. □

5. askel: Viimeisenä askeleena osoitamme, että edellisissä askeleissa konstruoitu yksikäsitteinen heikko ratkaisu on myös klassinen ratkaisu, josta Lause 5.27 seuraa.

Väite. *Yhtälön* (SL) *heikko ratkaisu u on klassinen ratkaisu eli* $u \in C^2[0,1]$.

Todistus. Alkujaan tiedetään, että $u \in H^1$, joten $u' \in L^2(0,1)$. Koska $p \in C^1(0,1)$, niin tulo $pu' \in L^2(0,1)$. Koska tulon pu' heikko derivaatta on $qu \in L^2$, niin tiedämmekin siis, että $pu' \in H^1(0,1)$, joten Lauseen 5.22 nojalla funktio pu' on jatkuva. Edelleen, koska $p \geq \delta > 0$, niin $u' \in C(0,1)$, joten olemme johtaneet, että itse asiassa $u \in C^1(0,1)$.

Nyt $(pu')' = qu \in C(0,1)$ myös klassisessa mielessä, joten $pu' \in C^1(0,1)$, mistä seuraa edelleen, että $u \in C^2(0,1)$. □

Lisätietoja: (1) Edellä esitetty Sturmin–Liouvillen yhtälöiden ratkaisumenetelmää voidaan soveltaa korkeammissa dimensioissa ns. *elliptisiin yhtälöihin*, joiden prototyyppi on *Laplacen yhtälö*

$$\begin{cases} \triangle u = 0, \\ u|\partial\Omega = f, \end{cases}$$

missä $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on alue ja $\triangle = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial_j^2}$. Ratkaisustrategia toimii kuten edellä:

i) Klassinen ratkaisu on heikko ratkaisu
ii) On olemassa heikko ratkaisu
iii) Heikko ratkaisu on yksikäsitteinen (joten myös klassinen ratkaisu on yksikäsitteinen)
iv) Heikko ratkaisu u on riittävän säännöllinen (eli edellä $u \in C^2$).

(2) Historiallisesti, Bernhard Riemann (1826–1866) ratkaisi yhtälön $\triangle u = f$ juuri edellä mainitun Dirichlét'n periaatteen avulla. Karl Weierstraß (1815–1897) aiheutti sensaation kriittisellä artikkelillaan "Über das Sogenannte Dirichletsche Princip", jossa hän esitti seuraavan vastaesimerkin: Jos

$$J(u) = \int_{-1}^{1} x^2 |u'(x)|^2 \, \mathrm{d}x,$$

niin ei ole jatkuvaa funktiota u_0, jolle $u_0(1) = 1$, $u_0(-1) = -1$ ja

$$J(u_0) = \inf\{\ J(u) :\ u(-1) = 1, u(1) = -1\ \}.$$

Nimittäin, jos

$$\varphi(x) = \frac{\arctan \frac{x}{\varepsilon}}{\arctan \frac{1}{\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0,$$

niin

$$\varphi'(x) = \frac{\varepsilon}{(\arctan \frac{1}{\varepsilon})(x^2 + \varepsilon^2)},$$

joten

$$J(\varphi) < \frac{2\varepsilon}{\arctan \frac{1}{\varepsilon}} \to 0, \text{ kun } \varepsilon \to 0^+.$$

Miksi Dirichlét'n periaate ei toimikaan? Syy (joka ymmärrettiin vasta 1900-luvulla) on se, ettei H^1 (tai H_0^1) ole täydellinen normissa

$$\| u \| = \int_{-1}^{1} x^2 |u'(x)|^2 \, \mathrm{d}x.$$

Tästä nimenomaisesta syystä oletettiin edellä, että $p, q \geq \delta$ yhtälössä (SL). Edellä oleva normi vastaa (SL)- yhtälön normia, kun $q \equiv 0$ ja $p(x) = x^2$. Oletuksesta $q \geq \delta$ voidaan luopua, mutta jos funktiolla p on nollakohta tilanne muuttuu radikaalisti.

Weierstrassin kritiikillä on ollut huomattava merkitys differentiaaliyhtälöiden teorialle ja variaatiolaskennalle, vaikka Dirichlét'n periaate nyt pystytään perustelemaan täsmällisesti Hilbertin avaruuksien teorian avulla.

Harjoitustehtäviä

5:1 Olkoon $f \in L^2(0, 2\pi)$ ja $P(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}$ kiinteä trigonometrinen polynomi. Laske konvoluutiofunktion

$$P \star f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(x-t) f(t) dt$$

Fourier-kertoimet $\widehat{P \star f}(m)$ funktioiden f ja P Fourier-kertoimien avulla. [Fubinin lausetta saa käyttää vapaasti.]

5:2 Tarkastellaan Hilbertin avaruutta $L^2(0,2\pi)$ varustettuna sisätulolla $(f|g) = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$. Laske funktion $g(t) = t,\ t \in [0,2\pi]$, Fourier kertoimet ortonormaalin jonon $(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int})_{n\in\mathbf{Z}}$ suhteen. Laske normi $\|g\|_2$ sekä integroimalla, että Parsevalin yhtälön avulla, kun pidetään tunnettuna että $(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int})_{n\in\mathbf{Z}}$ on Hilbertin kanta avaruudessa $L^2(0,2\pi)$. [Huomaa sivutuotteena kaava $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.]

5:3 Olkoon $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 2π-periodinen funktio. Näytä:

(i) jos $f \in C^k$, niin $|\hat{f}(n)| \le M(1+|n|)^{-k}$ kaikilla $n \in \mathbf{Z}$,

(ii) jos $f \in L^2$ ja $|\hat{f}(n)| \le M(1+|n|)^{-(k+2)}$ kaikilla $n \in \mathbf{Z}$, niin $f \in C^k$.

Edellä $k \in \mathbf{N}$ ja M on vakio.

5:4 Näytä: jos $f \in L^2(0,2\pi)$ ja $\sum_{n\in\mathbf{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty$, niin $f : [0,2\pi] \to \mathbf{C}$ on jatkuva funktio (eli funktion f ekvivalenssiluokka L^2:ssa sisältää jatkuvan edustajan). [*Vihje.* Näytä, että vastaava Fourier-sarja $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{inx}$ on absoluuttisesti suppeneva Banachin avaruudessa avaruudessa $C(0,2\pi)$.]

5:5 (i) Näytä, että funktio $h \in C^\infty(\mathbb{R})$, kun

$$h(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

(ii) Olkoon $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$. Näytä (i)-kohdan perusteella, että on olemassa funktio $\eta_\varepsilon \in C^\infty((0,1))$, jolle pätee $0 \le \eta_\varepsilon(x) \le 1$ kaikilla $x \in \Omega$, $\eta_\varepsilon(x) \equiv 0$, kun $0 < x < \varepsilon$ tai $1-\varepsilon < x < 1$, sekä $\eta_\varepsilon(x) \equiv 1$ kaikilla $2\varepsilon < x < 1-2\varepsilon$.

5:6 Näytä, että funktio

$$h(x) = \begin{cases} 1-|x|, & \text{jos } x \in [-1,1] \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

kuuluu Sobolev-avaruuteen $H^1(\mathbf{R})$ ja määritä sen heikko derivaatta $h' \in L^2(\mathbf{R})$.

5:7 Olkoon $f \in L^2 = L^2([0,2\pi])$ funktio jolle $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2|\hat{f}(n)|^2 < \infty$. Riesz-Fischerin lauseen nojalla on olemassa sellainen $g \in L^2$, että $\hat{g}(n) = in\hat{f}(n)$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$. Näytä, että g on funktion f heikko derivaatta, eli

$$\int_0^{2\pi} g(x)\phi(x)dx = -\int_0^{2\pi} f(x)\phi'(x)dx \quad \text{kaikilla } \phi \in \mathcal{D}((0,2\pi)).$$

[*Vihje:* todista aluksi väite kun f on trigonometrinen polynomi ja yleinen tapaus approksimoimalla.]

5:8 Olkoon $f_\alpha(x) = x^\alpha$ kun $x \in (0,1)$. Millä vakion $\alpha \in \mathbf{R}$ arvolla $f_\alpha \in H^1(0,1)$, eli siis milloin sekä $f_\alpha \in L^2(0,1)$ ja sen heikko derivaatta $f'_\alpha \in L^2(0,1)$?

5:9 Osoita, että $H^1_0(0,1) = \{f \in H^1(0,1) : f(0) = f(1) = 0\}$ on avaruuden $H^1(0,1)$ suljettu aliavaruus. [*Vihje.* Johda arvio $|f(x)| \le 2\|f\|_{H^1}$, kun

$f \in H^1(0,1)$ ja $x \in (0,1)$. Lähde liikkeelle Lauseen 5.22 antamasta jatkuvasta edustajasta f, jolle $f(x) = \int_y^x f'(t)dt + f(y)$ kaikilla $x, y \in (0,1)$. Hölderin epäyhtälö auttaa eteenpäin.]

6. Lineaariset operaattorit

Luvussa 5 osoitimme, että jos $f \in L^2$, niin vastaavan Fourier-sarjan osasummat suppenevat kohti f:ää L^2-normissa (kts. Seuraus 5.8 sivulla 98). Osoitimme myös, että jos f on jatkuva ja 2π-periodinen funktio, niin Fourier-osasummien *aritmeettiset keskiarvot* suppenevat tasaisesti kohti funktiota f (kts. Fejérin lause 5.4 sivulla 93). Koska nälkä vain kasvaa syödessä, niin voimme miettiä uusia luontevia Fourier-sarjoihin liittyviä kysymyksiä:

Kysymys 1: Suppeneeko Fourier-sarja L^1-normissa, jos f on L^1-funktio ?
Kysymys 2: Suppeneeko jatkuvan funktion Fourier-sarja *pisteittäin* ? Eli jos $f \in C(0, 2\pi)$ ja $f(0) = f(2\pi)$, onko

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} = \lim_{n\to\infty} s_n(f;x) \text{ kaikilla } x?$$

Näiden kysymysten ratkaisemiseksi meidän on tutkittava Fourier-osasummien $s_n(f;\,\cdot\,)$ ominaisuuksia *lineaarisena operaattorina* $f \mapsto s_n(f;\,\cdot\,)$ (ja vastauksiin palataan luvussa 7, kun olemme päässeet asiassa riitävän syvälle). Itse asiassa, jatkuvan lineaarikuvauksen käsite on funktionaalianalyysin keskeisiä peruskäsitteitä. Palautetaan lyhyesti mieleen kurssin alkupuolella (luvussa 2) jo esitellyt lineaariset operaattorit.

Olkoon E ja F $\mathbb{K}$-kertoimisia vektoriavaruuksia. Kuvaus $T\colon E \to F$ on *lineaarinen*, jos

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$$

kun $x, y \in E$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Lineaarisesta kuvauksesta käytetään usein nimitystä *lineaarinen operaattori*; näin erityisesti siinä tapauksessa, että T on jatkuva.

Luvussa 2 käsittelimme jo lineaaristen operaattoreiden jatkuvuutta (kts. Määritelmä 2.24 sivulla 24 ja Lause 2.30 sivulla 25). Osoitimme muun muassa, että lineaarikuvaus $T : E \to F$ on jatkuva jos ja vain jos sen operaattorinormi $\| T \|$ on äärellinen, missä

$$\| T \| = \sup_{x\in B_E} \| Tx \|_F,$$

ja $B_E = \{x \in E : \|x\| \le 1\}$ on avaruuden E suljettu yksikköpallo.

Tässä luvussa tarkastelemme operaattoreiden itsensä muodostamia avaruuksia. Tätä varten otamme käyttöön muutaman uuden merkinnän. Olkoon E ja F normiavaruuksia. Asetamme

$$L(E, F) = \{T\colon E \to F |\ T \text{ on lineaarikuvaus}\},$$

$$\mathscr{L}(E, F) = \{T\colon E \to F |\ T \text{ on jatkuva lineaarikuvaus}\},$$

ja erityisesti, kun $F = E$, merkitsemme $\mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E, E)$. Osoittautuu, että jatkuvat lineaariset operaattorit muodostavat normiavaruuden, kun normiksi valitaan operaattorinormi.

6.1. **Lause.** *Olkoot E ja F normiavaruuksia, joissa skalaarikuntana on $\mathbb{K}$. Tällöin $\mathscr{L}(E, F)$ on $\mathbb{K}$-kertoiminen normiavaruus, jossa normina on operaattorinormi*

$$T \mapsto \| T \| := \sup\{ \| Tx \|_F : \ x \in E, \| x \|_E \leq 1 \}.$$

Todistus. Jos $S, T \in L(E, F)$, niin vastaava summaoperaattori on

$$(S + T)(x) = Sx + Tx, \quad x \in E.$$

Kuvaus $V = S+T$ on lineaarinen kuvaus $E \to F$, sillä jos $x, y \in E$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, niin

$$\begin{aligned} V(\alpha x + \beta y) &= S(\alpha x + \beta y) + T(\alpha x + \beta y) \\ &= \alpha Sx + \beta Sy + \alpha Tx + \beta Ty \\ &= \alpha(Sx + Tx) + \beta(Sy + Ty) \\ &= \alpha V(x) + \beta V(y). \end{aligned}$$

Samoin kuvaus cS on lineaarinen $E \to F$, missä $(cS)(x) = cSx$, kun $x \in E$ ja $c \in \mathbb{K}$. Tällöin $L(E, F)$ on vektoriavaruus, kun nolla-alkiona on nollakuvaus $\bar{0}(x) = \bar{0}_F$ kaikilla $x \in E$ (lineaarialgebran yksityiskohdat vapaa HT).

Näytämme seuraavaksi, että $\mathscr{L}(E, F)$ on avaruuden $L(E, F)$ vektorialiavaruus ja kuvaus $T \mapsto \| T \|$ on normi vektoriavaruudessa $\mathscr{L}(E, F)$. Tämän näyttämiseksi käydään läpi normin aksiomat:

(N1) Olkoon $S, T \in \mathscr{L}(E, F)$ ja $x \in B_E = \{x \in E : \| x \| \leq 1\}$. Tällöin soveltamalla kolmioepäyhtälöä avaruudessa F saadaan, että

$$\| (S + T)x \|_F = \| Sx + Tx \|_F \leq \| Sx \|_F + \| Tx \|_F \leq \| S \| + \| T \|$$

koska $\| x \| \leq 1$. Siis

$$\| S + T \| = \sup_{x \in B_E} \| (S + T)x \|_F \leq \| S \| + \| T \|.$$

Erityisesti, operaattori $S + T$ on jatkuva (ts. rajoitettu), eli $S + T \in \mathscr{L}(E, F)$.

(N2) Olkoon $c \in \mathbb{K}$ ja $x \in B_E$. Tällöin $\| cTx \|_F = |c| \| Tx \|_F$, joten

$$\begin{aligned} \| cT \| &= \sup\{ \| cTx \|_F : \ x \in B_E \} = |c| \sup\{ \| Tx \|_F : \ x \in B_E \} \\ &= |c| \, \| T \|. \end{aligned}$$

Erityisesti $cT \in \mathscr{L}(E, F)$. Yhdessä edellisen kohdan (N1) kanssa tästä seuraa, että $\mathscr{L}(E, F)$ on vektoriavaruuden $L(E, F)$ vektorialiavaruus.

(N3) Operaattorinormin positiivisuus on selvä. Jos $\| T \| = 0$, niin $\| Tx \|_F = 0$ kaikilla $x \in E$ eli $Tx = \bar{0}_F$ kaikilla $x \in E$. Siispä $T = \bar{0}$, missä $\bar{0}$ on nollaoperaattori. Käänteinen suunta on selvä.

Siispä $(\mathscr{L}(E,F), \| \cdot \|)$ on normiavaruus. □

Tutkimme seuraavaksi, milloin avaruus $\mathscr{L}(E,F)$ on Banachin avaruus eli täydellinen operaattorinormissa. Tätä varten meidän on pohdittava hiukan erilaisia operaattoreihin liittyviä suppenemiskäsitteitä. Koska lineaariset operaattorit ovat kuvauksia, voimme puhua niiden pisteittäisestä suppenemisesta. Siis jos E ja F ovat normiavaruuksia ja $A \subset E$ on osajoukko, niin sanomme että jono kuvauksia $f_n \colon A \to F$ *suppenee pisteittäin* joukossa A kohti kuvausta $f : A \to F$, jos

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{kaikilla } x \in A.$$

Havaitsemme aluksi, että pisteittäinen suppeneminen säilyttää lineaarisuuden eli lineaaristen kuvausten pisteittäinen raja on myös lineaarinen kuvaus.

6.2. **Lause.** *Olkoot E ja F normiavaruuksia ja $(T_n) \subset L(E,F)$ jono lineaarikuvauksia, jotka suppenevat pisteittäin E:ssä kohti kuvausta $T \colon E \to F$. Tällöin $T \in L(E,F)$, eli $T : E \to F$ on lineaarinen.*

Todistus. Suoraan laskemalla saadaan

$$\begin{aligned} T(\lambda x + \mu y) &= \lim_{n\to\infty} T_n(\lambda x + \mu y) = \lim_{n\to\infty} (\lambda T_n x + \mu T_n y) \\ &= \lambda T x + \mu T y. \end{aligned}$$

□

Seuraavaksi herää kysymys, säilyykö lineaarisen kuvauksen jatkuvuuskin pisteittäisessä suppenemisessa ? Vastaus on yleisessä tapauksessa kielteinen, kuten seuraava konkreettinen esimerkki osoittaa.

6.3. **Esimerkki.** Olkoon $\mathcal{P} = \{\, x : \ x \text{ on } \mathbb{R}\text{-kertoiminen polynomi} \,\}$ ja $\| x \|_\infty = \sup_{0\le t\le 1} |x(t)|$, kun $x \in \mathcal{P}$. Määrittemme jokaisella $n \in \mathbb{N}$ kuvauksen

$$T_n x = n\big(x(1) - x(1 - \tfrac{1}{n})\big), \quad x \in \mathcal{P}.$$

Tällöin $T_n : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ on lineaarinen ja $T_n \in \mathscr{L}(\mathcal{P}, \mathbb{R})$, koska $|x(1)| \le \| x \|_\infty$ ja $|x(1 - \frac{1}{n})| \le \| x \|_\infty$, joten $\| T_n x \| \le 2n \| x \|_\infty$. Siispä $\| T_n \| \le 2n$. Toisaalta (erotusosamäärä!)

$$\lim_{n\to\infty} T_n x = \lim_{n\to\infty} \frac{x(1) - x(1 - \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x(1 - \frac{1}{n}) - x(1)}{-\frac{1}{n}} = x'(1),$$

joten jono (T_n) suppenee *pisteittäin* kohti kuvausta $T\colon \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, missä $x \mapsto x'(1)$. Kuvaus T ei kuitenkaan ole jatkuva: jos $x_n(t) = t^n$, niin $\| x_n \|_\infty = 1$ ja

$$|Tx_n| = |x_n'(1)| = n, \text{ joten } \| T \| \geq \sup_n |Tx_n| = \infty.$$

Siis normiavaruuden jatkuvien lineaarikuvausten pisteittäinen raja ei välttämättä olekaan jatkuva. (Ehkä yllättäen, täydellisyys pelastaa tilanteen, kuten tulemme näkemään luvussa 7 käyttämällä tasaisen rajoituksen periaatetta.)

Palaamme pisteittäisen suppenemisen tarkastelun jälkeen operaattorinormin määräämään suppenemiseen.

6.4. **Määritelmä.** Jos $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}(E,F)$ ja $T \in \mathscr{L}(E,F)$, niin sanomme, että jono (T_n) suppenee kohti operaattoria T *operaattorinormin mielessä* (eli *tasaisesti*), jos

$$\lim_{n\to\infty} \| T_n - T \| = \lim_{n\to\infty} \big(\sup_{x\in B_E} \|T_n x - Tx\|\big) = 0.$$

Tällöin merkitsemme $T_n \to T$ kun $n \to \infty$, tai $\lim_{n\to\infty} T_n = T$.

Huomautus. Jos $T_n \to T$ operattorinormin mielessä kun $n \to \infty$, niin T_n suppenee myös pisteittäin kohti operaattoria T, sillä kaikilla $x \in E$ pätee

$$\| T_n x - Tx \| = \| (T_n - T)x \| \leq \| T_n - T \| \, \| x \| \to 0,$$

kun $n \to \infty$.

Käänteinen väite *ei* kuitenkaan pidä paikkaansa.

6.5. **Esimerkki.** Määrittelemme lineaarikuvaukset $T_n\colon \ell^1 \to \ell^1$ asettaen

$$T_n x = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1 \text{ kpl}}, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots),$$

kun $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^1$ ja $n \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$\| T_n x \|_1 = \sum_{k=n}^\infty |x_k| \leq \sum_{k=1}^\infty |x_k| = \| x \|_1,$$

kun $x \in \ell^1$, joten kuvaukset T_n ovat jatkuvia ja $\| T_n \| \leq 1$. Edelleen, $T_n(x) \to \bar{0}$ kaikilla $x \in \ell^1$ eli $T_n \to \bar{0}$ pisteittäin. Nimittäin: $\|T_n x\|_1 = \sum_{k=n}^\infty |x_k| \to 0$ kun $n \to \infty$ kaikilla $x = (x_k) \in \ell^1$.

Kuitenkaan jono (T_n) ei suppene operaattorinormin mielessä kohti nollaoperaattoria: Jos

$$e_n = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1 \text{ kpl}}, 1, 0, 0, \dots) \in \ell^1,$$

niin $T_n e_n = e_n$ ja siis $\| Te_n \|_1 = \| e_n \|_1 = 1$, joten $\| T_n \| = 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Olemme jo todenneet, että jatkuvien lineaaristen operaattoreiden pisteittäinen suppeneminen ei takaa jatkuvuutta. Suppeneminen operaattorinormin suhteen muuttaa tilanteen, kuten seuraava tulos osoittaa. Lisäksi, seuraavan keskeisen tuloksen avulla voimme rakentaa uusia Banachin avaruuksia lähtien tunnetuista avaruuksista.

6.6. **Lause.** *Jos E on normiavaruus ja F on Banachin avaruus, niin $\mathscr{L}(E,F)$ varustettuna operaattorinormilla $\|\cdot\|$ on Banachin avaruus.*

Todistus. Olkoon (T_n) Cauchyn jono avaruudessa $\mathscr{L}(E,F)$ ja $x \in E$. Tällöin

$$\| T_n x - T_m x \| = \| (T_n - T_m)x \| \le \| T_n - T_m \| \, \| x \|,$$

kun $n, m \in \mathbb{N}$, joten jono $(T_n x)$ on Cauchy avaruudessa F. Koska F on täydellinen, niin jono $(T_n x)$ suppenee; merkitään tätä rajaa

$$Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x, \quad x \in E.$$

Siispä jono (T_n) suppenee kohti kuvausta T pisteittäin, joten Lauseen 6.2 sivulla 119 nojalla T on lineaarikuvaus $E \to F$.
Väite. $T \in \mathscr{L}(E,F)$ ja $\|T - T_n\| \to 0$ kun $n \to \infty$.
Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska (T_n) on Cauchyn jono avaruudessa $\mathscr{L}(E,F)$, niin on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbb{N}$, että aina kun $n, m \ge n_0$, niin $\| T_n - T_m \| \le \varepsilon$. Jos $x \in E$ ja $\| x \| \le 1$, niin silloin

$$\| T_n x - T_m x \|_F = \| (T_n - T_m)x \|_F \le \| T_n - T_m \| \, \| x \|_E \le \| T_n - T_m \| \le \varepsilon.$$

Pitämällä edellä piste $x \in E$ ja luku $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$, kiinteinä ja antamalla luvun m kasvaa rajatta tästä seuraa, että

$$\| T_n x - Tx \|_F = \lim_{m\to\infty} \| T_n x - T_m x \|_F \le \varepsilon,$$

ja siis $\| (T_n - T)x \|_F \le \varepsilon$ aina kun $n \ge n_0$ ja $x \in B_E$. Näin ollen kuvaus $T_{n_0} - T$ on jatkuva, joten myös

$$T = T_{n_0} - (T_{n_0} - T)$$

on jatkuva. Operaattorinormin määritelmän ja viimeisimmän arvion nojalla

$$\| T_n - T \| \le \varepsilon,$$

kun $n \ge n_0$, joten jono (T_n) siis suppenee avaruudessa $(\mathscr{L}(E,F), \|\cdot\|)$. Siispä $(\mathscr{L}(E,F), \|\cdot\|)$ on täydellinen. □

Operaattorien avaruuksissa on myös algebrallista rakennetta, sillä voimme määritellä operaattoritulon yhdistettynä kuvauksina. Seuraava lause kertoo saman tarkemmin.

6.7. **Lause.** *Olkoot E, F ja G normiavaruuksia sekä $T \in \mathscr{L}(E,F)$ ja $S \in \mathscr{L}(F,G)$ rajoitettuja lineaarisia operaattoreita. Silloin yhdistetty kuvaus $ST = S \circ T \in \mathscr{L}(E,G)$ ja*

$$\| ST \| \leq \| S \| \| T \|$$

(siis operattorinormi on submultiplikatiivinen).

Todistus. Lineaaristen kuvausten yhdiste on lineaarinen (Lineaarialgebran nojalla), joten $ST \in L(E,G)$. Jos $x \in E$ ja $\| x \| \leq 1$, niin

$$\| STx \|_G = \| S(Tx) \|_G \leq \| S \| \| Tx \|_F \leq \| S \| \| T \|.$$

Siispä $ST \in \mathscr{L}(E,G)$ ja $\| ST \| \leq \| S \| \| T \|$. (Toki kuvauksen ST jatkuvuus seuraa myös Topologia I:n tiedosta, että jatkuvien kuvausten yhdiste säilyy jatkuvana.) □

Huomautus. Banachin avaruutta E sanotaan *Banachin algebraksi*, jos avaruuden E alkioille on määritelty *tulo* $E \times E \to E$; $(x,y) \mapsto xy$, joka toteuttaa seuraavan ehdon:

$$\| xy \| \leq \| x \| \| y \|, \quad \forall x, y \in E,$$

sekä lisäksi *algebran* ehdot: (kaikilla $x, y, z \in E$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$)

$$\begin{aligned} x(yz) &= (xy)z, && \text{(tulon assosiatiivisuus)}, \\ x(y+z) &= xy + xz, && (x+y)z = xz + yz, \quad \text{(osittelulait)}, \\ (\lambda x)y &= \lambda(xy) = x(\lambda y), && \text{(skaalarilla kertomisen ja tulon yhteys)}. \end{aligned}$$

6.8. **Esimerkki.** (1) Lauseiden 6.6 ja 6.7 nojalla $\mathscr{L}(E)$ on Banachin algebra, kun E on Banachin avaruus, normina on operaattorinormi ja tulona ST on kuvausten yhdistäminen.
(2) Jos X on kompakti avaruus, niin jatkuvien funktioiden $X \to \mathbb{K}$ muodostama Banachin avaruus $C(X)$ on Banachin algebra, kun normina on $\| \cdot \|_\infty$ ja tulona $(fg)(x) = f(x)g(x), x \in X$.

Tutkimme seuraavaksi milloin käänteiskuvaus T^{-1} on jatkuva, kun $T : E \to F$ on lineaarinen bijektio. Määritelmän mukaan $T^{-1}(y) = x$ jos ja vain jos $Tx = y$ (missä $x \in E$ ja $y \in F$).

6.9. **Lause.** *Olkoon E, F normiavaruuksia ja $T \colon E \to F$ lineaarinen bijektio. Tällöin T^{-1} on lineaarinen ja*

(6.10) $\quad T^{-1}$ *jatkuva* $\iff$ *on olemassa* $\alpha > 0$, *jolle* $\| Tx \| \geq \alpha \| x \|$, $x \in E$

(eli lineaarikuvaus T on alhaalta rajoitettu).

Todistus. Jos $x, y \in F$ ja $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, niin

$$T(\lambda T^{-1}x + \mu T^{-1}y) = \lambda TT^{-1}x + \mu TT^{-1}y = \lambda x + \mu y = T\big(T^{-1}(\lambda x + \mu y)\big).$$

Koska T on bijektio, niin tästä seuraa, että $\lambda T^{-1}x + \mu T^{-1}y = T^{-1}(\lambda x + \mu y)$. Siispä T^{-1} on lineaarinen. Osoitetaan seuraavaksi ehto (6.10).

"$\Rightarrow$": Koska $T^{-1}x = \bar{0}$ jos ja vain jos $x = \bar{0}$, niin voidaan olettaa $E \neq \{\bar{0}\}$ ja $F \neq \{0\}$. Tällöin on siis olemassa $x_0 \in F$, $x_0 \neq 0$, jolloin

$$0 < \frac{\| T^{-1}x_0 \|}{\| x_0 \|} \leq \| T^{-1} \|.$$

Siispä $0 < \| T^{-1} \| < \infty$, joten luku $1/\| T^{-1} \|$ on äärellinen. Jos $x \in E$ on mielivaltainen, niin $\| x \| = \| T^{-1}Tx \| \leq \| T^{-1} \| \| Tx \|$, joten

$$(\frac{1}{\| T^{-1} \|}) \cdot \|x\| \leq \| Tx \|, \quad x \in E.$$

Voidaan siis valita $\alpha = \| T^{-1} \|^{-1}$, josta seuraa väitteen tämä suunta.

"$\Leftarrow$": Oletetaan, että $\| Tx \| \geq \alpha \| x \|$ kaikilla $x \in E$. Jos $y \in F$ on mielivaltainen, niin valitaan $x = T^{-1}y$. Silloin $Tx = y$ ja oletuksen perusteella

$$\| T^{-1}y \| = \| x \| \leq \frac{1}{\alpha} \| Tx \| = \frac{1}{\alpha} \| y \|,$$

joka on voimassa kaikilla $y \in F$. Siispä $\| T^{-1} \| \leq 1/\alpha < \infty$ (eli T^{-1} on jatkuva). $\square$

6.11. **Seuraus.** *Olkoot E, F normiavaruuksia ja $T\colon E \to F$ lineaarinen bijektio. Silloin T on homeomorfismi jos ja vain jos on olemassa sellaiset vakiot $\alpha, \beta > 0$, joille*

$$\alpha \| x \| \leq \| Tx \| \leq \beta \| x \| \quad \textit{kaikilla } x \in E. \tag{6.12}$$

Todistus. Tämä seuraa välittömästi Lauseesta 2.30 sivulla 25 ja Lauseesta 6.9. $\square$

6.13. **Määritelmä.** Jos $T \in \mathscr{L}(E, F)$ toteuttaa Seurauksen 6.11 ehdot (6.12), niin sanomme jatkossa, että T on lineaarinen *isomorfismi* ja että avaruudet E ja F ovat (lineaarisesti) isomorfiset.

Täydellisyys säilyy lineaarisissa isomorfismeissa.

6.14. **Lause.** *Olkoot E ja F normiavaruuksia sekä $T \in \mathscr{L}(E, F)$ isomorfismi. Silloin E on täydellinen jos ja vain jos F on täydellinen.*

Todistus. Symmetrian mukaan riittää osoittaa väite vain toiseen suuntaan. Oletetaan siis, että E on täydellinen. Olkoon $(x_n)_{n\in N}$ Cauchyn jono avaruudessa F. Silloin

$$\| T^{-1}x_n - T^{-1}x_m \| = \|T^{-1}(x_n - x_m)\| \le \| T^{-1} \| \| x_n - x_m \|, \quad n, m \in \mathbb{N},$$

ja $(T^{-1}x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on siis Cauchyn jono avaruudessa E. Koska E on täydellinen, niin $T^{-1}x_n \to y$ (jollakin $y \in E$) kun $n \to \infty$, ja

$$\| x_n - Ty \| = \| T(T^{-1}x_n) - Ty \| \le \| T \| \| T^{-1}x_n - y \| \to 0,$$

kun $n \to \infty$. Täten myös F on täydellinen. □

Erikoistapauksena, jos normit $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ ovat ekvivalentteja E:ssä (kts. Määritelmä 2.11 sivulla 15), niin Lauseen 6.14 nojalla $(E, \|\cdot\|_1)$ on täydellinen jos ja vain jos $(E, \|\cdot\|_2)$ on täydellinen. (Tässä siis identtinen kuvaus I_E on isomorfismi $(E, \|\cdot\|_1) \to (E, \|\cdot\|_2)$.)

6.15. **Esimerkki.** (a) Jos $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^p(\mathbb{Z})$ ja χ_I on välin I karakteristinen funktio, niin kuvaus

$$T\colon (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \chi_{[n,n+1)}$$

määrää isomorfismin $T\colon \ell^p(\mathbb{Z}) \to E$, missä $E = \overline{span}\{\chi_{[n,n+1)} : n \in \mathbb{Z}\}$ on avaruuden $L^p(\mathbb{R})$ suljettu aliavaruus. Itse asiassa, T on *isometria* eli $\| Tx \|_{L^p(\mathbb{R})} = \| x \|_{\ell^p}$ kaikilla $x = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^p(\mathbb{Z})$, koska

$$\int_{\mathbb{R}} |\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \chi_{[n,n+1)}(x)|^p \,\mathrm{d}x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^p \quad \text{kaikilla } (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^p(\mathbb{Z}).$$

(b) Osoitamme, että jonoavaruus $c = \{(x_n) : \lim_n x_n \text{ olemassa}\}$ on isomorfinen avaruuden c_0 kanssa (molemmissa sup-normi $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$).

Jos $x = (x_n) \in c$, niin merkitään $\ell(x) = \lim_n x_n$. Määritellään $T : c \to c_0$ asettamalla $T(x_n) = (y_n)$, missä $y_1 = \ell(x)$ ja $y_n = x_{n-1} - \ell(x)$ kun $n \ge 2$. Tällöin $T(x_n) \in c_0$ ja T on lineaarinen kuvaus $c \to c_0$ (tarkista!). Lisäksi

$$\|Tx\|_\infty \le \sup_n |x_n| + |\ell(x)| \le 2\|x\|_\infty,$$

joten T on jatkuva (ja $\|T\| \le 2$). Määritellään seuraavaksi $S : c_0 \to c$ ehdolla $S(x_n) = (x_{n+1} + x_1)_{n\in\mathbb{N}}$ kun $(x_n) \in c_0$. Tällöin S on lineaarikuvaus $c_0 \to c$, ja

$$\|Sx\|_\infty = \sup_n |x_{n+1} + x_1| \le 2\|x\|_\infty,$$

eli myös $\|S\| \le 2$. Lisäksi $T \circ S = id_{c_0}$ ja $S \circ T = id_c$, joten T on bijektio (ja $S = T^{-1}$). Nimittäin,

$$T(S(x_n)) = T((x_{n+1} + x_1)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_1, x_2 + x_1 - x_1, x_3 + x_1 - x_1, \ldots) = (x_n)$$

kaikilla $(x_n) \in c_0$. Yhtälö $S \circ T = id_c$ todetaan samoin.

(c) [*Lisätietoja*] Jos $p \neq q$, niin ℓ^p ei ole isomorfinen avaruuden ℓ^q kanssa (todistus sivuutetaan). Samoin avaruus L^p on isomorfinen avaruuden L^q kanssa $\iff p = q$. Jonoavaruus ℓ^2 on isomorfinen erään avaruuden L^q suljetun aliavaruuden kanssa, jos $q \geq 2$. Mutta jos $q < 2$, niin tämä ei päde. Näiden asioiden todistukset ovat varsin epätriviaaleja ja ne sivuutetaan tässä.

Lisäksi jokainen *separoituva* Banachin avaruus E on isomorfinen avaruuden $C(0,1)$ suljetun aliavaruuden kanssa (ja tämänkin todistus sivuutetaan).

(d) Sivujen 101-114 ylimääräisessä materiaalissa, joka käsittelee Sturmin–Liouvillen yhtälöitä Hilbert avaruus -menetelmillä, tarkastellaan tavallisen Sobolevin avaruuden normin

$$\| f \|_{H^1} = \Big(\int_0^1 (|f'(x)|^2 + |f(x)|^2) \, \mathrm{d}x \Big)^{1/2}$$

lisäksi myös normia

$$\| f \|_E = \Big(\int_0^1 (|f'(x)|^2 p(x) + |f(x)|^2 q(x)) \, \mathrm{d}x \Big)^{1/2},$$

missä $0 < \delta \leq p, q \leq M < \infty$. Osiossa osoitetaan, että

$$\sqrt{\delta} \| f \|_{H^1} \leq \| f \|_E \leq \sqrt{M} \| f \|_{H^1}$$

ja siten $\| \cdot \|_{H^1}$ ja $\| \cdot \|_E$ määräävät avaruuteen H^1 saman topologian ja molemmat normit ovat täydellisiä, vrt Lause 6.14.

Todistamme seuraavaksi varsin hyödyllisen laajennusominaisuuden jatkuville operaattoreille.

6.16. **Lause.** *Olkoon E normiavaruus, F Banachin avaruus, $M \subset E$ vektorialiavaruus (jota* **ei** *oleteta suljetuksi) sekä $T \colon M \to F$ jatkuva lineaarikuvaus. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen jatkuva lineaarikuvaus $\widehat{T} : \overline{M} \to F$, jolle*

$$\widehat{T} z = T z \quad \textit{kaikilla } z \in M \quad \textit{ja} \quad \| \widehat{T} \| = \| T \|.$$

[Yllä $\overline{M}$ = aliavaruuden M sulkeuma E:ssä.]

$$\begin{tikzcd}
E \supset & \overline{M} \arrow[dr, bend left] & \\
& \bigcup & F \\
& M \arrow[ur, bend right] &
\end{tikzcd}$$

Kaavio operaattorin laajennuksesta

Todistus. Olkoon $z \in \overline{M}$ mielivaltainen. Tällöin löytyy sellainen jono $(x_n) \subset M$, jolle $x_n \in B(z, \frac{1}{n})$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, joten $z = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Jos $p, q \in \mathbb{N}$, saadaan

$$\| Tx_p - Tx_q \| = \| T(x_p - x_q) \| \leq \| T \| \| x_p - x_q \|,$$

joten $(Tx_n) \subset F$ on Cauchyn jono. Koska F on Banachin avaruus, niin jonolla $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on raja-arvo $\widehat{T}(z) \in F$ (tässä vaiheessa $\widehat{T}(z)$ on vain merkintä, joka kertoo, että raja-arvo riippunee pisteestä z). Havaitaan seuraavaksi, että tämä raja-arvo on riippumaton jonon (x_n) valinnasta. Nimittäin, olkoon $(y_n) \subset M$ toinen jono jolle myös $z = \lim_n y_n$. Toistamalla edellinen päättely jonolle (y_n) löydetään raja-alkio $u = \lim_n Ty_n \in F$. Koska $\| x_n - y_n \| \to \| z - z \| = 0$, niin kuvauksen T jatkuvuuden nojalla

$$\bar{0} = \lim_{n\to\infty} T(x_n - y_n) = \lim_n Tx_n - \lim_n Ty_n = \widehat{T}(z) - u.$$

Siispä $u = \widehat{T}(z)$. Päättelemme tästä, että raja-arvo

$$\widehat{T}(z) = \lim_{n\to\infty} Tx_n$$

riippuu vain pisteestä $z \in \overline{M}$ eikä lainkaan approksimoivan jonon valinnasta. Nyt siis $z \mapsto \widehat{T}(z)$ on kuvaus $\overline{M} \to F$. Jos $z \in M$ ja valitaan $x_n = z$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin

$$\widehat{T}(z) = \lim_{n\to\infty} Tx_n = Tz,$$

joten $\widehat{T}$ on kuvauksen T laajennus.

Osoitetaan seuraavaksi, että $\widehat{T}$ on lineaarinen kuvaus $\overline{M} \to F$. Olkoon $x, y \in \overline{M}$ ja $\alpha \in \mathbb{K}$. Valitaan sellaiset jonot $(x_n) \subset M$, $(y_n) \subset M$, että

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ ja } \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Tällöin myös jono $(z_n) = (x_n + \alpha y_n) \subset M$ ja tämä jono suppenee kohti vektoria $x + \alpha y$. Siispä alkuosan perusteella

$$\widehat{T}(x + \alpha y) = \lim_{n\to\infty} T(x_n + \alpha y_n) = \lim_{n\to\infty} Tx_n + \lim_{n\to\infty} \alpha T y_n = \widehat{T}(x) + \alpha \widehat{T}(y).$$

Edellisessä käytimme lisäksi operaattorin T lineaarisuutta sekä kolmioepäyhtälöä siihen, että raja-arvon voi jakaa kahteen osaan. Edellinen lasku siis osoittaa, että $\widehat{T}$ on lineaarinen.

Osoitetaan seuraavaksi, että $\| T \| = \| \widehat{T} \|$ (tästä seuraa että $\widehat{T}$ on jatkuva sulkeumassa $\overline{M}$). Jos $z \in \overline{M}$, niin valitaan sellainen jono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$, että $z = \lim_n x_n$. Tällöin

$$\widehat{T}z = \lim_{n\to\infty} Tx_n.$$

Koska $\| Tx_n \| \le \| T \| \| x_n \|$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja koska kolmioepäyhtälön nojalla $\| x_n \| \to \| z \|$, niin

$$\| \widehat{T}z \| = \lim_{n\to\infty} \| Tx_n \| \le \lim_{n\to\infty} \| T \| \| x_n \| = \| T \| \| z \|,$$

joten $\| \widehat{T} \| \le \| T \|$ ja erityisesti $\widehat{T}$ on jatkuva. Toisaalta, jos $z \in M$, niin

$$\| Tz \| = \| \widehat{T}z \| \le \| \widehat{T} \| \| z \|,$$

joten myös $\| T \| \le \| \widehat{T} \|$.

Vielä on osoitettava kuvauksen $\widehat{T}$ yksikäsitteisyys. Olettakaamme, että S on jatkuva lineaarinen kuvaus $\overline{M} \to F$, jolle $Sz = Tz$ kaikilla $z \in M$. Koska kuvaus $S - \widehat{T}$ on jatkuva $\overline{M} \to F$, niin jokaisella $z \in \overline{M}$ on voimassa

$$Sz - \widehat{T}z = \lim_{n\to\infty} Sx_n - Tx_n = 0,$$

kunhan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ on jono, jolle $x_n \to z$ kun $n \to \infty$. Siispä $Sz = \widehat{T}z$ kaikilla $z \in \overline{M}$ ja kuvaus $\widehat{T}$ on siten yksikäsitteinen. $\square$

Lause 6.16 on eräs lineaarioperaattoreiden filosofian kulmakivistä. Tyypillisenä tämän filosofian konkreettisena sovelluksena tarkastellaan *jatkuvaa Fourier-muunnosta*:

6.17. **Esimerkki.** Jos $f \in L^1(\mathbb{R})$ on integroituva ja $k \in \mathbb{R}$, asetetaan

$$\text{(F)} \qquad \widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(funktion } f \text{ Fourier-muunnos).}$$

Koska $|f(x)e^{-ikx}| = |f(x)|$, kun $x, k \in \mathbb{R}$, on yllä mainittu integraali hyvin määritelty kaikilla $f \in L^1(\mathbb{R})$. Koska Fourier-sarjojen L^2-teoria on kaikkein toimivin (luku 5), haluaisimme määritellä Fourier-muunnoksen myös kaikille $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Ongelma: $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$, joten (F):ssa oleva integraali ei ole määritelty kaikilla $f \in L^2(\mathbb{R})$ (tarkista, että esimerkiksi funktio $f(x) = \min\{1, |x|^{-1}\}$ kuuluu avaruuteen $L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$). Mikä neuvoksi ?

Ratkaisu: Oletetaan aluksi, että $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Tällöin voidaan todistaa (ei kuitenkaan tehdä tässä) Parsevalin identiteetin vastine

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2\,\mathrm{d}k = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x, \qquad f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

Toisin sanoen, jos $M = L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$, niin kuvaus $T : f \to \widehat{f}$ on lineaarinen isometria $\| \cdot \|_2$–normissa. Lauseen 6.16 nojalla kuvaus T laajenee jatkuvaksi lineaarioperaattoriksi $\overline{M} \to L^2(\mathbb{R})$, missä lisäksi osoittautuu että $\overline{M} = L^2(\mathbb{R})$. Näin Fourier-muunnos $\widehat{f}$ saadaan määriteltyä kaikille $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Nimittäin, jos $f \in L^2(\mathbb{R})$, niin $f\,\chi_{[-n,n]} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ kaikilla $n > 0$. Lebesguen dominoidun konvergenssin lauseesta seuraa, että

$$\|f \cdot \chi_{[-n,n]} - f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\{x:|x|\geq n\}} |f(x)|^2 dx \to 0 \quad \text{kun } \to \infty,$$

joten siis $\overline{M} = L^2(\mathbb{R})$ (tarkista yksityiskohdat!).

Yo. määrittelyprosessi voidaan kuvata myös konkreettisemmin. Nimittäin, jos $f \in L^2(\mathbb{R})$, niin edellä dominoidun konvergenssin ja Lauseen 6.16 nojalla (yksikäsitteisyysosa!) saadaan myös

$$\widehat{f}(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} f(x) e^{-ikx}\,\mathrm{d}x \quad \text{kaikilla } f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Neumannin sarja

Jos E on Banachin avaruus, $T \in \mathscr{L}(E)$ ja on olemassa jatkuva käänteiskuvaus $T^{-1} \in \mathscr{L}(E)$, sanomme usein, että T on *kääntyvä* (isomorfismin sijasta). Seuraavalla sovelluksissa hyödyllisellä menetelmällä, eli niin sanotulla *Neumannin sarjalla*, pystymme useissa tilanteissa selvittämään annetun operaattorin kääntyvyyden ja jopa määräämään käänteisoperaattorin eksplisiittisesti. Merkitsemme avaruuden E identtistä operaattoria $I = id_E$, siis $Ix = x$ kaikilla $x \in E$. Edelleen operaattorin T iteraatteja merkitsemme $T^0 = I$, $T^k = T \circ T \circ \cdots \circ T$ (k kappaletta).

6.18. **Lause** (Neumannin sarja)**.** *Olkoon E Banachin avaruus ja $T \in \mathscr{L}(E)$ jatkuva lineaarikuvaus. Jos $\|T\| < 1$, niin operaattori $I - T$ on kääntyvä ja*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k = I + T + T^2 + \dots$$

missä yo. sarja on absoluuttisesti suppeneva avaruudessa $\mathscr{L}(E)$.

Todistus. Lauseen 6.7 nojalla $\|T^k\| \leq \|T\|^k$ jokaisella $k \in \mathbb{N}$. Nyt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|T^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k < \infty,$$

mikä suppenee, sillä $\|T\| < 1$ ja oikean puoleisin sarja on geometrinen sarja. Koska $\mathscr{L}(E)$ on Banachin avaruus (Lause 6.6), niin Lauseen 3.22 sivulla 40 nojalla sarja

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} T^k \in \mathscr{L}(E)$$

suppenee. Tarkastellaan nyt osasummia S_n. Koska

$$(I - T)S_n = I + T + \cdots + T^n - (T + T^2 + \cdots + T^{n+1}) = I - T^{n+1} = S_n(I - T),$$

niin

$$\| (I-T)S_n - I \| \leq \| T \|^{n+1} \to 0 \quad \text{kun } n \to \infty$$

eli rajalla $(I-T)S = I$. Vastaavasti nähdään, että $S(I-T) = I$, eli $I - T$ on bijektio ja S on operaattorin $I - T$ käänteisoperaattori. (Huomaa, että tulokuvaukset $U \mapsto UV$ ja $U \mapsto VU$ ovat jatkuvia Lauseen 6.7 nojalla, kun V on kiinteä jatkuva operaattori.) □

6.19. **Esimerkki.** Palaamme jo johdantoluvussa sekä Banachin kiintopistelauseen yhteydessä tarkastelemaamme esimerkkiin (kts. Esimerkki 3.40 sivulla 54) eli tarkastelemme integraaliyhtälöä

$$(*) \qquad f(x) + \int_0^1 K(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t = g(x), \quad x \in [0,1],$$

missä $K \in C([0,1] \times [0,1])$ on jatkuva ja $\| K \|_\infty < 1$. Osoitamme nyt käyttämällä Neumannin sarjaa, että jos $g \in C(0{,}1)$, niin tällöin yhtälöllä $(*)$ on yksikäsitteinen ratkaisu $f \in C(0{,}1)$. Asetetaan

$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [0,1],\ f \in C(0,1).$$

Olemme jo osoittaneet, että $T \in \mathscr{L}(C(0,1))$ ja $\| T \| \leq \| K \|_\infty < 1$. Nyt voimme soveltaa Neumannin sarjaa operaattoriin $-T$, sillä $\| -T \| = \| T \| < 1$. Siispä operaattori $I + T = I - (-T)$ on kääntyvä, joten kirjoittamalla yhtälö $(*)$ operaattorimuodossa ja käyttämällä operaattorin $I + T$ kääntyvyyttä sekä Neumannin sarjaa saamme

$$(I+T)f = g \iff f = (I+T)^{-1} g = \sum_{k=0}^{\infty} (-T)^k g.$$

Sivutuotteena konstruoimme ratkaisun $f \in C(0,1)$ sarjana. (Saatua sarjaa kannattaa verrata Banachin kiintopistelauseen antamaan konstruktioon, vrt. Esimerkki 3.40.)

Koska kääntyvyys on (oleellisesti) algebrallinen ominaisuus, niin kääntyvät operaattorit muodostavat ryhmän kaikkien jatkuvien operaattoreiden joukossa. Tämä seuraa seuraavasta huomiosta.

Huomautus. Merkitsemme $Inv(\mathcal{L}(E)) = \{T \in \mathcal{L}(E) : T \text{ kääntyvä}\}$. Jos $S, T \in Inv(\mathcal{L}(E))$ niin yhdistetty kuvaus ST on kääntyvä ja $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$, koska $STT^{-1}S^{-1} = SS^{-1} = I$ ja $T^{-1}S^{-1}ST = T^{-1}T = I$. Lisäksi, jos $S \in Inv(\mathcal{L}(E))$ niin myös S^{-1} on kääntyvä ja $(S^{-1})^{-1} = S$.

Neumannin sarjan avulla voimme myös tarkastella, minkälainen joukko kääntyvien operaattereiden joukko on topologisessa mielessä.

6.20. **Lause.** *Olkoon E Banachin avaruus. Tällöin*
(i) jos $T \in \mathscr{L}(E)$ on kääntyvä ja $S \in \mathscr{L}(E)$ toteuttaa arvion $\| S \| < \| T^{-1} \|^{-1}$, niin tällöin $T - S$ on kääntyvä.
(ii) kääntyvien operaattorien joukko $Inv(\mathcal{L}(E)) = \{ T \in \mathscr{L}(E) : T$ kääntyvä $\}$ muodostaa avoimen ryhmän avaruudessa $\mathscr{L}(E)$ operaattorintulon suhteen.

Todistus. Koska $T \in \mathscr{L}(E)$ on kääntyvä, niin erotus $T - S$ voidaan esittää tulona $T - S = T(I - T^{-1}S)$. Oletuksen ja Lauseen 6.18 nojalla $\| T^{-1}S \| \leq \| T^{-1} \| \| S \| < 1$, joten Neumannin sarjan nojalla operaattori $I - T^{-1}S$ on kääntyvä. Siispä edellisen huomautuksen nojalla myös tulo-operaattori $T(I - T^{-1}S) = T - S$ on kääntyvä. Tämä osoittaa väitteen (i). Kohta (ii) seuraa nyt edellisestä huomiosta, että kääntyvät operaattorit muodostavat ryhmän ja kohdasta (i), jonka nojalla kääntyvien operaattorien joukko on avoin. □

Harjoitustehtäviä

6:1 Anna esimerkki jatkuvista lineaarikuvauksista $S, T \in \mathcal{L}(E)$ (sopivassa Banachin avaruudessa E), joille $\|ST\| < \|S\| \, \|T\|$. Voitko valita jopa $S = T$?

6:2 Määritellään kuvaus $T : C(0,1) \to \ell^\infty$ kaavalla

$$Tf = (f(1/k))_{k \in \mathbf{N}} = (f(1), f(1/2), f(1/3), \ldots), \quad f \in C(0,1).$$

Näytä, että T on rajoitettu lineaarikuvaus $C(0,1) \to \ell^\infty$ (sup-normi molemmissa), ja määrää sen normi $\|T\|$. Onko T injektio? Entä surjektio?

6:3 Olkoon $T(f) = f'$ (heikko derivaatta) kun $f \in H^1(0,1)$. Näytä, että $T \in \mathcal{L}(H^1(0,1), L^2(0,1))$ ja määrää operaattorinormi $\|T\|$. [*Vihje:* Etsi funktioita $f_n \in H^1(0,1)$ joille $\|f_n'\|_2 = 1$ ja $\|f_n\|_2 < \frac{1}{n}$ kun $n \in \mathbf{N}$.]

6:4 Varustetaan

$$C^\infty([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbf{R} | f \text{ äärettömän monta kertaa derivoituva}\}$$

sup-normilla $\|f\|_\infty = \sup\{|f(s)| : s \in [0,1]\}$. Totea, että derivaattakuvaus $D : C^\infty([0,1]) \to C^\infty([0,1])$, $D(f) = f'$, on lineaarinen, mutta ei jatkuva.

6:5 Olkoon $T : \ell^1 \to \mathbf{K}$ lineaarikuvaus $T(x_k) = \sum_{k=1}^\infty x_k$. Näytä:
(i) T on jatkuva $(\ell^1, \| \cdot \|_1) \to \mathbf{K}$,
(ii) T ei ole jatkuva $(\ell^1, \| \cdot \|_\infty) \to \mathbf{K}$.

6:6 Olkoon $1 \leq p < \infty$. Etsi sellainen jatkuva lineaarinen injektio $S : \ell^p \to \ell^p$, jonka *kuva* $\mathrm{Im}(S) = \{Sx : x \in \ell^p\}$ ei ole suljettu avaruudessa ℓ^p. [*Vihje.* Riittää etsiä haluttu esimerkki diagonaalioperaattoreiden $(x_k) \mapsto (a_k x_k)$ joukosta, missä (a_k) on sopiva rajoitettu skalaarijono, ja muistaa HT 4:4]

6:7 Olkoon E ja F normiavaruuksia, sekä $T : E \to F$ lineaarikuvaus. Oletamme, että $(Tx_n) \subset F$ on rajoitettu jono aina kun jonolle $(x_n) \subset E$ on voimassa $\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{0}$. Näytä, että T on jatkuva (eli rajoitettu).

6:8 Olkoon $T : \ell^1 \to \ell^1$ lineaarikuvaus $T(x_k) = (\frac{k}{k+1}x_k)$, kun $x = (x_k) \in \ell^1$. Tutki, onko olemassa $x \in \ell^1$ jolle $\|x\|_1 = 1$ ja $\|Tx\|_1 = \|T\|$.

6:9 Olkoon E Banachin avaruus, ja $T \in \mathcal{L}(E)$ operaattori, jolle $\|T\| < 1$. Johda Neumannin sarjasta lähtien virhearvio

$$\|(I+T)^{-1} - I + T\| \leq \frac{\|T\|^2}{1 - \|T\|}.$$

6:10 Olkoon H Hilbertin avaruus ja $S \in \mathcal{L}(H)$ sellainen lineaarikuvaus, että

$$|(Sx|x)| \geq c\|x\|^2, \quad x \in H,$$

missä vakio $c > 0$. Näytä, että S on kääntyvä operaattori, ja $\|S^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$. [*Muistutus:* surjektiivisuutta varten tutki vektoreita $x \in Im(S)^\perp$.]

6:11 Olkoon E Banachin avaruus, $T \in \mathcal{L}(E)$ jatkuva lineaarinen kuvaus ja $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ sellainen luku, että $\|T^n\| < |\lambda|^n$ jollakin $n \in \mathbb{N}$. Osoita Neumannin sarjan avulla, että $\lambda I - T$ on kääntyvä operaattori. [*Vihje:* pyri kirjoittamaan $\lambda^n I - T^n = (\lambda I - T)S = S(\lambda I - T)$ sopivalla operaattorilla $S \in \mathcal{L}(E)$.]

6:12 Olkoon $V : C(0,1) \to C(0,1)$ *Volterra operaattori*

$$(Vf)(t) = \int_0^t f(s)ds, \quad t \in [0,1], \; f \in C(0,1).$$

Näytä induktiolla, että $\|V^n\| \leq \frac{1}{n!}$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$. Päättele edellisestä tehtävästä, että Volterran integraaliyhtälöllä

$$\lambda f(t) - \int_0^t f(s)ds = g(t), \quad t \in [0,1],$$

on yksikäsitteinen ratkaisu $f \in C(0,1)$ kaikilla annetuilla $g \in C(0,1)$ ja skalaareilla $\lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq 0$.

6:13 Osoita, että Volterra integraaliyhtälöllä

$$\lambda f(t) - \int_0^t f(s)ds = g(t), \quad t \in [0,1],$$

on yksikäsitteinen jatkuva ratkaisu $f \in C(0,1)$ kaikilla annetuilla $g \in C(0,1)$ ja skalaareilla $\lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq 0$. [*Vihje.* Olkoon $(Vf)(t) = \int_0^t f(s)ds$ kun $t \in [0,1]$ ja $f \in C(0,1)$. Osoita, että $\lambda^n I - V^n$ on bijektio jos $n \in \mathbf{N}$ on riittävän iso, käyttämällä Neumannin sarjaa ja arviota $\|V^n\| \leq \frac{1}{n!}$ (HT 4/9). Kaavasta $\lambda^n I - V^n = (\lambda^{n-1}I + \lambda^{n-2}V + \ldots + \lambda V^{n-2} + V^{n-1})(\lambda I - V)$ seuraa, että $\lambda I - V$ on bijektio.]

6:14 (*Heisenbergin epämääräisyysperiaate lineaarikuvauksille*) Olkoot A ja B lineaarikuvauksia $\ell^2 \to \ell^2$, joille $AB - BA = I_{\ell^2}$ (identtinen kuvaus). Todista, että silloin A ja B eivät molemmat voi olla rajoitettuja operaattoreita. [*Idea.* Verifioi ensin induktiolla, että

$$AB^n - B^n A = nB^{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Jos olisi $A, B \in \mathcal{L}(\ell^2)$, niin johda tästä ristiriita riittävän suurilla n.]

7. Tasaisen rajoituksen periaate

Täydellisyydestä puristetaan maksimaalinen hyöty seuraavan *Bairen lauseen* avulla. Bairen lause on keskeinen todistettaessa kahta funktionaalianalyysin "kolmesta suuresta perustuloksesta", nimittäin *tasaisen rajoituksen periaate* (tämä luku) sekä *avoimen kuvauksen lause* (luku 8). Kolmas näistä suurista perustuloksista (*Hahn–Banachin lause*) tulee dualiteetin yhteydessä luvussa 9, ja se *ei* perustu täydellisyyteen. Koska Bairen lauseella on lukuisia muitakin sovelluksia, tarkastelemme sitä yleisissä metrisissä avaruuksissa.

Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Palautetaan mieliin: pistejono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ on Cauchyn jono, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, jolle

$$d(x_p, x_q) < \varepsilon, \qquad \text{aina kun } p, q \geq n_\varepsilon.$$

Aivan kuten normiavaruuksienkin tapauksessa, metrinen avaruus (X, d) on *täydellinen*, jos sen jokainen Cauchyn jono $(x_n) \subset X$ suppenee: tosin sanoen, on olemassa $z \in X$, jolle $\lim_n d(x_n, z) = 0$.

Bairen lause käsittelee avoimia tiheitä osajoukkoja $V \subset X$. Esimerkkejä tällaisista ovat $V = \mathbb{R}^2 \backslash ([0, 1] \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^2$, tai vaikkapa $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

Huomautus. Osajoukko $V \subset X$ on tiheä $\iff$ $\overline{V} = X$ $\iff$ $B(x, r) \cap V \neq \emptyset$ kaikilla $x \in X$, $r > 0$ $\iff$ $W \cap V \neq \emptyset$ kaikilla avoimilla $\emptyset \neq W \subset X$.

Seuraava topologisluonteinen lause on nk. *Bairen lause* tai *Bairen kategorialause*, jonka esitti ensimmäisenä *Rene Baire* (1874–1932).

7.1. **Lause** (Bairen lause). *Olkoon (X, d) täydellinen metrinen avaruus. Jos $V_j \subset X$, $j \in \mathbb{N}$, on* ***numeroituva*** *kokoelma avoimia tiheitä osajoukkoja, niin*

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} V_j \text{ on } \textbf{\textit{tiheä}} \text{ avaruudessa } X.$$

Erityisesti siis $\bigcap_{j=1}^{\infty} V_j \neq \emptyset$.

Todistus. (Kts. Väisälä: Topologia II, 10.8) *Todistusidea:* on osoitettava, että

$$B(x, r) \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n) \neq \emptyset$$

kaikilla $x \in X$ ja $r > 0$.

Koska V_1 on tiheä löytyy $y_1 \in V_1 \cap B(x, r)$. Joukko $V_1 \cap B(x, r)$ on avoin, joten on olemassa sellainen $0 < r_1 < 1$, että sulkeuma $\overline{B(y_1, r_1)} \subset V_1 \cap B(x, r)$. Oletuksen nojalla V_2 on tiheä, joten löytyy $y_2 \in V_2 \cap B(y_1, r_1)$. Koska oikeanpuoleinen leikkausjoukko on avoin niin on olemassa sellainen $0 < r_2 < 1/2$, että $\overline{B(y_2, r_2)} \subset V_2 \cap B(y_1, r_1)$.

Jatkamalla tätä konstruktiota saadaan pistejono $(y_n) \subset X$, jolle

$$\overline{B(y_n, r_n)} \subset V_n \cap B(y_{n-1}, r_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

missä $0 < r_n < 1/n$. Koska $y_m \in B(y_n, r_n)$ kaikilla $m \geq n$ konstruktion perustella, eli $d(y_m, y_n) < \frac{1}{n}$ kaikilla $m \geq n$, niin (y_n) on Cauchyn-jono. Koska (X, d) on täydellinen, on siis olemassa $z = \lim_n y_n$. Koska $y_m \in \overline{B(y_n, r_n)}$ kaikilla $m \geq n$, niin antamalla $m \to \infty$ pätee myös rajalla että $z \in \overline{B(y_n, r_n)} \subset V_n \cap B(x, r)$ kaikilla n. Näin siis piste $z \in B(x, r) \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n)$. □

Huomautus. Bairen lause ei päde ylinumeroituville perheille: joukko $V_t = \mathbb{R} \setminus \{t\}$ on avoin ja tiheä $\mathbb{R}$:ssä kaikilla $t \in \mathbb{R}$, mutta $\cap_{t \in \mathbb{R}} V_t = \emptyset$.

Bairen lause tulee usein käyttöön seuraavassa (yhtäpitävässä) muodossa:

7.2. **Seuraus.** *Olkoon (X, d) täydellinen metrinen avaruus, ja*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

missä $F_n \subset X$ on suljettu *kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin on olemassa sellainen indeksi $n_0 \in \mathbb{N}$, että joukko F_{n_0} sisältää avoimen pallon $B(x_0, r_0)$ sopivilla $x_0 \in X$ ja $r_0 > 0$ (erityisesti* sisus $\operatorname{int}(F_{n_0}) \neq \emptyset$*).*

Todistus. Olkoon $V_n = X \setminus F_n$ kun $n \in \mathbb{N}$, jolloin $V_n \subset X$ on avoin kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tehdään vastaoletus ja oletetaan, ettei joukko F_n sisällä avointa palloa $B(x, r)$ millään $n \in \mathbb{N}$, eli siis

$$V_n \cap B(x, r) \neq \emptyset \quad \text{kaikilla } x \in X,\ r > 0 \text{ ja } n \in \mathbb{N}.$$

Siten V_n on tiheä ja avoin jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Nyt Bairen lause mukaan leikkaus $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ on tiheä avaruudessa X. Erityisesti siis löytyy sellainen alkio $x \in X$, että

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus F_n) = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

(Oikeanpuoleisin yhtäsuuruus tulee de Morganin laista.) Toisaalta, yo. seikka on ristiriidassa oletuksen $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ kanssa. Siispä vastaoletus on väärä ja väite seuraa. □

Muotoilemme aluksi ensimmäisen suurista lauseista ja todistamme sen soveltamalla Bairen lausetta.

7.3. **Lause** (Banach–Steinhausin lause eli tasaisen rajoituksen periaate)**.** *Olkoon E Banachin avaruus, F normiavaruus ja $\{T_\alpha\}_{\alpha \in J}$ kokoelma jatkuvia lineaarikuvauksia $T_\alpha \colon E \to F$ (missä indeksijoukko $J \neq \emptyset$ on mielivaltainen). Tällöin on kaksi (toisensa poissulkevaa) vaihtoehtoa: joko*

(1) on olemassa sellainen luku $M < \infty$, että

$$\| T_\alpha \| \leq M \quad \textit{jokaisella } \alpha \in J,$$

tai

(2) on olemassa kiinteä vektori $x \in E$, jolle

$$\sup_{\alpha \in J} \| T_\alpha x \| = \infty.$$

Erityisesti, jos $M(x) := \sup_{\alpha \in J} \| T_\alpha x \| < \infty$ jokaisella $x \in E$, niin

$$\sup_{\alpha \in J} \| T_\alpha \| = \sup_{\alpha \in J} (\sup_{x \in B_E} \| T_\alpha x \|) < \infty.$$

Huomautus. Jos väite (1) ei toteudu, niin a priori on olemassa *vektorit* $x_\alpha \in E$ $(\alpha \in J)$, joille $\| x_\alpha \| = 1$ ja $\sup_\alpha \| T_\alpha x_\alpha \| = \infty$. Väite (2) sanookin, että voidaan valita *yksi* ja *sama* vektori $x \in E$ kaikilla $\alpha \in J$.

Ennen kuin todistamme Banach–Steinhausin lauseen, tarkastelemme hieman sen käyttöä.

Ensimmäisenä tasaisen rajoituksen periaatteen sovelluksena osoitamme vahvan parannuksen pisteittäisen rajaoperaattorin jatkuvuudelle (katso Esimerkki 6.5 sivulla 120 ja Lause 6.6 sivulla 121).

7.4. **Lause.** *Olkoon E Banachin avaruus, F normiavaruus ja $(T_n) \subset \mathscr{L}(E, F)$ sellainen jono jatkuvia lineaarikuvauksia, että $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$ on olemassa kaikilla $x \in E$. Tällöin $T \in \mathscr{L}(E, F)$, eli T on jatkuva lineaarikuvaus.*

Todistus. Kuvauksen T lineaarisuus seuraa Lauseesta 6.2 sivulla 119. Oletuksen mukaan jono $(T_n x)$ suppenee avaruudessa F jokaisella $x \in E$. Siispä jono $(T_n x)$ on Cauchyn jono ja siten rajoitettu, vrt. Lause 3.2 sivulla 31. Näin

$$M(x) \equiv \sup_{n \in \mathbb{N}} \| T_n x \| < \infty \qquad \text{kaikilla } x \in E.$$

Siten Banach–Steinhausin Lauseen 7.3 nojalla löytyy sellainen $M < \infty$, että $\| T_n \| \leq M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Saadaan

$$\| Tx \| = \lim_{n\to\infty} \| T_n x \| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \| T_n \| \cdot \| x \| \leq M \| x \|$$

kun $x \in E$, joten $\| T \| \leq M$. □

Lähtöavaruuden täydellisyys on edellä olennainen ehto:

7.5. **Esimerkki.** Esimerkissä 6.3 sivulla 119

$$\mathcal{P} = \{ \, x : \; x \text{ on } \mathbb{R}\text{-kertoiminen polynomi} \, \}, \qquad \| x \|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |x(t)|,$$

$$T_n x = n\big(x(1) - x(1 - \tfrac{1}{n})\big), \quad \text{kun } x \in \mathcal{P},$$

Esimerkissä 6.3 näytettiin, että $T_n \in \mathscr{L}(\mathcal{P},\mathbb{R})$ ja $T_n x \to Tx$ kun $n \to \infty$, missä $Tx = x'(1)$, kun $x \in \mathcal{P}$. Lisäksi tällöin $T \notin \mathscr{L}(\mathcal{P},\mathbb{R})$, eli T ei ole jatkuva. Johtopäätökset:

(i) $(\mathcal{P}, \|\cdot\|)$ ei ole täydellinen (tämän seikan voisi toki todistaa suoraan, vrt. Huomautusta 3.10),

(ii) Oletus, että E on Banachin avaruus on *olennainen* Lauseessa 7.4.

Koska olemme saaneet jo hieman esimakua Banach–Steinhausin lauseen tehokkuudesta ja voimasta, niin siirrymme lauseen todistukseen.

Banach–Steinhausin lauseen todistus. Olkoon

$$F(n,\alpha) := \{\, x \in E : \ \| T_\alpha x \| \le n \,\},$$

kun $\alpha \in J$, $n \in \mathbb{N}$. Kuvaus $f_\alpha \colon x \mapsto \| T_\alpha x \|$ on kahden jatkuvan kuvauksen yhdisteenä jatkuva. Siispä $F(n,\alpha) = f_\alpha^{-1}([0,n]) \subset E$ on suljettu joukko jokaisella $\alpha \in J$ ja jokaisella $n \in \mathbb{N}$, sillä joukko $[0,n] \subset \mathbb{R}$ on suljettu ja f_α on jatkuva (vrt. Väisälä: Topologia I, 6.13). Tällöin myös leikkausjoukko

$$F_n := \bigcap_{\alpha \in J} F(n,\alpha) \subset E \text{ on suljettu,}$$

sillä mielivaltainen leikkaus suljetuista joukoista on edelleen suljettu.

Oletetaan nyt, että vaihtoehto (2) *ei* päde. Väitteen todistamiseksi on siis osoitettava, että tällöin vaihtoehto (1) on välttämättä oltava voimassa (tässä askeleessa on Banach-Steinhausin lauseen epätriviaali osa).

Olkoon tätä varten $x \in E$ mielivaltainen. Koska oletimme, että vaihtoehto (2) ei päde, niin

$$\sup_{\alpha \in J} \| T_\alpha x \| < \infty.$$

Siten löytyy sellainen $n \in \mathbb{N}$, että

$$\sup_{\alpha \in J} \| T_\alpha x \| \le n.$$

Siispä $x \in F(n,\alpha)$ jokaisella $\alpha \in J$ eli $x \in F_n$. Tästä seuraa heti, että

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Koska E on Banachin avaruus, niin Seurauksen 7.2 nojalla löytyy sellainen $N \in \mathbb{N}$ ja sellainen avoin pallo $B(x_0, r_0)$, että

$$B(x_0, r_0) \subset F_N. \tag{7.6}$$

Osoitamme lopuksi, että ehdosta (7.6) seuraa, että $\| T_\alpha x \| \le 2N/r_0$ jokaisella $\alpha \in J$ ja jokaisella $x \in B_E$. Olkoon $x \in E$ ja $\| x \| < 1$. Tällöin

$x_0 + r_0 x \in B(x_0, r_0)$, joten $\| T_\alpha(x_0 + r_0 x) \| \le N$. Kuvauksen T_α lineaarisuuden nojalla saadaan

$$\begin{aligned} \| T_\alpha x \| &= \frac{1}{r_0} \| T_\alpha(r_0 x) \| = \frac{1}{r_0} \| T_\alpha(x_0 + r_0 x) - T_\alpha(x_0) \| \\ &\le \frac{1}{r_0} \big(\| T_\alpha(x_0 + r_0 x) \| + \| T_\alpha(x_0) \| \big) \le \frac{2N}{r_0} =: M \end{aligned}$$

Siis $\| T_\alpha \| \le M$ jokaisella $\alpha \in J$. □

7.7. **Esimerkki.** Olkoon $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ sellainen annettu lukujono, että reaalinen sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \quad \text{suppenee } \mathbb{R} : \text{ssä } \textit{kaikilla} \text{ jonoilla } (x_k) \in \ell^1. \tag{7.8}$$

Havaitaan aluksi, että jos $(a_k) \in \ell^\infty$ on rajoitettu jono, niin (7.8) toteutuu:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\, |x_k| \le \sup_{j \in \mathbb{N}} |a_j| \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty, \quad \text{kun} \quad (x_k) \in \ell^1.$$

Siispä sarja $\sum a_k x_k$ suppenee (jopa itseisesti), kun jono $(x_k) \in \ell^1$. Herää kysymys, onko olemassa muita lukujonoja (a_k), joille (7.8) on voimassa?

Osoitamme käänteisen suunnan eli jos lukujono (a_k) toteuttaa ehdon (7.8), niin $(a_k) \in \ell^\infty$. (Tämä esimerkki liittyy läheisesti luvun 9 duaalisuusteoriaan.)

Todistus. Asetetaan kaikilla $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \quad \text{kun} \quad x = (x_k) \in \ell^1.$$

Tällöin f_n on lineaarinen $\ell^1 \to \mathbb{R}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= \Big| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \Big| \le \sum_{j=1}^{n} |a_j|\, |x_j| \le \max_{k=1,\dots,n} |a_k| \sum_{j=1}^{n} |x_j| \\ &\le \max_{k=1,\dots,n} |a_k| \cdot \| x \|_1 < \infty \end{aligned}$$

kaikilla $x = (x_k) \in \ell^1$ ja kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Siis f_n on jatkuva $\ell^1 \to \mathbb{R}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Oletuksen (7.8) nojalla on olemassa raja-arvo

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j =: f(x)$$

kaikilla $x = (x_k) \in \ell^1$. Koska ℓ^1 on Banachin avaruus, niin Lauseen 7.4 perusteella $f \in \mathscr{L}(\ell^1, \mathbb{R})$, eli f on jatkuva. Tällöin siis

$$\Big| \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \Big| = |f(x)| \le \|f\| \| x \|_1 \quad \text{kaikilla } x = (x_k) \in \ell^1.$$

Sijoittamalla vektorit

$$x = e_k = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{k:nnes}, 0, 0, \dots) \in \ell^1, \quad k \in \mathbb{N},$$

kuvaukseen f havaitaan, että

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k| = \sup_k |f(e_k)| \le \sup_k \|f\| \| e_k \|_1 = \|f\| < \infty,$$

joten $(a_k) \in \ell^\infty$. □

Banach–Steinhausin lauseen sovelluksia Fourier-sarjoihin

Luvussa 5 osoitimme, että jokaisella L^2-funktiolla f vastaava Fourier-sarja $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx}$ suppenee ainakin L^2-normin mielessä, sekä Fejérin lauseen 5.4 nojalla jatkuvalla funktiolla f Fourier-osasummien *keskiarvo* suppenee tasaisesti kohti f:ää. Lisäksi muistamme, että C^1-funktioilla f Fourier-sarja suppenee pisteittäin (Lause 5.9) kohti f:ää. Edellisten tietojen valossa seuraava tulos on yllättävä (tämä Banach–Steinhausin lauseen sovellus oli ainakin yllätys löytöaikanaan):

7.9. **Lause.** *On olemassa* jatkuva *2π-jaksollinen funktio $f \in C(0, 2\pi)$, jonka Fourier-sarja*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx}$$

hajaantuu *pisteessä $x = 0$.*

Todistus. Olkoon

$$s_n(f; x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx}, \quad x \in [0, 2\pi],$$

n:s Fourier osasumma. Näytämme, että on olemassa sellainen jatkuva funktio $f \in C(0, 2\pi)$, jolla $f(0) = f(2\pi)$ ja

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |s_n(f; 0)| = \infty,$$

mistä erityisesti seuraa, että funktion f Fourier-sarja hajaantuu, kun $x = 0$. Edelleen tästä seuraa, että $S_n(f; 0) \not\to f(0)$, kun $n \to \infty$.

Konstruktiossa tarvitaan myös joitakin luvun 5 tietoja. Lemman 5.2 sivulla 91 mukaan

$$s_n(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_n(x - t) \, \mathrm{d}t = (D_n * f)(x),$$

missä D_n on Dirichletin ydin

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \frac{\sin\big((n + \frac{1}{2})x\big)}{\sin(\frac{x}{2})}. \tag{7.10}$$

Asetetaan

$$\Lambda_n(f) = s_n(f;0) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)D_n(-t)\,\mathrm{d}t \tag{7.11}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin kuvaus Λ_n on lineaarinen $C(0,2\pi) \to \mathbb{C}$, ja

$$\begin{aligned} |\Lambda_n(f)| &= \frac{1}{2\pi}\Big|\int_0^{2\pi} f(t)D_n(-t)\,\mathrm{d}t\Big| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)||D_n(-t)|\,\mathrm{d}t \\ &\overset{D_n(-t)=D_n(t)}{\le} \frac{\| f \|_\infty}{2\pi}\int_0^{2\pi}|D_n(t)|\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

kun $f \in C(0,2\pi)$, joten $\| \Lambda_n \| \le (2\pi)^{-1}\| D_n \|_1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Väitämme, että edellinen arvio on itse asiassa yhtäsuuruus, eli myös

$$\| \Lambda_n \| \ge \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|D_n(t)|\,\mathrm{d}t \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N}. \tag{7.12}$$

Lisäksi väitämme, että

$$\lim_{n\to\infty}\| D_n \|_1 = \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}|D_n(t)|\,\mathrm{d}t = \infty. \tag{7.13}$$

(Yhdessä kaavan $\| \Lambda_n \| = (2\pi)^{-1}\| D_n \|_1$ ja tasaisen rajoituksen periaatteen kanssa tämä osoittaa väitteen, kuten tulemme pian huomaamaan.) Osoitetaan ensin jälkimmäinen raja-väite (7.13), sillä sen argumentti on suoraviivaisempi. Ideana on soveltaa Analyysista tuttua arviota $|\sin(\frac{t}{2})| < \frac{t}{2} < t$ kun $t > 0$, esitykseen (7.10). Suoraan arvioimalla ja muuttujanvaihdon $s = (n+\frac{1}{2})t$ avulla saamme silloin

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi}|D_n(t)|\,\mathrm{d}t &\ge \int_0^{2\pi}\frac{|\sin((n+\frac{1}{2})t)|}{t}\,\mathrm{d}t \ge \int_0^{\pi}|\sin((n+\tfrac{1}{2})t)|\frac{dt}{t} \\ &= \int_0^{(n+1/2)\pi}|\sin s|\frac{\mathrm{d}s}{s} > \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin s|\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \longrightarrow \infty, \quad \text{kun} \quad n \to \infty \end{aligned}$$

(koska harmoninen sarja $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ hajaantuu). Edellä tunnetusti $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t = 2$ kaikilla k.

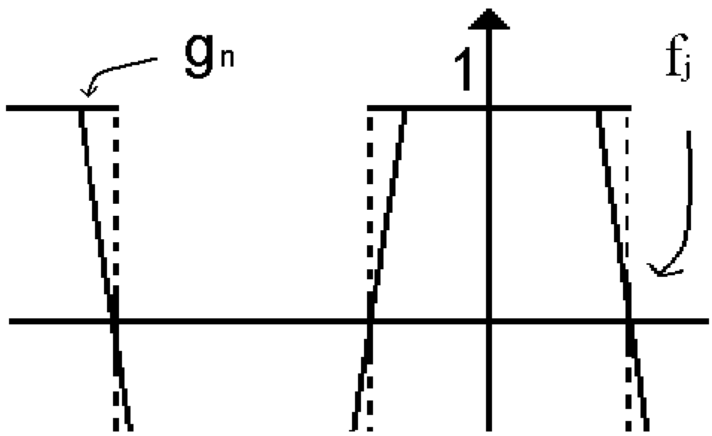
Osoitamme seuraavaksi epäyhtälön (7.12). Olkoon g_n funktio

$$g_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{kun } D_n(-t) \ge 0 \\ -1, & \text{kun } D_n(-t) < 0 \end{cases}$$

jolloin siis $g_n(t)D_n(-t) = |D_n(-t)|$ kun $t \in [0,2\pi]$. Tällöin on olemassa jono *jatkuvia* 2π-periodisia funktioita $(f_j) \subset C(0,2\pi)$, joille

$$-1 \le f_j(t) \le 1 \quad \text{ja} \quad \lim_{j\to\infty} f_j(t) = g_n(t) \text{ pisteittäin kaikilla } t \in [0,2\pi].$$

Tämä nähdään vertaamalla Lauseen 5.6 todistukseen tai tekemällä suora päättely. (Itse asiassa, $g_n = \chi_{F_n} - \chi_{F_n^c}$, missä funktion D_n jatkuvuuden nojalla joukko $F_n = \{t \in [0, 2\pi] : D_n(-t) \geq 0\}$ on suljettu. Haluttu funktiojono (f_j) on siis konstruoitu jo Lauseen 5.6 osissa (1) ja (2).)



Koska $\| f_j \|_\infty \leq 1$ jokaisella $j \in \mathbb{N}$, niin Lebesguen dominoidun suppenemisen lauseen avulla (majoranttina funktiota $|D_n| \in L^1$) saadaan (7.11):sta

$$\begin{aligned}\| \Lambda_n \| &\geq \sup_{j\in\mathbb{N}} \Lambda_n(f_j) \geq \lim_{j\to\infty} \Lambda_n(f_j) = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_j(t) D_n(-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_n(t) D_n(-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D_n(-t)|\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Siis epäyhtälö (7.12) pätee, ja siten $\| \Lambda_n \| \to \infty$, kun $n \to \infty$. Nyt Banach–Steinhausin lauseen 7.3 vaihtoehto (2) jää jäljelle, koska suljimme juuri vaihtoehdon (1) pois. Siten on olemassa jatkuva 2π-jaksollinen $f \in C(0, 2\pi)$, jolle

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\Lambda_n(f)| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |s_n(f; 0)| = \infty,$$

mikä osoittaa väitteen. [*Kommentti:* Tarkasti ottaen, Lause 7.3 sovellettiin edellä kuvausten Λ_n rajoittumiin $\widetilde{\Lambda}_n$ suljettuun vektorialiavaruuteen

$$C_{2\pi}(0, 2\pi) = \{f \in C(0, 2\pi) : f(0) = f(2\pi)\} \subset C(0, 2\pi).$$

Tämä on mahdollista, koska normin $\|\Lambda_n\|$ arvioinnissa kuvaukset $f_j \in C_{2\pi}(0, 2\pi)$ kaikilla j, joten $\|\widetilde{\Lambda}_n\| = \|\Lambda_n\|$ kaikilla n.] $\square$

Lisätietoja Fourier-sarjoista: - Du-Bois–Reymond (1876): on olemassa *konkreettinen* jatkuva 2π -periodinen f, jonka vastaava Fourier-sarja $\sum \widehat{f}(k) e^{ikx}$ hajaantuu pisteessä $x = 0$ (kts. [Körner: Fourier Analysis, luku 18]).

- Banach ja Steinhaus (1927): Lauseessa 7.9 oleva *ei-konstruktiivinen* esimerkki.

- Kolmogorov (1926): on olemassa sellainen integroituva $f \in L^1(0, 2\pi)$, jonka Fourier-sarja hajaantuu *joka* pisteessä $x \in [0, 2\pi]$!

Muistamme, että jos $f \in L^2$, niin funktion f Fourier-sarja suppenee L^2-normin mielessä. *Kysymys:* Onko sama voimassa avaruuden L^1 funktioille ?? Vastaamme myös tähän negatiivisesti Banach–Steinhausin lauseen avulla.

7.14. **Lause.** *On olemassa sellainen $f \in L^1(0, 2\pi)$, että*

$$\Big\| f - \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{ikx} \Big\|_{L^1} \nrightarrow 0, \quad \textit{kun } n \to \infty.$$

Todistus. Määritellään $T_n \colon L^1(0, 2\pi) \to L^1(0, 2\pi)$ asettamalla

$$(T_n f)(x) = s_n(f; x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{ikx} = (D_n * f)(x),$$

kun $f \in L^1(0, 2\pi)$, $x \in [0, 2\pi]$ ja $n \in \mathbb{N}$. Kuvaus T_n on lineaarinen, koska Fourier-kerroin $f \mapsto \widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} \, dt$ on lineaarinen kaikilla $k \in \mathbb{Z}$. Selvästi

$$|\widehat{f}(k)| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)||e^{ikt}| \, dt = \frac{1}{2\pi} \| f \|_1,$$

kun $f \in L^1(0, 2\pi)$ ja $k \in \mathbb{Z}$. Tästä saamme avaruuden L^1 kolmioepäyhtälön avulla trigonometrisen polynomin $T_n f$ normille yläarvion

$$\| T_n f \|_1 = \Big\| \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{ikx} \Big\|_1 \le \sum_{k=-n}^{n} |\widehat{f}(k)| \, \| e^{ikx} \|_{L^1} \le (2n+1) \| f \|_1$$

kaikilla $f \in L^1(0, 2\pi)$, joten T_n: $L^1(0, 2\pi) \to L^1(0, 2\pi)$ on jatkuva kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Palautammme vielä mieliin Fejérin ytimet (kts. Lemma 5.3 sivulla 92) luvusta 5:

$$K_j(x) = \frac{1}{j+1} \sum_{k=0}^{j} D_k(x).$$

Olkoon $n \in \mathbb{N}$ kiinteä. Tiedämme sivulla 92 olevan Lemman 5.3 sekä Fejérin Lauseen 5.4 (sivulla 93) perusteella, että $T_n(K_j) = D_n * K_j = K_j * D_n \to D_n$ tasaisesti välillä $[0, 2\pi]$ kun $j \to \infty$ (tässä Fejérin lause on sovellettu jatkuvaan funktioon D_n). Koska

$$\|T_n(K_j) - D_n\|_1 \le 2\pi \|T_n(K_j) - D_n\|_\infty \to 0 \quad \text{kun } j \to \infty,$$

niin $\|T_n(K_j)\|_1 \to \|D_n\|_1$ kun $j \to \infty$. Lisäksi Lemman 5.3 perusteella $K_j \ge 0$ ja

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_j(t) \, dt = 1,$$

joten $(2\pi)^{-1}\| K_j \|_1 = 1$ jokaisella $j \in \mathbb{N}$. Yhdistämällä saadaan siis

$$2\pi\| T_n \| \geq \sup_j \| T_n(K_j) \|_{L^1} \geq \lim_{j\to\infty} \| T_n(K_j) \|_1 = \|D_n\|_1.$$

Edellisen Lauseen 7.9 todistuksen mukaan $\| D_n \|_1 \to \infty$, joten $\| T_n \| \to \infty$ kun $n \to \infty$. Siis Banach-Steinhausin lauseessa vaihtoehto (1) ei ole voimassa.

Näin siis Banach-Steinhausin vaihtoehto (2) jää ainoaksi mahdollisuudeksi, joten on olemassa funktio $f \in L^1(0, 2\pi)$ jolle

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n(f)\|_1 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|s_n(f;\cdot)\|_1 = \infty.$$

Johtopäätökset: vastaava Fourier osasummien jono $(s_n(f;\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ ei voi supeta avaruudessa $L^1(0, 2\pi)$, joten erityisesti $\|f - s_n(f,\cdot)\|_1 \nrightarrow 0$ kun $n \to \infty$.

□

Huomautus (*Lisätietoja*). (1) Edellinen Lause 7.14 (sekä toki em. Kolmogorovin tulos vuodelta 1926) näyttää, että Fourier-sarjojen yhteydessä avaruus L^1 poikkeaa huomattavasti avaruudesta L^2. Herää kysymys, miten muut L^p-avaruudet käyttäytyvät? Voidaan todistaa (sivuutetaan tällä kurssilla), soveltamalla joko funktioteoriaa tai nk. *singulaarisia integraaleja*, että jos $1 < p < \infty$, niin funktion $f \in L^p(0, 2\pi)$ Fourier-sarja suppenee L^p-normissa kohti funktiota f, eli

$$\|f - s_n(f,\cdot)\|_p \to 0, \quad \text{kun } n \to \infty,$$

kaikilla $f \in L^p(0, 2\pi)$.

(2) Pisteittäisestä suppenemisesta tiedetään, että jos $1 < p < \infty$ ja $f \in L^p(0, 2\pi)$, niin Fourierin osasummille pätee

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{ikx} \quad \text{m.k. } x \in [0, 2\pi].$$

Tämä tulos on varsin syvällinen *Carlesonin–Huntin* lause 60-luvulta.

Harjoitustehtäviä

7:1 Olkoon E, F ja G Banach avaruuksia. Kuvaus $A : E\times F \to G$ on *bilineaarinen*, jos kuvaukset $A_1(y) : x \mapsto A(x, y)$ ja $A_2(x) : y \mapsto A(x, y)$ ovat lineaarisia kaikilla $x \in E$ ja $y \in F$. Osoita, että bilineaarinen kuvaus A on *rajoitettu*, eli

$$\sup\{\|A(x, y)\| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\} < \infty,$$

jos ja vain jos lineaarikuvaukset $A_2(x) : F \to G$ ja $A_1(y) : E \to G$ ovat jatkuvia kaikilla $x \in E$ ja $y \in F$. [*Taikasana:* tasaisen rajoituksen periaate].

7:2 Olkoon $(a_k) \subset \mathbf{R}$ sellainen annettu jono, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \quad \text{suppenee kaikilla jonoilla } (x_k) \in c_0.$$

Näytä, että $(a_k) \in \ell^1$. [*Vihje.* Argumentoi Esimerkin 7.7 tavoin Banach-Steinhausin lausetta käyttäen.]

7:3 (*Osgoodin tasaisen rajoituksen periaate*, 1897) Olkoon $(f_n) \subset C(0,1)$ jono jatkuvia funktioita $[0,1] \to \mathbf{R}$, jotka ovat *pisteittäin rajoitettuja*, eli $M(x) = \sup_{n\in\mathbf{N}} |f(x)| < \infty$ kaikilla $x \in [0,1]$. Osoita, että on olemassa avoin väli $(a,b) \subset [0,1]$ ja luku $M < \infty$, siten että $|f_n(x)| \leq M$ kaikilla $x \in (a,b)$ ja $n \in \mathbf{N}$. [*Vihje.* Imitoi Banach-Steinhausin lauseen todistusta.]

7:4 Olkoon $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jatkuva funktio kaikilla $n = 1, 2, \ldots$. Oletetaan, että äärellinen raja-arvo $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ on olemassa kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Osoita, että funktion f epäjatkuvuuspisteiden joukko $D(f) = \{x \in \mathbf{R} : f \text{ epäjatkuva pisteessä } x\}$ on *laiha*, eli $D(f) = \cup_{m=1}^{\infty} F_m$, missä sulkeumilla $\overline{F_m}$ ei ole sisäpisteitä. Päättele: pisteittäisellä rajafunktiolla f on ainakin yksi jatkuvuuspiste. [*Vihje:* aseta

$$F_{n,m} = \{x \in \mathbf{R} : |f_n(x) - f_{n+k}(x)| \leq \frac{1}{m} \text{ kaikilla } k = 1, 2, \ldots\}$$

ja tutki joukkoa $\cup_{m,n}(F_{m,n} \setminus int(F_{m,n}))$. Tässä $int(F_{m,n})$ on sisäpisteiden joukko.]

7:5 Olkoon E normiavaruus ja $M \subset E$ äärellisulotteinen vektoriavaruus. Näytä, että M on suljettu avaruudessa E. [*Idea:* olkoon $(x_1, \ldots, x_n)$ normitettu lineaarinen kanta aliavaruudelle M, sekä $(e_1, \ldots, e_n)$ tavallinen koordinaattikantajono avaruudessa $\mathbb{K}^n$. Olkoon $T : (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_1) \to M$ lineaarikuvaus

$$T(\sum_{k=1}^{n} c_k e_k) = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k \quad \text{kun } \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \in \mathbb{K}^n.$$

Tällöin T on isomorfismi $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_1) \to M$. Käänteiskuvaus T^{-1} on jatkuva Lauseen 6.9 nojalla, koska $\{(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{K}^n : \sum_{k=1}^{n} |c_k| = 1\}$ on kompakti joukko Heine-Borelin lauseen nojalla.]

7:6 Olkoon

$$c_{00} = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^{\infty} : x_n \neq 0 \text{ vain äärellisen monella } n \in \mathbb{N}\}.$$

Osoita Bairen lauseen seurauksen 7.2 avulla ettei avaruudessa c_{00} ole sellaista normia $\|\cdot\|$, että $(c_{00}, \|\cdot\|)$ olisi Banach avaruus. [*Vihje:* $c_{00} = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$, missä $F_n = [e_1, \ldots, e_n]$ kun $n \in \mathbb{N}$ ja (e_n) on luonnollinen kantajono. HT:n 7:5 nojalla

F_n on suljettu avaruudessa $(c_{00}, \|\cdot\|)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Aliavaruuksilla F_n ei kuitenkaan ole sisäpisteitä, vrt. HT:n 2.5 argumenttia.]

7:7 Osoita, että ℓ^1 on *laiha* joukko avaruudessa ℓ^2, eli

$$\ell^1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n,$$

missä $int(\overline{D_n}) = \emptyset$, eli sulkeumilla $\overline{D_n}$ ei ole sisäpisteitä avaruudessa ℓ^2 kun $n \in \mathbf{N}$. [*Apu*: osoita, että $B_{\ell^1} \subset \ell^2$ on suljettu joukko, jolta puuttuu sisäpisteitä. LDK:n diskreetti versio sarjoille on tässä hyödyllinen.]

8. Avoimen kuvauksen lause

Palautamme aluksi mieleen Topologian kursseilta ehkä tutut perusasiat yleisestä avoimen kuvauksen käsitteestä. Määrittelemme ensin avoimen kuvauksen globaalin ehdon avulla.

8.1. **Määritelmä.** Jos X ja Y ovat metrisiä avaruuksia, niin kuvaus $f\colon X \to Y$ on *avoin*, jos $f(U) = \{f(a) : a \in U\}$ on avoin avaruudessa Y aina, kun U on avoin joukko avaruudessa X.

Huomautus. Yleisemmin, jos X ja Y ovat topologisia avaruuksia niin avoin kuvaus $f\colon X \to Y$ määritellään samoin. Koska kurssin tarpeet liittyvät Banachin avaruuksiin, niin työympäristöksi riittää kuitenkin metriset avaruudet.

Avoin kuvaus $f\colon X \to Y$ voidaan myös yhtäpitävästi määritellä seuraavalla lokaalilla tavalla. (On hyvä huomata, että tulos on täysin analoginen vastaavaan yhteyteen pisteittäisen ja globaalin jatkuvuusehtojen välillä.)

8.2. **Lause.** *Jos (X, d) ja (Y, d') ovat metrisiä avaruuksia, niin kuvaus $f\colon X \to Y$ on avoin pisteessä $a \in X$ jos ja vain jos jokaista $r > 0$ vastaa sellainen $r' > 0$, että*

$$B_{d'}(f(a), r') \subset f(B_d(a, r)).$$

Todistus.

"⇒" Oletetaan, että f on avoin kuvaus, ja olkoon $a \in X$ sekä $r > 0$ mielivaltaisia. Koska $f(a) \in f(B_d(a, r))$, missä oletuksen perusteella $f(B_d(a, r))$ on avoin joukko Y:ssä, niin on olemassa sellainen $r' > 0$, että

$$B_{d'}(f(a), r') \subset f(B_d(a, r)).$$

"⇐" Oletetaan, että Proposition ehto on voimassa. Jos $U \subset X$ on mielivaltainen avoin joukko ja $a \in U$, niin avoin pallo $B_d(a, r) \subset U$ sopivalla $r > 0$. Oletuksen nojalla olemassa sellainen $r' > 0$, että $B_{d'}(f(a), r') \subset f(B_d(a, r))$. Erityisesti siis $f(a)$ on joukon $f(U)$ sisäpiste. Koska tämä on voimassa jokaisella $a \in U$, niin $f(U)$ on avoin joukko Y:ssä □

8.3. **Esimerkki.** (1) Kuvaus $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ ei ole avoin nollassa, sillä $f(-\varepsilon, \varepsilon) = [0, \varepsilon)$, mikä ei ole pisteen $0 = f(0)$ ympäristö. (Jatkuva kuvaus ei siis aina ole avoin.)
(2) Projektio $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $P(x, y) = x$, on avoin jokaisessa tason $\mathbb{R}^2$ pisteessä, koska $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset P(B((x, y), r)$ kun $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ja $r > 0$. Toisaalta, kuvaus $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x, 0)$, ei ole avoin missään pisteessä; itse asiassa $T(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R} \times \{0\}$ ei sisällä yhtään avointa joukkoa.

(3) Olkoon $X = (\mathbb{R}, \tau_1)$, missä τ_1 on tavallinen euklidinen topologia ja $Y = (\mathbb{R}, \tau_2)$, missä $\tau_2 = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ on diskreetti topologia. Tällöin identtinen kuvaus $\mathrm{id} : X \to Y$ on avoin jokaisessa $\mathbb{R}$:n pisteessä, mutta ei jatkuva missään pisteessä.

8.4. *Huomautus.* Jatkuva kuvaus ei aina ole avoin (Esimerkki 8.3.(1)), eikä avoin kuvaus ole aina jatkuva (Esimerkki 8.3.(3)).

Kuinka avoimen kuvauksen käsite toimii lineaaristen kuvausten tapauksessa? Seuraava tulos näyttää, että lineaarisille kuvauksille avoimuus jo pisteessä $\bar{0}$ takaa avoimuuden (Vrt. Lause 2.30 sivulla 25).

8.5. **Lause.** *Olkoot E ja F normiavaruuksia sekä $T\colon E \to F$ lineaarinen. Tällöin T on avoin kuvaus jos ja vain jos T on avoin pisteessä $\bar{0}$, eli jokaista $r > 0$ vastaa sellainen $r' > 0$, että $T(B(\bar{0}, r)) \supset B(\bar{0}, r')$.*

Todistus.
"$\Rightarrow$" Tämä suunta on todettu Propositiossa 8.2.
"$\Leftarrow$" Oletetaan, että T on avoin pisteessä $\bar{0}$. Olkoon $x \in E$ ja $r > 0$. Silloin löytyy sellainen $r' > 0$, että $T(B(\bar{0}, r)) \supset B(\bar{0}, r')$. Täten kuvauksen T lineaarisuuden perusteella

$$T(B(x,r)) = T(x + B(\bar{0}, r)) = Tx + T(B(\bar{0}, r)) \supset Tx + B(\bar{0}, r') = B(Tx, r'),$$

eli T on avoin myös pisteessä x. Proposition 8.2 nojalla T on siis avoin kuvaus. $\square$

Havaitsemme, että jos E ja F ovat normiavaruuksia ja $T\colon E \to F$ on avoin lineaarikuvaus, niin T on surjektio. (HT 8:1). Tämä havainto tarkoittaa, että topologinen lisäoletus (avoimuus) implikoi algebrallisen tiedon (surjektiivisuus). Tavoitteenamme on nyt osoittaa, että yllättäen *Banachin* avaruuksien jatkuville lineaarikuvauksille T myös *käänteinen* väite pätee: surjektiivisuudesta (joka on pelkkä "algebrallinen" ehto) seuraa, että T on avoin (joka on topologinen ehto!)

Ennen kuin todistamme tämän väitteen, muotoilemme tuloksen tarkasti. Seuraava lause on peräisin *Stefan Banachilta* (1892 – 1945).

8.6. **Lause** (Avoimen kuvauksen lause)**.** *Jos E ja F ovat Banachin avaruuksia ja $T \in \mathscr{L}(E, F)$ on surjektio (eli $T(E) = F$), niin T on avoin kuvaus; erityisesti on siis olemassa sellainen $s > 0$, että*

$$B_F(\bar{0}, s) \subset T(B_E(\bar{0}, 1)).$$

Kuten tasaisen rajoituksen periaatteen yhteydessä, ennen kuin ryhdymme todistamaan väitettä, tarkastelemme hieman väitteen seurauksia.

8.7. **Seuraus.** *Jos T on jatkuva lineaarinen bijektio Banachin avaruudesta E Banachin avaruuteen F, niin T on lineaarinen isomorfismi (eli käänteiskuvaus T^{-1} on jatkuva!).*

Todistus. Käänteiskuvauksen T^{-1} jatkuvuuden $F \to E$ osoittamiseksi riittää verifioida, että alkukuva $(T^{-1})^{-1}(U)$ on avoin joukko avaruudessa F aina kun U on avoin joukko avaruudessa E (vrt. *Topologia I*, 4.8). Koska T on bijektio, niin $(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$. Toisaalta, avoimen kuvauksen lauseen 8.6 nojalla T on avoin kuvaus $E \to F$, joten $T(U) = (T^{-1})^{-1}(U)$ on siten avoin joukko avaruudessa F. Näin T on lineaarinen isomorfismi. □

8.8. **Esimerkki.** Olkoot $x \mapsto \| x \|_1$ ja $x \mapsto \| x \|_2$ normeja vektoriavaruudessa E joille $\| x \|_2 \le \beta \| x \|_1$ kaikilla $x \in E$, missä $\beta > 0$. Tällöin identtinen kuvaus $I : (E, \| \cdot \|_1) \to (E, \| \cdot \|_2)$ on jatkuva lineaarinen bijektio. Jos lisäksi sekä $(E, \| \cdot \|_1)$ että $(E, \| \cdot \|_2)$ ovat Banachin avaruuksia, niin identtinen kuvaus I on Korollaarin 8.7 nojalla isomorfismi, joten normit $\| \cdot \|_1$ ja $\| \cdot \|_2$ ovat ekvivalentteja. Toisin sanoen, on olemassa sellainen $\alpha > 0$, että

$$\alpha \| x \|_1 \le \| x \|_2 \le \beta \| x \|_1, \quad \text{kun } x \in E.$$

(Katso Lause 2.12 sivulla 15).

Erikoistapauksena tarkastelemme avaruudessa $C = C([0,1], \mathbb{R})$ normeja

$$x \mapsto \| x \|_\infty = \sup_{0 \le t \le 1} |x(t)|, \quad x \mapsto \| x \|_1 = \int_0^1 |x(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Tällöin $\| x \|_1 \le \| x \|_\infty$ kun $x \in C$, joten identtinen kuvaus $I : (C, \| \cdot \|_\infty) \to (C, \| \cdot \|_1)$ on jatkuva lineaarinen bijektio. Mutta tiedämme myös, että normit $\| \cdot \|_1$ ja $\| \cdot \|_\infty$ eivät ole ekvivalentteja (tarkastele polynomeja $x_n(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$). Voidaan siis päätellä, että identtinen kuvaus $I : (C, \| \cdot \|_\infty) \to (C, \| \cdot \|_1)$ ei ole avoin kuvaus, sillä se on jatkuva, mutta ei isomorfismi. Näin ollen täydellisyys on olennainen oletus avoimen kuvauksen lauseessa.

(Lisäkommentti: Tästä seuraa toki ohimennen myös, että $(C, \| \cdot \|_1)$ ei ole Banachin avaruus, sillä muuten avoimen kuvauksen lauseen nojalla $I : (C, \| \cdot \|_\infty) \to (C, \| \cdot \|_1)$ olisi isomorfismi. Vaihtoehtoinen ja konkreettisempi tapa nähdä, että $(C, \| \cdot \|_1)$ ei ole Banachin avaruus on käyttää Lemmaa 5.6, jonka nojalla $(C, \| \cdot \|_1)$ on tiheä Banachin avaruudessa $L^1(0,1)$. Jos $(C, \| \cdot \|_1)$ olisi Banachin avaruus, niin se olisi Lauseen 3.12 sivulla 35 nojalla suljettu avaruudessa $L^1(0,1)$, mutta tiheyden nojalla tällöin saatisiin ristiriita $C(0,1) = L^1(0,1)$.)

Olemme valmiita aloittamaan avoimen kuvauksen lauseen todistamisen. Tarvitsemme ensin tärkeän aputuloksen, jonka todistamiseen käytetään Bairen lausetta. Ennen apulauseen todistusta toteamme, että

$$\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A + B},$$

aina kun A ja B ovat normiavaruuden E osajoukkoja. Nimittäin, olkoon $x \in \overline{A}$, $y \in \overline{B}$ ja $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa sellaiset $x_0 \in A$ ja $y_0 \in B$, että

$$\| x - x_0 \| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ja} \quad \| y - y_0 \| < \frac{\varepsilon}{2},$$

joten

$$\| (x + y) - (x_0 + y_0) \| \leq \| x - x_0 \| + \| y - y_0 \| < \varepsilon.$$

Siispä $x + y \in \overline{A + B}$. (Huomattakoon, että sisältyvyys $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A + B}$ voi olla aito, katso HT 2:??).

Muistutus: Jos E on normiavaruus, niin joukko $U \subset E$ on pisteen $a \in U$ *ympäristö* jos avoin pallo $B(a, r) \subset U$ jollakin $r > 0$.

8.9. **Lemma.** *Olkoon E normiavaruus, F Banachin avaruus ja T lineaarinen surjektio $E \to F$. Jos V on pisteen $\bar{0} \in E$ ympäristö avaruudessa E, niin sulkeuma $\overline{T(V)}$ on pisteen $\bar{0} \in F$ ympäristö avaruudessa F.*

Todistus. Koska V on pisteen $\bar{0} \in E$ ympäristö, on olemassa sellainen $B = B(\bar{0}, r)$, että $B + B \subset V$. Nimittäin, jos $B(\bar{0}, 2r) \subset V$, niin kolmioepäyhtälön perusteella $B(\bar{0}, r) + B(\bar{0}, r) \subset B(\bar{0}, 2r) \subset V$.

Jos $y \in F$ on mielivaltainen, niin $y = Tx$ jollakin $x \in E$, koska T on oletuksen nojalla surjektio. Valitaan sellainen $n \in \mathbb{N}$, että $\| x \| < nr$, eli $x \in nB$. Siis

$$y \in T(nB) = nT(B) \subset n\overline{T(B)}.$$

Olemme näin havainneet, että

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} n\overline{T(B)}.$$

Lisäksi tässä $n\overline{T(B)} = \overline{nT(B)}$, sillä kuvaus $x \mapsto nx$ on homeomorfismi $F \to F$ (vrt. *Topologia I*, 9.16). Koska F on Banachin avaruus, voimme soveltaa Bairen lausetta Seurauksen 7.2 muodossa: Siis ainakin yksi suljetuista joukoista $n\overline{T(B)}$ sisältää avoimen pallon. Merkitsemme jatkossa selvyyden vuoksi avaruuden F palloja notaatiolla B_F.

Jos siis $B_F(x_0, \rho_0) \subset n\overline{TB}$, niin

$$B_F(\frac{x_0}{n}, \frac{\rho_0}{n}) = \frac{1}{n} B_F(x_0, \rho_0) \subset \overline{T(B)},$$

eli myös joukko $\overline{T(B)}$ sisältää avoimen pallon. Merkitään $x = \frac{1}{n} x_0$ ja $\rho = \rho_0 / n$, jolloin

$$B_F(x, \rho) \subset \overline{T(B)}.$$

Lisäksi pätee, että $-x \in \overline{T(B)}$. Nimittäin, koska $x \in \overline{T(B)}$, niin on olemassa sellainen approksimoiva jono $(y_n) \subset T(B)$, että $x = \lim_n y_n$. Koska $y_n \in T(B) = T(B(\bar{0}, r))$ niin symmetriasta seuraa, että $-y_n \in T(B)$ kaikilla n, joten

$$-x = \lim_n (-y_n) \in \overline{T(B)}.$$

Tämän avulla saamme kuvauksen T lineaarisuuden nojalla

$$\begin{aligned} B_F(\bar{0}, \rho) &= -x + B_F(x, \rho) \subset \overline{T(B)} + \overline{T(B)} \subset \overline{T(B) + T(B)} \\ &= \overline{T(B+B)} \subset \overline{T(V)}. \end{aligned}$$

Siis $\overline{T(V)}$ on pisteen $\bar{0} \in F$ ympäristö avaruudessa F. □

Avoimen kuvauksen lauseen todistus: Osoitamme, että T on avoin pisteessä $\bar{0}$. (Huomautamme, että Lemma 8.9 osoittaa melkein tämän, kunhan vain voisimme korvata sulkeuman $\overline{T(V)}$ joukolla $T(V)$. Todistus perustuukin tämän seikan osoittamiseen.)

Olkoon $r > 0$ annettu, $r_0 = \frac{1}{2} r$ ja $r_k = 2^{-k} r_0$, kun $k \in \mathbb{N}$. Siis $r_k > 0$ ja

$$r_0 = \sum_{k=1}^{\infty} r_k.$$

Lemman 8.9 nojalla löydämme luvut $s_k > 0$, joille

$$B_F(\bar{0}, s_k) \subset \overline{T(B_E(\bar{0}, r_k))}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Jos $y \in \overline{T(B_E(\bar{0}, r_k))}$, niin $\| y \| \leq \| T \| r_k \to 0$, joten

$$\lim_{k \to \infty} s_k = 0.$$

Väite: $B_F(\bar{0}, s_0) \subset T(B_E(\bar{0}, r))$.

Tätä varten olkoon $y \in F$ ja $\| y \| < s_0$. Siispä $y \in \overline{T(B_E(\bar{0}, r_0))}$. Näin löytyy $x_0 \in B_E(\bar{0}, r_0)$, jolle

$$\| y - Tx_0 \| < s_1,$$

eli $y - Tx_0 \in B_F(\bar{0}, s_1) \subset \overline{T(B_E(\bar{0}, r_1))}$. Vastaavasti jatkamalla havaitsemme, että on olemassa sellainen $x_1 \in B_E(\bar{0}, r_1)$, että

$$\| y - Tx_0 - Tx_1 \| < s_2,$$

eli erotusvektori $y - Tx_0 - Tx_1 \in B_F(\bar{0}, s_2) \subset \overline{T(B_E(\bar{0}, r_2))}$.
Induktioaskel: jos $x_k \in B_E(\bar{0}, r_k)$ kun $0 \leq k \leq n-1$, ja

$$y - \sum_{k=0}^{n-1} Tx_k \in B_F(\bar{0}, s_n) \subset \overline{T(B_E(\bar{0}, r_n))},$$

niin on olemassa sellainen $x_n \in B_E(\bar{0}, r_n)$, että

$$\| (y - \sum_{k=0}^{n-1} Tx_k) - Tx_n \| = \| y - \sum_{k=0}^{n} Tx_k \| < s_{n+1}.$$

Jatkamalla saamme siten konstruoitua jonon $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ avaruudessa E, jolle $\| x_k \| < r_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| x_k \| < \sum_{k=0}^{\infty} r_k = 2r_0 = r < \infty,$$

eli sarja $\sum_k x_k$ on absoluuttisesti suppeneva avaruudessa E. Koska E on täydellinen, niin Lauseen 3.22 sivulla 40 nojalla sarja $\sum_k x_k$ suppenee avaruudessa E. Merkitsemme vastaavaa summaa

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k.$$

Tällöin edellisen arvion nojalla pätee

$$\| x \| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \| x_k \| < r,$$

joten $x \in B_E(\bar{0}, r)$. Lisäksi kontruktion perusteella

$$\Big\| y - T(\sum_{k=0}^{n} x_k) \Big\| = \Big\| y - \sum_{k=0}^{n} Tx_k \Big\| < s_{n+1} \to 0,$$

kun $n \to \infty$, joten kuvauksen T jatkuvuuden perusteella

$$y = \lim_{n \to \infty} T\Big(\sum_{k=0}^{n} x_k \Big) = T\Big(\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} x_k \Big) = Tx.$$

Yhteenvetona olemme osoittaneet seuraavan: Jos $y \in F$ ja $\| y \| < s_0$, niin $y = Tx$, missä $x \in E$ ja $\| x \| < r$. Toisin sanoen, $T(B_E(\bar{0}, r)) \supset B_F(\bar{0}, s_0)$. Koska $r > 0$ oli mielivaltainen, on siis T avoin kuvaus pisteessä $\bar{0}$, joten T on Lauseen 8.5 nojalla avoin kuvaus. □

Avoimen kuvauksen lauseella on myös seuraava käyttökelpoinen muotoilu:

8.10. **Seuraus.** *Jos E ja F ovat Banachin avaruuksia ja $T \in \mathscr{L}(E, F)$ on surjektio, niin on olemassa sellainen $M < \infty$, että jokaista $y \in F$ kohti on olemassa $x \in E$, jolle $Tx = y$ ja $\| x \| \leq M \| y \|$.*

Todistus. Avoimen kuvauksen lauseen nojalla on olemassa sellainen $s > 0$, että vastaava suljettu pallo

$$\{y \in F : \|y\| \leq s\} \subset T(B_E(\bar{0}, 1)).$$

Jos $y \in F$ on mielivaltainen, niin $\|s\frac{y}{\|y\|}\| = s$, joten on olemassa sellainen $z \in B_E(\bar{0}, 1)$, että $Tz = s\frac{y}{\|y\|}$. Lineaarisuudesta seuraa, että $T(\frac{\|y\|}{s}z) = y$, missä $\|\frac{\|y\|}{s}z\| \leq \frac{1}{s}\|y\|$. Voidaan siis valita $M = \frac{1}{s}$. □

8.11. **Seuraus.** *Olkoot E ja F Banachin avaruuksia ja $T \in \mathscr{L}(E, F)$ jatkuva lineaarinen* injektio. *Tällöin kuva-avaruus $T(E)$ on avaruuden F suljettu aliavaruus jos ja vain jos löytyy sellainen $\beta > 0$, että*

$$\| Tx \| \geq \beta \| x \| \quad \textit{jokaisella } x \in E. \tag{8.12}$$

Ehto (8.12) sanoo, että T on *alhaalta rajoitettu* (vrt. Lause 6.9).

Todistus. "$\Rightarrow$" Oletetaan, että $T(E)$ on suljettu. Koska $T(E) \subset F$ on Banachin avaruuden suljettu aliavaruus, niin se on myös Banachin avaruus (Lause 3.12 sivulla 35). Nyt siis $T : E \to T(E)$ on jatkuva bijektio, joten väite seuraa suoraan avoimen kuvauksen lauseen Seurauksesta 8.10.

"$\Leftarrow$" Jos ehto (8.12) pätee, niin

$$\beta \| x \| \leq \| Tx \| \leq \|T\| \cdot \| x \|$$

jokaisella $x \in E$, koska T on myös jatkuva. Siispä $T \colon E \to T(E)$ on lineaarinen isomorfismi ja Lauseen 6.14 sivulla 123 nojalla $T(E)$ on täydellinen ja siten $T(E)$ on suljettu (Lause 3.12 sivulla 35). □

Huomautus. Kaikki jatkuvat lineaariset injektiot $T \in \mathscr{L}(E, F)$ *eivät* ole alhaalta rajoitettuja. Esimerkiksi operaattori $T : \ell^2 \to \ell^2$, $T(x_k) = (\frac{1}{k}x_k)$, kun $(x_k) \in \ell^2$, on jatkuva lineaarinen injektio. Toisaalta,

$$\| T(0, 0, \dots, 1, 0, \dots) \|_2 = \frac{1}{k} \to 0, \quad k \to \infty,$$

joten T ei ole alhaalta rajoitettu. (Seurauksen 8.11 mukaan kuva $T(\ell^2)$ siis ei ole suljettu.)

Esitämme vielä *suljetun kuvaajan lauseen* (Lause 8.15 alla), joka on avoimen kuvauksen lauseen sovellus (jopa sen yhtäpitävä versio). Tämän keskeisen tuloksen avulla voidaan usein helpommin todistaa, että annettu lineaarikuvaus on jatkuva.

8.13. **Määritelmä.** Kuvauksen $f \colon X \to Y$ *kuvaaja* on joukko

$$G(f) = \{ (x, f(x)) \in X \times Y : x \in X \} \subset X \times Y.$$

Jos E ja F ovat normiavaruuksia, niin varustetaan seuraavassa tulovektoriavaruus $E \times F$ normilla

$$\| (x, y) \| = \| x \|_E + \| y \|_F, \quad (x, y) \in E \times F.$$

Tällöin $(E\times F, \|\cdot\|)$ on Banachin avaruus, jos E ja F ovat Banachin avaruuksia (tarkista!). Seuraava seikka on yleinen topologinen tieto:

8.14. **Lause.** *Olkoon E ja F normiavaruuksia sekä $f\colon E \to F$ jatkuva kuvaus. Tällöin funktion f kuvaaja $G(f) \subset E \times F$ on suljettu joukko.*

Todistus. Riittää osoittaa, että $\overline{G(f)} = G(f)$. Jos $(x, y) \in \overline{G(f)} \subset E \times F$, niin on olemassa sellaiset kuvaajan pisteparit $(x_n, f(x_n)) \in G(f)$ kun $n \in \mathbb{N}$, että

$$\|\,(x_n, f(x_n)) - (x, y)\,\|_{E\times F} = \|(x_n - x, f(x_n) - y)\| = \|x_n - x\| + \|f(x_n) - y\| \to 0$$

kun $n \to \infty$. Tällöin siis sekä $\|x_n - x\| \to 0$ että $\|f(x_n) - y\| \to 0$ kun $n \to \infty$. Koska oletimme, että f on jatkuva, niin myös $f(x_n) \to f(x)$ avaruudessa F kun $n \to \infty$. Raja-arvon yksikäsitteisyydesta seuraa silloin, että $y = f(x)$, eli $(x, y) = (x, f(x)) \in G(f)$. Siispä $G(f)$ on suljettu avaruudessa $E \times F$. □

Jos $T\colon E \to F$ on lineaarinen kuvaus, niin sen kuvaaja $G(T)$ on avaruuden $E \times F$ vektorialiavaruus. Nimittäin, lineaarisuuden nojalla

$$\alpha(x, Tx) + \beta(y, Ty) = (\alpha x + \beta y, \alpha Tx + \beta Ty) = (\alpha x + \beta y, T(\alpha x + \beta y)) \in G(T)$$

kaikilla $x, y \in E$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Suljetun kuvaajan lause kertoo, että Lauseen 8.14 käänteinen tulos pätee *lineaarikuvauksille* $T\colon E \to F$, kun E, F ovat Banachin avaruuksia.

8.15. **Lause** (Suljetun kuvaajan lause)**.** *Olkoot E ja F Banachin avaruuksia, ja $T : E \to F$ sellainen lineaarikuvaus, että kuvaaja*

$$G(T) = \{\ (x, Tx) :\ x \in E\ \} \subset E \times F \quad \textit{on suljettu vektorialiavaruus.}$$

Tällöin T on jatkuva, eli $T \in \mathscr{L}(E, F)$.

8.16. *Huomautus.* (1) Suljetun kuvaajan lause antaa uuden keinon lineaarisen kuvauksen T jatkuvuuden toteamiseen. Lauseen nojalla riittää verifioida, että $\overline{G(T)} = G(T)$, mikä on yhtäpitävää (vrt. Lauseen 8.14 argumentti) seuraavan ehdon kanssa: aina jos

$$(*) \qquad \left.\begin{array}{ll} x_n \to x & \text{avaruudessa } E \text{ kun } n \to \infty \\ Tx_n \to y & \text{avaruudessa } F \text{ kun } n \to \infty \end{array}\right\} \Longrightarrow y = Tx.$$

Muistutus (vrt. *Topologia I*, 11.8): kuvaus $f : E \to F$ on jatkuva jos ja vain jos $f(x_n) \to f(x)$ kun $n \to \infty$ jokaisella jonolla $(x_n) \subset E$ jolle $x_n \to x$ kun $n \to \infty$, missä $x \in E$ on mielivaltainen. Huomaa, että ehto $(*)$ on todellakin *heikennys* verrattuna em. yleiseen kriteeriin: jos jono $(x_n) \subset E$ suppene E:ssa kohti vektoria x, niin ehdossa $(*)$ on lisätietona myös että kuvajono (Tx_n) suppenee F:ssa!

(2) Suljetun kuvaajan lauseessa lineaarisuus on oleellinen oletus, sillä on olemassa epäjatkuva (ja epälineaarinen) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jonka kuvaaja $G(f) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on suljettu (HT 8:3).

Suljetun kuvaajan lauseen todistus: Koska $E \times F$ on Banachin avaruus ja kuvaaja $G(T)$ on suljettu vektorialiavaruus, niin $G(T)$ on Banachin avaruus (vrt. Lause 3.11 sivulla 35) avaruuden $E \times F$ normissa. Määritellään kuvaus $\psi : G(T) \to E$ asettamalla

$$\psi\big((x, Tx)\big) = x, \quad (x, Tx) \in G(T).$$

Koska T on lineaarinen, niin ψ on myös lineaarinen (tarkista!). Lisäksi ψ on bijektio, sillä ψ on selvästi surjektio sekä myös injektio: nimittäin

$$\bar{0} = \psi\big((x, Tx)\big) = x \Longrightarrow (x, Tx) = (\bar{0}, \bar{0}).$$

Lisäksi ψ on rajoitettu, koska

$$\|\, \psi\big((x, Tx)\big) \,\| = \|\, x \,\| \le \|\, x \,\| + \|\, Tx \,\| = \|\, (x, Tx) \,\|, \quad (x, Tx) \in G(T).$$

Yhteenvetona ψ on siis jatkuva lineaarinen bijektio $G(T) \to E$. Nyt avoimen kuvauksen lauseen 8.6 (tai Seurauksen 8.7 muotoilun) nojalla myös käänteiskuvaus ψ^{-1} on jatkuva, joten ψ on lineaarinen isomorfismi. Seurauksen 6.11 sivulla 123 nojalla on siis olemassa sellainen vakio $\beta > 0$, että

$$\beta\|\, (x, Tx) \,\| \le \|\, \psi\big((x, Tx)\big) \,\| = \|\, x \,\| \quad \text{kaikilla } (x, Tx) \in G(T).$$

Tästä seuraa arvio

$$\beta\|\, Tx \,\| \le \beta(\|\, x \,\| + \|\, Tx \,\|) = \beta\|\, (x, Tx) \,\| \le \|\, x \,\|, \quad \text{kun } x \in E.$$

Siis $\|\, Tx \,\| \le (1/\beta)\|\, x \,\|$, joten T on jatkuva. □

Seuraavassa tarkastellaan tyypillistä suljetun kuvaajan lauseen sovellusta.

8.17. **Esimerkki.** Olkoon $(a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ "ääretön" matriisi, joka toteuttaa ehdot:

(1) Matriisialkiot $a_{ij} \in \mathbb{C}$ muodostavat rajoitetun joukon, eli

$$M := \sup_{i,j \in \mathbb{N}} |a_{ij}| < \infty.$$

(2) Aina jos $s = (s_j) \in \ell^1$ on jono, ja

$$t_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} s_j, \quad i \in \mathbb{N},$$

niin $(t_i) \in \ell^1$.

Ehto (2) sanoo, että matriisi (a_{ij}) määrittelee lineaarikuvauksen $A : \ell^1 \to \ell^1$, jolle

$$As = \Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}s_j\Big)_{i\in\mathbb{N}}, \quad \text{kun} \quad s = (s_j) \in \ell^1.$$

Intuitiivisesti tämä voidaan ajatella seuraavasti:

$$As = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad \text{kun } s = (s_j) \in \ell^1.$$

Väite: $A \in \mathcal{L}(\ell^1)$, eli A on jatkuva $\ell^1 \to \ell^1$.

Käytetään suljetun kuvaajan lausetta. Tätä varten olkoon $x^{(n)} \in \ell^1$ sellaisia jonoja (missä $n \in \mathbb{N}$), että $x^{(n)} \to x$ ja $A(x^{(n)}) \to y$ avaruudessa ℓ^1 kun $n \to \infty$. Merkitään $x^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ kun $n \in \mathbb{N}$, $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ja $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1$. On osoitettava, että $Ax = y$.

Olkoon $k \in \mathbb{N}$ kiinteä. Määritellään kuvaus $\Lambda \colon \ell^1 \to \mathbb{K}$ asettamalla

$$\Lambda u = (Au)_k, \quad u = (u_j) \in \ell^1.$$

(Tässä $(Au)_k$ on k:s koordinaatti jonolle $Au \in \ell^1$.) Oletuksen (2) perusteella Λ on todella määritelty $\ell^1 \to \mathbb{K}$, ja Λ on lineaarinen. Ehdosta (1) saadaan

$$|\Lambda u| = |\sum_{j=1} a_{kj}u_j| \le \sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}||u_j| \le M\| u \|_1,\ u = (u_j) \in \ell^1,$$

joten Λ on jatkuva $\ell^1 \to \mathbb{K}$. Tällöin Λ:n jatkuvuuden ja suppenemisoletuksen nojalla

$$y_k = \lim_{n\to\infty} (Ax^{(n)})_k = \lim_{n\to\infty} \Lambda x^{(n)} = \Lambda(\lim_{n\to\infty} x^{(n)}) = \Lambda x = (Ax)_k.$$

Olemme siis näyttäneet, että $y = Ax$, koska $k \in \mathbb{N}$ oli mielivaltainen koordinaatti. Näin suljetun kuvauksen lauseen nojalla A on jatkuva $\ell^1 \to \ell^1$.

(Harjoituksen vuoksi kannattaa yrittää osoittaa sama arvioimalla suoraan normia $\| Ax \|_1$, mikä ei ole aivan suoraviivaista.)

Avoimen kuvauksen lauseen sovellus Fourier-analyysiin

Muistamme, että jos $f \in L^2(0, 2\pi)$, niin Besselin epäyhtälön nojalla sen Fourier-kertoimet $(\widehat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, eli $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 < \infty$.

Kääntäen, Riesz–Fischerin lauseen mukaan, jos $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$, niin on olemassa $f \in L^2(0, 2\pi)$, jolle

$$\widehat{f}(k) = a_k \quad \text{jokaisella } k \in \mathbb{Z}.$$

Kysymys: Onko tuloksella vastinetta L^1-funktioille, eli:

1. Onko L^1-funktioille olemassa vastaava jonoista koostuva Banachin avaruus X, jolle $(\hat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in X$ kaikilla $f \in L^1(0, 2\pi)$?
2. Onko Riesz–Fischerin lauseella vastinetta avaruudessa L^1 ?

Ensimmäiseen kysymykseen saadaan valoa *Riemann–Lebesguen lemmasta.* Olkoon

$$c_0(\mathbb{Z}) = \{x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} : x_k \in \mathbb{C} \text{ kaikilla } k \in \mathbb{N}, \lim_{|k|\to\infty} x_k = 0\}$$

varustettuna sup-normilla $\|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{Z}}|x_k|$. Tunnetusti $(c_0(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_\infty)$ on Banachin avaruus.

8.18. **Lause** (Riemann–Lebesguen lemma)**.** *Jos $f \in L^1(0, 2\pi)$, niin*

$$(\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in c_0(\mathbb{Z}).$$

Todistus: Jos $f \in L^1(0, 2\pi)$ ja $n \in \mathbb{Z}$, niin

$$|\widehat{f}(n)| = \frac{1}{2\pi}\Big|\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t\Big| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)||e^{-int}|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\|\, f\,\|_1. \tag{8.19}$$

Siis $(\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ on rajoitettu jono ja $\|\,(\widehat{f}(n))\,\|_\infty = \sup_n|\widehat{f}(n)| \le \frac{1}{2\pi}\|\, f\,\|_1$.

Toisaalta Lauseen 5.4 sivulla 93 ja Lauseen 5.6 sivulla 95 nojalla trigonometriset polynomit ovat tiheässä avaruudessa $L^1(0, 2\pi)$. Jos $\varepsilon > 0$ on annettu, löydetään siis trigonometrinen polynomi

$$P(x) = \sum_{k=-m}^{m} a_k e^{ikx},$$

jolle on voimassa $\|\, f - P\,\|_1 < \varepsilon$. Edellä $\widehat{P}(n) = a_n$ kaikilla $|n| \le m$ ja $\widehat{P}(n) = 0$ aina, kun $|n| > m$. Tätä havaintoa voidaan käyttää nyt hyväksi. Olkoon $|n| > m$. Tällöin

$$|\widehat{f}(n)| = |\widehat{f}(n) - \widehat{P}(n)| = |(\widehat{f - P})(n)| \le \frac{1}{2\pi}\|\, f - P\,\|_1 < \varepsilon,$$

joten päättelemme, että $|\widehat{f}(n)| \to 0$, kun $|n| \to \infty$, eli $(\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in c_0(\mathbb{Z})$. $\square$

Siis $X = c_0(\mathbb{Z})$ kelpaa hyvin (erääksi) vastaukseksi kysymykseen (1). Seuraavaksi vastataan kysymykseen (2) jonoavaruuden $X = c_0(\mathbb{Z})$ osalta, eli tarkastellaan onko Riemann–Lebesguen lemman 8.18 käänteinen tulos voimassa (eli onko kysymykseen (2) vastaus myönteinen tässä tapauksessa). Avoimen kuvauksen lauseen avulla osoitamme seuraavaksi, että käänteinen tulos ei ole voimassa kun $X = c_0(\mathbb{Z})$.

8.20. **Lause.** *Kuvaus* $T\colon f \mapsto (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ *on jatkuva lineaarinen injektio avaruudelta* $L^1 = L^1(0,2\pi)$ *avaruuteen* $c_0(\mathbb{Z})$*. Kuva-avaruus* $T(L^1)$ *on tiheä avaruudessa* $c_0(\mathbb{Z})$*, mutta* T ei ole *surjektio.*

Todistus. Selvästi T on lineaarinen, koska $f \mapsto \widehat{f}(k)$ on lineaarinen kaikilla k. Edellisen lauseen todistus näyttää, että T on jatkuva kuvaus $T\colon L^1 \to c_0$ ja $\|\,T\,\| \le (2\pi)^{-1}$. (Itse asiassa: $\|\,T\,\| = (2\pi)^{-1}$, sillä jos $f(t) \equiv 1$ kun $t \in [0,2\pi]$, niin $\|\,f\,\|_1 = 2\pi$ ja $\|\,Tf\,\|_\infty = 1$, koska $\widehat{f}(0) = 1$ ja $\widehat{f}(k) = 0$, kun $k \ne 0$).

Näytetään seuraavaksi, että T on injektio. On osoitettava, että jos $Tf = \bar{0}$, eli $\widehat{f}(n) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$, niin itse asiassa $f = \bar{0}$ (toisin sanoen, Fourier-kertoimet $(\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ määräävät myös funktiot $f \in L^1$ yksikäsitteisesti).

Käytämme tähän Fejerin ytimen ja konvoluution

$$K_n * f(x) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,K_n(x-t)\,\mathrm{d}t$$

ominaisuuksia. Osoitamme ensiksi, että

$$\|K_n * f\|_{L^1} \le \|f\|_{L^1} \qquad \text{kaikilla } f \in L^1(0,2\pi). \tag{8.21}$$

Tämä seuraa Fubinin lauseesta. Nimittäin:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|K_n * f(x)|dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,K_n(x-t)\,\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}x$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)||K_n(x-t)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|K_n(x)|\,\mathrm{d}x\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|\,\mathrm{d}t$$

missä $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|K_n(x)|\,\mathrm{d}x = 1$ saadaan Lemmasta 5.3 sivulla 92.

Väitämme seuraavaksi, että

$$\|K_n * f - f\|_{L^1} \to 0 \quad \text{kun } n \to \infty, \quad f \in L^1(0,2\pi). \tag{8.22}$$

Tämän todistamiseksi käytetään Lauseita 5.4 sivulla 93 ja 5.6 sivulla 95. Jos $f \in L^1(0,2\pi)$ ja $\varepsilon > 0$, etsitään ensin 2π-periodinen funktio $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, jolle $\|f-g\|_{L^1(0,2\pi} < \varepsilon$. Silloin arvion (8.21) mukaan

$$\|K_n * f - f\|_{L^1} \le \|K_n * (f-g)\|_{L^1} + \|K_n * g - g\|_{L^1} + \|f-g\|_{L^1}$$

$$\le 2\|f-g\|_{L^1} + \|K_n * g - g\|_\infty$$

Koska Lauseen 5.4 mukaan $\|K_n * g - g\|_\infty \to 0$ kun $n \to \infty$, ylläolevasta saadaan $\|K_n * f - f\|_{L^1} \le 3\varepsilon$ ottamalla $n \in \mathbb{N}$ riittävän suureksi. Väite (8.22) on siis todistettu.

Oletamme nyt, että $Tf = \bar{0}$, eli että $\hat{f}(n) = 0$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Tällöin jokainen Fourier osasumma $s_n(f;x) := \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\,e^{ikx} \equiv 0$, eli $(D_n * f)(x) \equiv 0$, $n \in \mathbb{N}$. Mutta, määritelmän mukaan, kukin $K_n * f$ on keskiarvo Fourier osasummista $D_k * f$, $k \le n$. Siis $(K_n * f)(x) \equiv 0$, $n \in \mathbb{N}$, ja ehdon (8.22) nojalla silloin $\|f\|_{L^1} = 0$, eli $f(x) = 0$ melkein kaikilla $x \in [0, 2\pi]$. Olemme näin näyttäneet, että $\mathrm{Ker}(T) = \{\overline{0}\}$, joten T on injektio.

Kuva $T(L^1)$ on tiheä: Olkoon $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in c_{00}(\mathbb{Z}) \subset c_0(\mathbb{Z})$ äärellisesti kannatettu jono, ts. $a_k = 0$, kun $|k| > m$ (jollakin $m \in \mathbb{N}$). Tällöin trigonometrinen polynomi

$$P(t) = \sum_{k=-m}^{m} a_k e^{ikt}$$

on L^1-funktio, ja aikaisempien laskujen perusteella

$$\widehat{P}(n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-m}^{m} a_k \int_0^{2\pi} e^{ikt} e^{-int}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} a_n, & \text{jos} \quad |n| \le m \\ 0, & \text{jos} \quad |n| > m \end{cases}$$

Siis $T(P) = (\widehat{P}(k))_{k\in\mathbb{Z}} = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, joten $c_{00}(\mathbb{Z}) \subset T(L^1)$. Äärellisesti kannatetut jonot $c_{00}(\mathbb{Z})$ ovat (tunnetusti) tiheässä avaruudessa $c_0(\mathbb{Z})$, eli $\overline{c_{00}(\mathbb{Z})} = c_0(\mathbb{Z})$, joten kuva $T(L^1)$ on tiheä avaruudessa $c_0(\mathbb{Z})$.
Lopuksi osoitamme avoimen kuvauksen lauseen avulla, että $T(L^1) \neq c_0(\mathbb{Z})$, eli T ei ole surjektio. Nimittäin, jos T olisi surjektio, eli $T(L^1) = c_0(\mathbb{Z})$, niin silloin $T \colon L^1 \to c_0(\mathbb{Z})$ olisi bijektio. Tällöin avoimen kuvauksen lauseen Seurauksen 8.10 nojalla T olisi isomorfismi, joten erityisesti olisi olemassa sellainen vakio $\beta > 0$, että

$$\| Tf \|_\infty \ge \beta \| f \|_1 \tag{8.23}$$

jokaisella $f \in L^1$.

Toisaalta, Dirichlet'n ydin $D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \in L^1$, ja $\| (\widehat{D}_n(k)) \|_\infty = 1$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Lisäksi Lauseen 7.9 sivulla 138 todistuksessa osoitimme (kaava (7.13)), että $\| D_n \|_1 \to \infty$. Tämä on ristiriidassa arvion (8.23) kanssa, joten T ei voi olla surjektio. □

Harjoitustehtäviä

8:1 Olkoon E ja F normiavaruuksia, sekä $T : E \to F$ avoin lineaarikuvaus. Näytä, että T on surjektio. [*Kysymys.* Milloin kuvavektorialiavaruus $S(E)$ on avoin avaruudessa F?]

8:2. Olkoon E ja F Banachin avaruuksia ja $A : E \to F$ sellainen jatkuva lineaarikuvaus, että kaikilla $y \in F$ on olemassa yksikäsitteinen vektori $x \in E$, jolle $Ax = y$. Näytä, että kuvaus $y \mapsto x$ määrittelee jatkuvan lineaarikuvauksen $S : F \to E$, jolle $A(Sy) = y$ kun $y \in F$. [*Vihje:* avoimen kuvauksen lause tai suljetun kuvaajan lause.]

8:3 Etsi epäjatkuva kuvaus $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, jonka kuvaaja

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathbf{R}\}$$

on suljettu tasossa $\mathbf{R}^2$.

8:4. Olkoon E Banachin avaruus ja $M, N \subset E$ aliavaruuksia, joille $E = M \oplus N$ (siis $E = M + N$ ja $M \cap N = \{0\}$). Osoita, että lineaarinen projektio $P : E \to E$,

$$Px = m, \quad \text{kun} \quad x = m + n \in M \oplus N = E,$$

on jatkuva jos ja vain jos M ja N ovat E:n suljettuja aliavaruuksia. [*Vihje:* päättele, että P on jatkuva suljetun kuvaajan lauseen avulla, jos M ja N ovat suljettuja.]

8:5 Olkoon E Hilbertin avaruus ja $(x_n) \subset E$ jono, jolle $\sum_{n=1}^{\infty} |(x|x_n)|^2 < \infty$ kaikilla $x \in E$. Näytä suljetun kuvaajan lauseen avulla että $T : E \to \ell^2$ on jatkuva lineaarikuvaus, kun asetetaan

$$Tx = ((x|x_n))_{n \in \mathbf{N}}, \quad x \in E.$$

9. Dualiteetti ja Hahn-Banachin lauseet

Jos E on vektoriavaruus skalaarikuntana $\mathbb{K}$, niin merkintä $E^\dagger = L(E, \mathbb{K})$ tarkoittaa avaruuden E *algebrallista duaalia*. Jos $f \in E^\dagger$ ja $x \in E$, niin usein jatkossa merkitään $\langle x, f \rangle = f(x)$ funktiomerkinnän sijasta. Ehto $(x, f) \mapsto \langle x, f \rangle$ määrittelee niin sanotun *kanonisen bilineaarimuodon* $E \times E^\dagger \to \mathbb{K}$.

Normiavaruuden tapauksessa funktionaali $f \in E^\dagger$ voi olla jatkuva tai epäjatkuva, joten on syytä määritellä:

9.1. **Määritelmä.** Jos E on normiavaruus jonka skalaarikunta on $\mathbb{K}$, niin $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ on avaruuden E (*topologinen*) *duaali*.

Siis $E^* := \{x^* : x^* \text{ on jatkuva lineaarikuvaus } E \to \mathbb{K}\}$ on jatkuvien lineaaristen funktionaalien muodostama avaruus, ja $E^* \subset E^\dagger$ on vektorialiavaruus.

Jos $E = c_{00}$ on äärellisesti kannatettujen jonojen muodostama vektoriavaruus varustettuna sup-normilla (vrt. Esimerkki 3.9 sivulla 34), niin

$$(c_{00})^* \neq (c_{00})^\dagger.$$

Nimittäin, olkoon $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ (ykkönen n:ssa paikassa) kun $n \in \mathbb{N}$. Tällöin jono $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on normiavaruuden c_{00} lineaarinen kanta, koska $x = \sum_{k \in A} x_k e_k$ jokaisella $x = (x_k) \in c_{00}$, missä $A = \{k \in \mathbb{N} : x_k \neq 0\}$ on äärellinen joukko. Voidaan määritellä lineaarinen kuvaus $f : c_{00} \to \mathbb{R}$ asettamalla $f(e_n) = n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin f ei ole rajoitettu, koska $|f(e_n)| = n \|e_n\|_\infty$ kaikilla n. Yleisemmin, voidaan osoittaa että $E^* = E^\dagger$ jos E on äärellisulotteinen (HT 9:5), ja $E^* \neq E^\dagger$ jos E on ääretönulotteinen (HT 9:6).

Jos $x^* \in E^*$, niin jatkuvan funktionaalin x^* normi on Lauseen 6.1 sivulla 118 nojalla

$$\| x^* \| = \sup_{\| x \| \leq 1} |\langle x, x^* \rangle|.$$

Siis $(E^*, \| \cdot \|)$ on normiavaruus saman Lauseen 6.1 nojalla.

9.2. **Lause.** *Jos E on normiavaruus, niin $(E^*, \| \cdot \|)$ on Banachin avaruus.*

Todistus. Väite seuraa suoraan Lauseesta 6.6, koska $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$, missä skalaarikunta $\mathbb{K}$ on täydellinen. □

On hyödyllistä ja tärkeää kyetä konkreettisesti identifioimaan duaaliavaruus E^*, jos E on annettu Banachin avaruus. (Usein tämä on epä-triviaali tehtävä!)

9.3. **Esimerkki.** Olkoon $1 < p < \infty$ ja $q = p/(p-1)$, eli

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

joten p ja q ovat *duaalieksponentteja* (katso luku 2, Määritelmän 2.16 sivulla 17 jälkeinen teksti).

Väite: avaruuden $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ duaali on isometrisesti isomorfinen avaruuden $(\ell^q, \|\cdot\|_q)$ kanssa.

Merkitään $e_k = (\underbrace{0,\dots,0}_{k-1 \text{ kpl.}}, 1, 0, \dots) \in \ell^p$, kun $k \in \mathbb{N}$, ja

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots), \quad x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p,$$

kun $n \in \mathbb{N}$. Tällöin $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$ avaruudessa ℓ^p, koska

$$\lim_{n\to\infty} \| x - s_n(x) \|_p^p = \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p \Big) = 0$$

(oikealla suppenevan sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$ jäännöstermi). Jos $x^* \in (\ell^p)^*$, $x = (x_k) \in \ell^p$ ja $n \in \mathbb{N}$, niin lineaarisuuden nojalla

$$\langle\, s_n(x) \,|\, x^* \,\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \langle e_k, x^* \rangle =: \sum_{k=1}^{n} x_k y_k,$$

missä merkitsemme $y_k = \langle e_k, x^* \rangle$ kun $k \in \mathbb{N}$. Koska $\lim_n s_n(x) = x$ ja x^* on jatkuva, niin $\lim_n \langle s_n(x), x^* \rangle = \langle x, x^* \rangle$, joten

$$\langle x, x^* \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k. \tag{9.4}$$

Näytämme seuraavaksi, että $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\langle e_k, x^* \rangle)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^q$. Merkitään tätä varten

$$\alpha_k = \begin{cases} \dfrac{|y_k|^q}{y_k}, & \text{kun } y_k \neq 0, \\ 0, & \text{kun } y_k = 0, \end{cases}$$

ja asetetaan $w_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \in \ell^p$ kun $n = 1, 2, \dots$. Tällöin havaitaan, että

$$\| w_n \|_p^p = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^p = \sum_{k=1}^{n} |y_k|^{p(q-1)} = \sum_{k=1}^{n} |y_k|^q,$$

koska $p = \frac{q}{q-1}$. Sijoitetaan nyt kaavaan (9.4) vektorin x paikalle w_n, jolloin

$$\begin{aligned} A := \sum_{k=1}^{n} |y_k|^q &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k = \langle w_n, x^* \rangle = |\langle w_n, x^* \rangle| \le \| w_n \|_p \| x^* \| \\ &= \Big(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \Big)^{1/p} \| x^* \| = A^{1/p} \| x^* \|. \end{aligned} \tag{9.5}$$

Kerrotaan yhtälö (9.5) puolittain luvulla $A^{-1/p}$, jolloin

$$A^{1-1/p} = A^{1/q} = \Big(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \Big)^{1/q} \leq \| \, x^* \, \|, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Antamalla $n \to \infty$ saadaan $y = (y_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^q$ ja $\| \, y \, \|_q \leq \| \, x^* \, \|$.

Määrittelemme tämän perusteella kuvauksen $T \colon (\ell^p)^* \to \ell^q$ asettaen

$$Tx^* = y,$$

missä $y = (y_k)_{k \in \mathbb{N}} = (\langle e_k, x^* \rangle)_{k \in \mathbb{N}}$. Suoraan määritelmästä seuraa, että T on lineaarinen kuvaus, ja edellä totesimme, että

$$\| \, Tx^* \, \|_q \leq \| \, x^* \, \|, \quad x^* \in (\ell^p)^*,$$

joten T on jatkuva. Jos $Tx^* = \bar{0}$, niin $\langle e_k, x^* \rangle = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, ja siis

$$\langle s_n(x), x^* \rangle = \sum_{k=0}^{n} x_k \langle e_k, x^* \rangle = 0,$$

kaikilla jonoilla $x = (x_k) \in \ell^p$ ja $n \in \mathbb{N}$. Koska x^* on jatkuva ja $\lim_n s_n(x) = x$, niin rajalla $\langle x, x^* \rangle = 0$ jokaisella $x \in \ell^p$, eli $x^* = \bar{0}$. Näin T on injektio.

Kääntäen, jos $x = (x_k) \in \ell^p$ ja $y = (y_k) \in \ell^q$, niin Hölderin epäyhtälön (Lause 2.20 sivulla 18) mukaan

$$\Big| \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \Big| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q \Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Tästä seuraa, että kuvaus $\Lambda_y \colon x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ on jatkuva lineaarinen kuvaus $\ell^p \to \mathbb{K}$, joten Λ_y on eräs duaaliavaruuden $(\ell^p)^*$ alkio, ja lisäksi

$$\| \, \Lambda_y \, \| \leq \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q \Big)^{\frac{1}{q}} = \| \, y \, \|_q.$$

Määritellään kuvaus S ehdolla $y \mapsto \Lambda_y$, kun $y \in \ell^q$. Edellisen perusteella S on jatkuva lineaarinen kuvaus $\ell^q \to (\ell^p)^*$, ja $\| \, Sy \, \| \leq \| \, y \, \|_q$ jokaisella $y \in \ell^q$.

Jos $y = (y_k) \in \ell^q$, niin operaattorin S määritelmästa seuraa $\langle e_k, Sy \rangle = \Lambda_y(e_k) = y_k$ jokaisella $k \in \mathbb{N}$, joten

$$TSy = (\langle e_k, Sy \rangle)_{k \in \mathbb{N}} = y \quad \text{kaikilla } y = (y_k) \in \ell^q.$$

Tästä päätellään, että $T((\ell^p)^*) = \ell^q$ (eli T on surjektio), ja koska T jo edellä todettiin injektioksi, se on siis bijektio. Lisäksi S on operaattorin T käänteiskuvaus T^{-1} yksikäsitteisyyyden (= kuvauksen T injektiivisyyden) perusteella.

Olkoon lopuksi $x^* \in (\ell^p)^*$ ja $y = Tx^*$. Tällöin siis $Sy = x^*$ ja

$$\| \, x^* \, \| = \| \, Sy \, \| \leq \| \, y \, \|_q = \| \, Tx^* \, \|_q \leq \| \, x^* \, \|.$$

Tästä seuraa, että $\| Tx^* \|_q = \| x^* \|$, joten T on isometrinen isomorfismi $(\ell^p)^* \to \ell^q$. Voimme siten samaistaa avaruudet $(\ell^p)^*$ ja ℓ^q isometrian T välityksellä. (Tämän takia usein merkitäänkin $q = p'$.)

Koska p ja q ovat symmetrisessä asemassa, niin vastaavasti ℓ^p ja $(\ell^q)^*$ voidaan samaistaa keskenään isometrisesti isomorfisina avaruuksina. Siispä

$$((\ell^p)^*)^* \cong (\ell^q)^* \cong \ell^p.$$

(Tämä tulos voidaan ilmaista sanomalla, että ℓ^p on *refleksiivinen* avaruus, kun $1 < p < \infty$; käsitteen tarkka määritelmä annetaan myöhemmin).

Jos $x = (x_k) \in \ell^p$ ja $x^* = (y_k) \in \ell^q$, niin kanoninen bilineaarimuoto $\ell^p \times \ell^q \to \mathbb{K}$ (ja siten näiden avaruuksien duaaliteetti) voidaan konkreettisesti esittää muodossa (9.4):

$$\langle x, x^* \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$$

Erikoistapauksessa $p = q = 2$ tarkasteltavana on Hilbertin avaruus ℓ^2. Tällöin on edellisen esimerkin mukaan $(\ell^2)^* \cong \ell^2$ ja kanoninen bilineaarimuoto voidaan tulkita myös sisätuloksi:

$$\langle x, x^* \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{\overline{y_k}} = (\, x \mid \overline{y} \,),$$

missä $\overline{y} = (\overline{y_k})_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^2$. Kuvaus $y = (y_k)_{k \in \mathbb{N}} \mapsto (\overline{y_k})_{k \in \mathbb{N}} = \overline{y}$ on tässä tapauksessa liittolineaarinen, isometrinen bijektio $\ell^2 \to (\ell^2)^*$. Tämä on erikoistapaus allaolevasta Fréchet-Rieszin lauseesta 9.7.

9.6. **Esimerkki.** (1) Esimerkin 9.3 kaltaisella päättelyllä voidaan osoittaa, että avaruuden c_0 duaali c_0^* on isometrisesti isomorfinen avaruuden ℓ^1 kanssa (HT 9:3), ja avaruuden ℓ^1 duaali $(\ell^1)^*$ isometrisesti isomorfinen avaruuden ℓ^∞ kanssa. Sen sijaan avaruuden ℓ^∞ duaali $(\ell^\infty)^*$ *ei ole* isomorfinen avaruuden ℓ^1 kanssa. (Itse asiassa, duaalia $(\ell^\infty)^*$ ei voida esittää minään jonoavaruutena, vaan sen ”luonnollisen” esityksen muodostavat äärellisesti additiiviset joukkofunktiot $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{K}$, eli äärellisesti additiiviset mitat joukossa $\mathbb{N}$ (kts. Köthe, Topologische Lineare Räume, §31).)
(2) [*Lisätietoja*] Olkoon $n \geq 1$ ja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen osajoukko, sekä μ n-ulotteinen Lebesguen mitta avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Olkoon $1 < p < \infty$. Silloin avaruuden $L^p(\Omega)$ duaali on luonnollisella tavalla isometrisesti isomorfinen avaruuden $L^q(\Omega)$ kanssa, missä q on jälleen p:n duaalieksponentti. Tarkemmin sanoen: jokaista $\varphi \in (L^p(\Omega))^*$ vastaa yksikäsitteinen $g \in L^q(\Omega)$, jolle $\| \varphi \| = \| g \|_q$ ja

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x) g(x) d\mu(x), \quad \text{kun } f \in L^p(\Omega).$$

(Katso esimerkiksi W. Rudin: *Real and Complex analysis*, Theorem 6.16. Tulos pätee myös tapauksessa $p = 1$ (jolloin $q = \infty$), mutta tulos ei ole voimassa, kun $p = \infty$.)

Hilbertin avaruuden duaali

Olkoon E Hilbertin avaruus jonka skalaarikunta on $\mathbb{K}$ ja $x \in E$. Olkoon $f_x \colon E \to \mathbb{K}$ kuvaus

$$z \mapsto (\, z \,|\, x\,), \quad z \in E,$$

missä $(\cdot|\cdot)$ on sisätulo $E \times E \to \mathbb{K}$. Tällöin f_x on lineaarinen sisätulon ominaisuuksien nojalla. Cauchy–Schwarzin epäyhtälön mukaan

$$|f_x(z)| = |(z|x)| \leq \|\, z\,\| \|\, x\,\|$$

jokaisella $z \in E$, joten f_x on jatkuva eli $f_x \in E^*$. Seuraavan keskeisen tuloksen mukaan Hilbertin avaruuden E *jokainen* jatkuva lineaarimuoto voidaan itse asiassa esittää sisätulon avulla muodossa $z \mapsto (\, z \,|\, x\,) = f_x(z)$, missä vektori $x \in E$ on yksikäsitteisesti määrätty ja vastaavan lineaarifunktionaalin normi $\|f_x\| = \|\, x\,\|$. Kuvausta $x \mapsto f_x$ sanotaan usein *kanoniseksi kuvaukseksi* $E \to E^*$.

9.7. **Lause** (Fréchet–Rieszin lause)**.** *Jos E on Hilbertin avaruus ja $f_x(z) = (\, z \,|\, x\,)$, kun $x \in E$ ja $z \in E$, niin kuvaus $\Lambda \colon x \mapsto f_x$ määrittelee liittolineaarisen isometrisen bijektion $E \to E^*$.*

Todistus. Kuvauksen Λ *liittolineaarisuus* tarkoittaa, että Λ on additiivinen ja $\Lambda(cx) = \overline{c}\Lambda x$ kaikilla $x \in E$ ja $c \in \mathbb{K}$. Jälkimmäinen ominaisuus seuraa heti sisätulon ominaisuuksista: $f_{cx}(z) = (z|cx) = \overline{c}(z|x) = \overline{c}f_x(z)$ kaikilla $z \in E$. Edellä todettiin, että

$$|f_x(z)| \leq \|\, x\,\| \|\, z\,\|,$$

joten $f_x \in E^*$ ja $\|\, f_x\,\| \leq \|\, x\,\|$. Toisaalta, valitsemalla $z = x$ saadaan

$$\|\, x\,\|^2 = (\, x \,|\, x\,) = f_x(x) = |f_x(x)| \leq \|\, f_x\,\| \|\, x\,\|,$$

joten myös $\|\, x\,\| \leq \|\, f_x\,\|$. Siis $\|\, f_x\,\| = \|\, x\,\|$ kaikilla $x \in E$, eli kuvaus Λ on isometria $E \to E^*$.

Koska jokainen additiivinen isometria on injektio (ehdosta $f_x = f_y$ seuraa $\Lambda(x - y) = f_{x-y} = \overline{0}$), niin olemme jo osoittaneet, että kuvaus Λ on jatkuva liittolineaarinen injektio, joka on lisäksi isometria. Meidän on vielä näytettävä, että Λ on surjektio $E \to E^*$ (tämä on Fréchet–Rieszin lauseen varsinainen sisältö).

Olkoon siis $f \in E^*$ mielivaltainen. Jos $f = \bar{0}$, niin $f(z) = (\, z \,|\, \bar{0} \,)$ jokaisella $z \in E$, eli $f = f_{\bar{0}}$. Voidaan siis olettaa, että $f \neq \bar{0}$. Merkitään

$$M = \mathrm{Ker}(f) = \{\ z \in E : \ f(z) = 0\ \}.$$

Koska f on jatkuva ja yksiö $\{0\}$ on suljettu skalaarikunnassa $\mathbb{K}$, on $M = f^{-1}(\{0\})$ avaruuden E suljettu (*Topologia I*, 6.13) vektorialiavaruus. Lauseen 4.27 sivulla 75 nojalla $E = M \oplus M^{\perp}$, missä ortokomplementti $M^{\perp} = \{x \in E : x \perp z$ kaikilla $z \in M\}$. Koska $f \neq \bar{0}$, niin $M \neq E$ ja siten $M^{\perp} \neq \{\bar{0}\}$. Siispä voidaan kiinnittää sellainen $y \in M^{\perp}$, että $y \neq \bar{0}$.

Olkoon $z \in E$ mielivaltainen. Havaitaan, että tällöin lineaarisuuden perusteella

$$f(f(z)y - f(y)z) = f(z)f(y) - f(y)f(z) = 0,$$

joten $f(z)y - f(y)z \in \mathrm{Ker}(f) = M$. Koska $y \in M^{\perp}$, niin

$$0 = (\, f(z)y - f(y)z \,|\, y \,) = f(z)(\, y \,|\, y \,) - f(y)(z|y).$$

Edellä $(\, y \,|\, y \,) = \|\, y \,\|^2 > 0$ (koska $y \neq \bar{0}$), joten ratkaisemalla saadaan esitys

$$f(z) = \frac{f(y)}{\|\, y \,\|^2}(z|y) = \Big(\, z \,|\, \overline{\frac{f(y)}{\|\, y \,\|^2}} y \,\Big) =: (\, z \,|\, x \,), \quad \text{kun } z \in E,$$

missä $x = \overline{\frac{f(y)}{\|\, y \,\|^2}} y$. Olemme siis osoittaneet, että $f(z) = (\, z \,|\, x \,) = f_x(z)$ jokaisella $z \in E$, joten $f = f_x = \Lambda x$. Siten kuvaus Λ on surjektio $E \to E^*$. $\square$

Esimerkiksi, olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen osajoukko, sekä μ n-ulotteinen Lebesguen mitta avaruudessa $\mathbb{R}^n$, missä $n \geq 1$. Tällöin Fréchet–Rieszin lauseen 9.7 nojalla jokaista funktionaalia $\varphi \in (L^2(\Omega))^*$ vastaa yksikäsitteinen funktio $g \in L^2(\Omega)$, jolle $\|\, \varphi \,\| = \|g\|_2$ ja

$$\varphi(f) = (\, f \,|\, g \,) = \int_{\Omega} f(x)\overline{g(x)}d\mu(x), \quad \text{kun } f \in L^2(\Omega).$$

Hahn–Banachin lauseet

Olkoon E Hilbertin avaruus, $M \subset E$ sen suljettu aliavaruus, F normiavaruus ja $T \in \mathscr{L}(M, F)$ jatkuva lineaarinen operaattori. Tällöin T voidaan jatkaa jatkuvaksi lineaarikuvaukseksi koko avaruuteen E, toisin sanoen, löytyy sellainen $T_1 \in \mathscr{L}(E, F)$, jolle $T_1 x = Tx$, kun $x \in M$ ja vieläpä $\|\, T_1 \,\| = \|\, T \,\|$. Tämä jatko saadaan käyttämällä ortoprojektiota $P_M \colon E \to M$ ja määrittelemällä $T_1 := TP_M$. (Jätämme lukijalle vapaaksi harjoitustehtäväksi näyttää, että T_1 on vaadittu jatko; luvusta 4 tarvitaan tieto, että jokaisella $x \in E$ on ykskäsitteinen esitys $x = x_1 + x_2$, missä $x_1 \in M, x_2 \in M^{\perp}$ sekä $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$).

Kuitenkin, jos edellä E onkin mielivaltainen Banachin avaruus, niin ei tällä *jatkamisongelmalla* ole aina ratkaisua. Esimerkiksi, jos $T = I : c_0 \to c_0$ on identtinen kuvaus ja $M = c_0 \subset \ell^\infty = E$, niin *voidaan* osoittaa ettei ole olemassa jatkuvaa operaattoria $T_1 \in \mathscr{L}(\ell^\infty, c_0)$, jolle pätisi $T_1 x = x$ kaikilla $x \in c_0$. (Syynä tähän on se varsin epä-triviaali seikka, ettei ole olemassa jatkuvaa lineaariprojektioita $P \in \mathcal{L}(\ell^\infty)$, jolle siis $P^2 = P$ ja kuva $P(\ell^\infty) = c_0$.)

Hahn–Banachin lauseet liittyvät paljon rajoitetumpaan jatkamisongelmaan, jossa tarkastellaan *lineaarisia funktionaaleja*, eli kuvausten maaliavaruutena on skalaarikunta $F = \mathbb{K}$. Hahn–Banachin lauseet liittyvät esimerkiksi myös seuraavaan ongelmaan: jos E on normiavaruus ja $x, y \in E$, $x \neq y$, niin löytyykö sellainen duaalin E^* alkio x^*, että

$$\langle\, x \,|\, x^* \,\rangle \neq \langle\, y \,|\, x^* \,\rangle?$$

Tämä on eräänlainen *tunnistamisongelma*; kykenemmekö me erottamaan avaruuden E vektoreita jatkuvilla lineaarisilla funktionaaleilla ? (Yleisemmin, minkälaiset konveksit joukot voidaan "separoida" toisistaan duaalin E^* alkioilla?)

Hahn–Banachin lauseet antavat näihin ongelmiin vastauksen. Tulos on varsin syvällinen, ja se on tietyssä mielessä ekvivalentti valinta-aksiomin kanssa (Zornin lemman välityksellä).

Aloitamme todistuksen seuraavalla (apu)tuloksella, jota kannattaa ajatella eräänlaisena induktioaskeleena, sillä todistuksessa myöhemmin käyttöön tuleva Zornin lemma on myös ekvivalentti ns. transfiniittisen induktion kanssa. Keskitymme aluksi reaalikertoimiseen tapaukseen (kompleksiset vektoriavaruudet astuvat kuvaan Lauseessa 9.13).

9.8. **Lemma.** *Olkoon E vektoriavaruus, jonka skalaarikuntana on $\mathbb{R}$. Olkoon $M \subset E$ aito vektorialiavaruus, p seminormi avaruudessa E ja f sellainen lineaarinen funktionaali $M \to \mathbb{R}$, että $|f(u)| \leq p(u)$ aina, kun $u \in M$. Jos $z \in E \setminus M$ ja $M_1 = M \oplus span\,(z)$, niin tällöin on olemassa sellainen lineaarinen funktionaali $f_1 \colon M_1 \to \mathbb{R}$, että $f_1(u) = f(u)$ jokaisella $u \in M$ ja $|f_1(w)| \leq p(w)$ kaikilla $w \in M_1$.*

Todistus. Jos $x, y \in M$ ovat mielivaltaisia, niin

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) = f(x-y) \leq p(x-y) &\leq p(x+z) + p(-y-z) \\ &= p(x+z) + p(y+z), \end{aligned}$$

koska p on seminormi avaruudessa E. Näin siis

$$-p(y+z) - f(y) \leq p(x+z) - f(x),$$

kaikilla $x, y \in M$. Koska edellisen arvion oikea puoli ei riipu vektorista $y \in M$, niin

$$\sup_{y \in M} (-p(y+z) - f(y)) \leq p(x+z) - f(x)$$

ja edelleen, koska tämän arvion vasen puoli ei riipu vektorista $x \in M$, niin

$$\sup_{y\in M}(-p(y+z)-f(y)) \le \inf_{x\in M}(p(x+z)-f(x)).$$

Tästä voimme päätellä, että on olemassa sellainen vakio $c \in \mathbb{R}$, että

$$-p(y+z)-f(y) \le c \le p(x+z)-f(x) \tag{9.9}$$

kaikilla $x, y \in M$.

Vakion c avulla saamme nyt halutun laajennuksen määriteltyä aliavaruuteen M_1. Jos $w \in M_1 = M \oplus \operatorname{span}(z)$, niin $w = u + \lambda z$, missä $u \in M$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$ ovat yksikäsitteiset (tarkista!). Määritellään $f_1 \colon M_1 \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$f_1(w) = f_1(u+\lambda z) = f(u) + \lambda c,$$

missä c on epäyhtälöparissa (9.9) esiintyvä vakio. (Erityisesti siis $f_1(z) = c$ kun valitaan $u = \bar{0}$ ja $\lambda = 1$.) Tällöin $f_1 \in (M_1)^\dagger$ esityksen yksikäsitteisyyden perusteella, ja $f_1(u) = f(u)$ jokaisella $u \in M$.

Väite: $|f_1(w)| \le p(w)$ kaikilla $w \in W_1$.

Tapaus $\lambda = 0$ on selvä, koska $|f| \le p$ aliavaruudessa M. Voidaan siis olettaa, että $\lambda \neq 0$. Epäyhtälöparista (9.9) seuraa valitsemalla $x = y = \lambda^{-1}u \in M$, että

$$-p(\lambda^{-1}u+z)-f(\lambda^{-1}u) \le c \le p(\lambda^{-1}u+z)-f(\lambda^{-1}u),$$

kun $u \in M$ ja siis

$$-\frac{1}{|\lambda|}p(u+\lambda z)-\frac{1}{\lambda}f(u) \le c \le \frac{1}{|\lambda|}p(u+\lambda z)-\frac{1}{\lambda}f(u).$$

Tämä on yhtäpitävä epäyhtälöparin

$$-\frac{1}{|\lambda|}p(w) \le c + \frac{1}{\lambda}f(u)) \le \frac{1}{|\lambda|}p(w) \tag{9.10}$$

kanssa. Koska $w = u + \lambda z$, niin

$$c + \frac{1}{\lambda}f(u) = \frac{1}{\lambda}(f(u)+\lambda c) = \frac{1}{\lambda}f_1(w),$$

ja havaitaan, että epäyhtälöpari (9.10) voidaan kirjoittaa muodossa

$$-\frac{1}{|\lambda|}p(w) \le \frac{1}{\lambda}f_1(w) \le \frac{1}{|\lambda|}p(w) \quad \text{ eli } |f_1(w)| \le p(w).$$

Tämä osoittaa väitteen. □

Lemma 9.8 ilmaisee siis sen, että seminormin majoroima vektorialiavaruuden lineaarimuoto voidaan jatkaa samanlaiseksi muodoksi yhtä dimensiota laajempaan avaruuteen. Seuraavaksi osoitetaan, että se voidaan jatkaa koko avaruuteen. Tähän tarkoitukseen käytetään *Zornin lemmaa* (kts. Väisälä: Topologia II, Liite, ss. 170-173), ja todistuksen tämä osa on eräänlainen maksimalisuusargumentti.

9.11. **Lause** (Hahn–Banach). *Olkoon E $\mathbb{R}$-vektoriavaruus, M sen vektorialiavaruus, p seminormi avaruudessa E ja f sellainen lineaarinen funktionaali $M \to \mathbb{R}$, että $|f(u)| \le p(u)$, kun $u \in M$. Tällöin on olemassa sellainen lineaarinen funktionaali $g\colon E \to \mathbb{R}$, että $g(u) = f(u)$, kun $u \in M$ ja $|g(x)| \le p(x)$, kun $x \in E$.*

Todistus. Todistuksen alkuun tarvitsemme hieman määritelmiä. Jos N_1, N_2 ovat avaruuden E vektorialiavaruuksia, $h_1 \in L(N_1, \mathbb{R})$ ja $h_2 \in L(N_2, \mathbb{R})$ ovat funktionaaleja, niin asetamme

$$h_1 \prec h_2 \iff N_1 \subset N_2 \ \text{ ja } \ h_2(x) = h_1(x) \text{ kaikilla } x \in N_1.$$

Jos $N \supset M$ on avaruuden E vektorialiavaruus, niin asetamme

$$\mathscr{F}_N = \{\, h \in L(N, \mathbb{R}) : \ f \prec h, \ \text{ ja } |h(x)| \le p(x) \text{ kaikilla } x \in N \,\}.$$

Merkitsemme lopuksi

$$\mathscr{F} = \bigcup \{\, \mathscr{F}_N : \ N \text{ on avaruuden } E \text{ aliavaruus ja } N \supset M \,\}.$$

Tällöin $f \in \mathscr{F}_M \subset \mathscr{F}$, joten $\mathscr{F} \ne \emptyset$. Edelleen havaitsemme, että $(\mathscr{F}, \prec)$ muodostaa osittain järjestetyn joukon. Tämä tarkoittaa, että seuraavat ominaisuudet ovat voimassa $\mathscr{F}$:ssa (kohdat (i) - (iii) voidaan helposti verifioida määritelmistä):
(i) $h \prec h$ kaikilla $h \in \mathscr{F}$,
(ii) jos $h_1 \prec h_2$ ja $h_2 \prec h_1$, niin $h_1 = h_2$,
(iii) jos $h_1, h_2, h_3 \in \mathscr{F}$ ja $h_1 \prec h_2$ sekä $h_2 \prec h_3$, niin $h_1 \prec h_3$. (Kohdat (i) - (iii) voidaan helposti verifioida määritelmistä.)

Olkoon

$$\mathscr{G} = \{\, h_i \in \mathscr{F}_{N_i} : \ i \in \mathcal{I} \,\}$$

jokin joukon $\mathscr{F}$ täysin järjestetty osaperhe. Tämä tarkoittaa, että jos $h, g \in \mathscr{G}$, niin $h \prec g$ tai $g \prec h$.

Yhdiste

$$N = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} N_i$$

on avaruuden E vektorialiavaruus, kuten helposti huomataan sen perusteella, että $\mathscr{G}$ on täysin järjestetty. (Jos $x \in N_i$ ja $y \in N_j$, niin $N_i \subset N_j$ tai $N_j \subset N_i$. Ensimmäisessä tapauksessa $x + y \in N_j$ ja jälkimmäisessä $x + y \in N_i$.) Voimme määritellä lineaarimuodon $k \in L(N, \mathbb{R})$ asettamalla

$$k(x) = h_i(x), \qquad \text{kun } x \in N_i.$$

Kuvaus k on hyvin määritelty, sillä jos $x \in N_i \cap N_j$, niin tällöin $h_i(x) = h_j(x)$. Kuvauksen k lineaarisuus seuraa jälleen välittömästi siitä, että $\mathscr{G}$ on täysin järjestetty. Suoraan kuvauksen k määritelmästä saadaan, että $k \in \mathscr{F}$ ja $h_i \prec k$ kaikilla $i \in \mathcal{I}$. Toisin sanoen, k on osaperheen $\mathscr{G}$ yläraja perheessä $(\mathscr{F}, \prec)$.

Zornin lemman (kts. Väisälä, *Topologia II*, Z.4.-Z.5) nojalla joukossa $\mathscr{F}$ on siten (ainakin yksi) maksimaalinen alkio $g\colon W \to \mathbb{R}$. (*Maksimaalisuus* tarkoittaa tässä, ettei ole olemassa $h \in \mathscr{F}$ jolle $g \prec h$ ja $g \neq h$. Tosin sanoen, jos $g \prec h$ ja $h \in \mathscr{F}$, niin $h = g$.) Koska $g \in \mathscr{F}$, niin määritelmän nojalla $g(x) = f(x)$ kaikilla $x \in M$ ja $|g(w)| \leq p(w)$ kaikilla $w \in W$.

Väite. Kuvaus g on etsitty laajentava funktionaali, eli $W = E$.

Vastaoletus: $W \neq E$, jolloin on olemassa $z \in E \setminus W$. Lemman 9.8 nojalla löytyy sellainen lineaarimuoto $g_1\colon W_1 = W \oplus \mathrm{span}\,(z) \to \mathbb{R}$, että $g(x) = g_1(x)$ kun $x \in W$ ja lisäksi $|g(x)| \leq p(x)$ kaikilla $x \in W_1$. Todistuksen merkinnöin tämä tarkoittaa, että $g_1 \in \mathscr{F}_{W_1}$ ja $g \prec g_1$. Siispä $g_1 \in \mathscr{F}$, mutta $g \neq g_1$, joten saadaan ristiriita ettei g olekaan maksimaalinen alkio $\mathscr{F}$:ssa. □

Lauseen 9.11 perustyyppi on ensimmäisen kerran esiintynyt (hieman rajoitetummassa muodossa) eräässä Hans Hahnin julkaisussa vuonna 1927, ja hiukan Lausetta 9.11 yleisemmässä muodossa Stefan Banachilla vuodelta 1929. Näissä on oleellista se, että E on reaalinen vektoriavaruus. Tämän lauseen yleistivät kompleksiseen vektoriavaruuteen vuonna 1938 samanaikaisesti Yhdysvalloissa Bohnenblust ja Sobczyk, sekä Neuvostoliitossa Suhomlinov.

Tarkastelemme tätä varten ensin tarkemmin $\mathbb{C}$-lineaarisen ja $\mathbb{R}$-lineaarisen funktionaalien yhteyksiä. Olkoon E kompleksinen vektoriavaruus. Koska $\mathbb{R}$ on kompleksilukujen $\mathbb{C}$ alikunta, on siis tulo λx määritelty, kun $\lambda \in \mathbb{R}$ ja $x \in E$, joten E on luonnollisella tavalla varustettu myös $\mathbb{R}$-vektoriavaruuden struktuurilla. Merkitsemme E_r:llä avaruutta E tulkittuna reaaliseksi vektoriavaruudeksi.

Olkoon E kompleksinen vektoriavaruus ja $f \in E^\dagger$, eli f on $\mathbb{C}$-lineaarinen funktionaali $E \to \mathbb{C}$. Merkitsemme

$$f(x) = f_1(x) + i f_2(x), \text{ kun } x \in E,$$

missä reaali- ja imaginaariosat

$$f_1(x) = \frac{1}{2}(f(x) + \overline{f(x)}) \in \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \frac{1}{2i}(f(x) - \overline{f(x)}) \in \mathbb{R}$$

kun $x \in E$. Tällöin f_1, f_2 ovat $\mathbb{R}$-lineaarisia kuvauksia $E_r \to \mathbb{R}$ (mieti miksi!). Koska $f(ix) = if(x)$, kun $x \in E$, niin saadaan

$$f_1(ix) + i f_2(ix) = f(ix) = i(f_1(x) + i f_2(x)) = i f_1(x) - f_2(x).$$

Tästä seuraa, että

$$f_1(ix) = \mathrm{Re}\,(f(ix)) = \mathrm{Re}\,(i f_1(x) - f_2(x)) = -f_2(x),$$

eli $f_2(x) = -f_1(ix)$. Olemme siis saaneet esityksen

$$f(x) = f_1(x) - if_1(ix), \quad x \in E. \tag{9.12}$$

Kääntäen, jos f_1 on $\mathbb{R}$-lineaarinen funktionaali $E_r \to \mathbb{R}$, eli $f_1 \in (E_r)^\dagger$, niin asetamme

$$f(x) = f_1(x) - if_1(ix), \quad x \in E.$$

Siis f on kuvaus $E \to \mathbb{C}$. Koska $f_1(x+y) = f_1(x) + f_1(y)$, niin välittömästi toteamme kuvauksen f määritelmän nojalla, että $f(x+y) = f(x)+f(y)$ kaikilla $x, y \in E$. Jos $x \in E$, niin

$$f(ix) = f_1(ix) - if_1(-x) = f_1(ix) + if_1(x) = i(f_1(x) - if_1(ix)) = if(x).$$

Olkoon nyt $c = a + ib \in \mathbb{C}$, missä $a, b \in \mathbb{R}$, ja olkoon $x \in E$. Edellä tehtyjen havaintojen nojalla on tällöin

$$f(cx) = f((a+ib)x) = f(ax)+f(ibx) = af(x)+if(bx) = (a+ib)f(x) = cf(x).$$

Siis f on $\mathbb{C}$-lineaarinen funktionaali $E \to \mathbb{C}$, eli $f \in E^\dagger$.

Olemme siten todenneet, että algebrallisen duaalin $E^\dagger$ alkiot ovat täsmälleen ne kuvaukset $f\colon E \to \mathbb{C}$, jotka voidaan esittää muodossa

$$f(x) = f_1(x) - if_1(ix), \quad x \in E,$$

missä f_1 on $\mathbb{R}$-lineaarinen funktionaali $E_r \to \mathbb{R}$.

Tämän alustuksen jälkeen voimme nyt osoittaa kompleksisen version Hahn–Banachin lauseesta.

9.13. **Lause** (Bohnenblust–Sobczyk–Suhomlinov)**.** *Olkoon E vektoriavaruus, jonka skalaarikuntana on $\mathbb{K}$, missä $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tai $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Olkoon M avaruuden E vektorialiavaruus, p seminormi avaruudessa E ja f sellainen lineaarinen funktionaali $M \to \mathbb{K}$, että $|f(u)| \le p(u)$, kun $u \in M$. Tällöin on olemassa sellainen lineaarinen funktionaali $g\colon E \to \mathbb{K}$, että $g(u) = f(u)$, kun $u \in M$, ja $|g(x)| \le p(x)$ kaikilla $x \in E$.*

Todistus. Tapaus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on sama kuin Lause 9.11. Tapaus $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ palautetaan reaaliselle versiolle 9.11 seuraavasti.

Nimittäin, edellisen tarkastelun perusteella kompleksisessa tapauksessa

$$f(u) = f_1(u) - if_1(iu), \tag{9.14}$$

kun $u \in M$, missä f_1 on $\mathbb{R}$-lineaarimuoto $M_r \to \mathbb{R}$. Koska reaaliosa

$$f_1(x) = \frac{1}{2}(f(x) + \overline{f(x)}),$$

niin

$$|f_1(x)| = \frac{1}{2}|f(x) + \overline{f(x)}| \leq \frac{1}{2}(|f(x)| + |\overline{f(x)}|) = |f(x)| \leq p(x)$$

kaikilla $x \in M$.

Hahn–Banachin lauseen 9.11 nojalla on siis olemassa sellainen $\mathbb{R}$-lineaarinen funktionaali $g_1\colon E \to \mathbb{R}$, että $g_1(u) = f_1(u)$, kun $u \in M$, ja $|g_1(x)| \leq p(x)$ kaikilla $x \in E_r$. Asetamme:

$$g(x) = g_1(x) - ig_1(ix), \quad x \in E. \tag{9.15}$$

Tällöin g on $\mathbb{C}$-lineaarinen funktionaali $E \to \mathbb{C}$ ja jos $u \in M$, niin

$$g(u) = g_1(u) - ig_1(iu) = f_1(u) - if_1(iu) = f(u).$$

On lopuksi osoitettava, että $|g(x)| \leq p(x)$ jokaisella $x \in E$. Olkoon $x \in E$ annettu. Tällöin on olemassa sellainen $\lambda \in \mathbb{C}$, että $|\lambda| = 1$ ja

$$|g(x)| = \lambda g(x).$$

Kuvaus g on $\mathbb{C}$-lineaarinen, joten $g(\lambda x) = \lambda g(x) = |g(x)| \geq 0$, jolloin kuvauksen g määritelmässä (9.15) imaginaariosa häviää, eli

$$g(\lambda x) = g_1(\lambda x).$$

Koska $|\lambda| = 1$, niin edellisen perusteella siis

$$|g(x)| = |\lambda g(x)| = |g(\lambda x)| = |g_1(\lambda x)| \leq p(\lambda x) = |\lambda| p(x) = p(x).$$

Näin ollen g täyttää vaaditut ehdot. $\square$

Huomautus. Myös Lausetta 9.13 sanotaan usein *Hahn–Banachin* lauseeksi, samoin kuin esimerkiksi seuraavaa lausetta (Lause 9.16), jota voidaan pitää Lauseen 9.13 seurauslauseena.

Sovellamme edellä olleita lauseita erilaisten *jatkuvien* lineaaristen funktionaalien rakentamiseen normiavaruuksissa tai Banachin avaruuksissa. Huomaa, että seuravassa tuloksessa vektorialiavaruus M ei oleteta suljetuksi.

9.16. **Lause** (Hahn-Banachin lause versio 2)**.** *Olkoon E normiavaruus, M sen vektorialiavaruus ja $u^* \in M^*$ jatkuva lineaarinen funktionaali. Tällöin on olemassa sellainen $x^* \in E^*$, että $\langle u \,|\, x^* \rangle = \langle u \,|\, u^* \rangle$, kun $u \in M$, ja $\| x^* \| = \| u^* \|$.*

Todistus. Määritellään (semi)normi p avaruudessa E asettamalla

$$p(x) = \| x \| \, \| u^* \|,$$

kun $x \in E$. Tällöin

$$|\langle\, u \,|\, u^* \,\rangle| \leq \|\, u \,\|\, \|\, u^* \,\| = p(u),$$

kun $u \in M$ ja siis Lauseen 9.13 nojalla on olemassa sellainen lineaarinen kuvaus $x^* \in E^\dagger$, että $\langle\, u \,|\, x^* \,\rangle = \langle\, u \,|\, u^* \,\rangle$, kun $u \in M$ ja

$$|\langle\, x \,|\, x^* \,\rangle| \leq p(x) = \|\, x \,\|\, \|\, u^* \,\|$$

kaikilla $x \in E$. Erityisesti, x^* on jatkuva, eli $x^* \in E^*$, ja $\|\, x^* \,\| \leq \|\, u^* \,\|$. Toisaalta,

$$\begin{aligned} \|\, u^* \,\| &= \sup\{\ |\langle\, u \,|\, u^* \,\rangle| :\ \|\, u \,\| \leq 1,\ u \in M\ \} \\ &= \sup\{\ |\langle\, u \,|\, x^* \,\rangle| :\ \|\, u \,\| \leq 1,\ u \in M\ \} \\ &\leq \sup\{\ |\langle\, x \,|\, x^* \,\rangle| :\ \|\, x \,\| \leq 1,\ x \in E\ \} = \|\, x^* \,\|, \end{aligned}$$

joten $\|\, x^* \,\| = \|\, u^* \,\|$. □

Lauseen 9.16 mukaan siis normiavaruuden vektorialiavaruuden jatkuva lineaarimuoto voidaan jatkaa koko avaruuden jatkuvaksi lineaarimuodoksi siten, että sen normi säilyy muuttumattomana (mikä on erityisen hyödyllistä). Lauseen 9.16 avulla voidaan esimerkiksi tuottaa jatkuva funktionaali, joka ”laajentaa” suppenevien jonojen raja-arvon käsitettä kaikille *rajoitetuille* jonoille. Harjoitustehtävien joukossa on lisää esimerkkejä Lauseen 9.16 sovelluksista (vrt. HT 9:10 ja 9:11).

9.17. **Esimerkki** (Banach rajat)**.** On olemassa sellainen jatkuva lineaarinen funktionaali $x^* \colon \ell^\infty \to \mathbb{R}$, että $\|x^*\| = 1$ ja

$$x^*(x) = \lim_{k \to \infty} x_k, \quad \text{kaikilla } x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in c.$$

Tässä $c = \{x = (x_k) : \lim_k x_k \text{ olemassa}\}$ on suppenevien jonojen avaruus. (Muistutus: $c \subset \ell^\infty$ on suljettu vektorialiavaruus sup-normin $\|\cdot\|_\infty$ suhteen, vrt. Lause 3.18).

Todistus. Asetetaan

$$\ell(x) = \lim_{k \to \infty} x_k$$

kun $x = (x_k) \in c$. Raja-arvon perusominaisuuksista seuraa, että $\ell \colon c \to \mathbb{R}$ on lineaarinen. Lisäksi Analyysin I:n perusteella (epäyhtälön säilyminen rajalla)

$$|\ell(x)| = |\lim_{k \to \infty} x_k| \leq \sup_k |x_k| = \|x\|_\infty$$

kaikilla $x = (x_k) \in c$, joten ℓ on jatkuva ja $\|\ell\| \leq 1$. Lisäksi, koska $\ell(\mathbf{1}) = 1$, missä $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots)$, niin $\|\ell\| = 1$.

Hahn-Banachin lauseen (version 9.16) nojalla on olemassa sellainen jatkuva lineaarinen funktionaali $x^* \in (\ell^\infty)^*$, että $\|x^*\| = \|\ell\| = 1$, ja

$$x^*(x) = \ell(x) = \lim_{k\to\infty} x_k, \text{ kun } x = (x_k) \in c.$$

(Tarkemmalla työllä voidaan osoittaa, että lisäksi mm.

$$\liminf_{k\to\infty} x_k \leq x^*(x) \leq \limsup_{k\to\infty} x_k$$

kaikilla $x = (x_k) \in \ell^\infty$.) $\square$

Seuraava tulos jatkaa edelleen Lauseen 9.16 teemoja.

9.18. **Lause** (Hahn-Banachin lause versio 3). *Olkoon M normiavaruuden E vektorialiavaruus, ja $x_0 \in E$ sellainen vektori, että etäisyys*

$$d = \operatorname{dist}(x_0, M) > 0.$$

Tällöin on olemassa sellainen $x^* \in E^*$, että $x^*(M) = \{0\}$, $\langle\, x_0 \,|\, x^* \,\rangle = d$ ja $\|\, x^* \,\| = 1$.

Todistus. Merkitään $W = M \oplus \operatorname{span}(x_0)$. Jos $z \in W$, niin $z = u + \lambda x_0$, missä $u \in M$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$ ovat yksikäsitteisiä. Asetetaan $\langle\, z \,|\, z^* \,\rangle = \lambda d$. Tällöin z^* on lineaarinen muoto $W \to \mathbb{K}$, eli $z^* \in W^\dagger$. Jos $u = \bar{0}$ ja $\lambda = 1$, niin saadaan $\langle\, x_0 \,|\, z^* \,\rangle = d$. Jos taas $\lambda = 0$, niin $\langle\, z \,|\, z^* \,\rangle = 0$ kaikilla $z \in M$, joten $z^*(M) = \{0\}$.

Väitämme, että z^* on jatkuva funktionaali W:ssä, eli $z^* \in W^*$. Olkoon tätä varten $z = u + \lambda x_0 \in W$ mielivaltainen. Voidaan olettaa, että $\lambda \neq 0$. Tällöin

$$|\langle\, z \,|\, z^* \,\rangle| = |\lambda| d \leq |\lambda| \left\| \frac{u}{\lambda} + x_0 \right\| = \|\, u + \lambda x_0 \,\| = \|\, z \,\|,$$

missä $d \leq \|\, \lambda^{-1} u + x_0 \,\|$ koska vektori $-\lambda^{-1} u \in M$. Päättelemme, että $z^* \in W^*$ ja $\|\, z^* \,\| \leq 1$.

Tarkistetaan seuraavaksi, että itse asiassa $\|\, z^* \,\| = 1$. Tätä varten olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Koska $d = \inf\{\, \|\, x_0 - u \,\| : \ u \in M \,\}$, niin löytyy sellainen $u \in M$, että $\|\, x_0 - u \,\| < d + \varepsilon$. Määritelmän mukaan

$$|\langle\, x_0 - u \,|\, z^* \,\rangle| = |\langle\, x_0 \,|\, z^* \,\rangle| = d,$$

joten normitetulle vektorille $\frac{x_0 - u}{\|\, x_0 - u \,\|} \in W$ pätee

$$\begin{aligned}\|\, z^* \,\| = \sup\{\, |\langle\, u \,|\, z^* \,\rangle| : \ u \in W, \ \|\, u \,\| \leq 1 \,\} &\geq \frac{|\langle\, x_0 - u \,|\, z^* \,\rangle|}{\|\, x_0 - u \,\|} \\ = \frac{d}{\|\, x_0 - u \,\|} > \frac{d}{d + \varepsilon} &= 1 - \frac{\varepsilon}{d + \varepsilon}.\end{aligned}$$

Tästä päättelemme, että $\|\, z^* \,\| \geq 1$.

Voimme soveltaa Lausetta 9.16, joka takaa sellainen jatkuvan lineaarifunktionaalin $x^* \in E^*$ olemassaolon, jolle $\langle\, x \,|\, x^* \,\rangle = \langle\, x \,|\, z^* \,\rangle$, kun $x \in W$, ja $\|\, x^* \,\| = \|\, z^* \,\|$. Tällöin siis $x^*(M) = \{0\}$, $\langle\, x_0 \,|\, x^* \,\rangle = \langle\, x_0 \,|\, z^* \,\rangle = d$ ja $\|\, x^* \,\| = 1$. □

9.19. **Seuraus.** *Jos E on normiavaruus ja $\bar{0} \neq x_0 \in E$ on vektori, niin on olemassa sellainen jatkuva lineaarinen funktionaali $x^* \in E^*$, että $\langle\, x_0 \,|\, x^* \,\rangle = \|\, x_0 \,\|$ ja $\|\, x^* \,\| = 1$. Erityisesti, jos $x, y \in E$ ja $x \neq y$, niin on olemassa $x^* \in E^*$, jolle $\langle x, x^* \rangle \neq \langle y, x^* \rangle$.*

Todistus. Jos $M = \{\bar{0}\}$, niin $\mathrm{dist}(x_0, M) = \|\, x_0 \,\|$. Ensimmäinen väite seuraa siten välittömästi Lauseesta 9.18.

Jos $x \neq y$, niin erityisesti on olemassa sellainen $x^* \in E^*$, että

$$\langle x, x^* \rangle - \langle y, x^* \rangle = \langle x - y, x^* \rangle = \|x - y\| > 0.$$

□

Seuraava "duaalikaava" normin laskemiseksi on usein hyödyllinen.

9.20. **Seuraus.** *Jos E on normiavaruus ja $x \in E$, niin*

$$\|\, x \,\| = \max\{\ |\langle\, x \,|\, x^* \,\rangle| :\ x^* \in E^*,\ \|\, x^* \,\| \leq 1\ \}. \tag{9.21}$$

Erityisesti, jos $x \in E$ on sellainen vektori, että $\langle\, x \,|\, x^* \,\rangle = 0$ kaikilla $x^* \in E^*$, niin $x = \bar{0}$.

Todistus. Jos $\|\, x^* \,\| \leq 1$, niin $|\langle\, x \,|\, x^* \,\rangle| \leq \|\, x \,\| \, \|\, x^* \,\| \leq \|\, x \,\|$, joten

$$\sup_{\|\, x^* \,\| \leq 1} |\langle x, x^* \rangle| \leq \|\, x \,\|.$$

Voidaan olettaa, että $x \neq \bar{0}$, koska kaava (10.43) on ilmeinen kun $x = \bar{0}$. Tällöin Seurauksen 9.19 nojalla on olemassa sellainen $x^* \in E^*$, että

$$|\langle\, x \,|\, x^* \,\rangle| = \|\, x \,\| \quad \text{ja} \quad \|\, x^* \,\| = 1,$$

joten $\|\, x \,\| \leq \max |\langle x, x^* \rangle|$.

Jos $\langle\, x \,|\, x^* \,\rangle = 0$ kaikilla $x^* \in E^*$, niin normikaavasta (10.43) seuraa, että $\|x\| = 0$, eli siis $x = \bar{0}$. □

Huomautus. Harjoitustehtävässä 9:2 on annettu esimerkki funktionaalista $x^* \in E^*$, jolle supremumia ei saavuteta funktionaalin x^* normin määritelmässä

$$\|\, x^* \,\| = \sup\{|\langle x, x^* \rangle| :, x \in E, |x\| \leq 1\}.$$

Toisin sanoen, tälle funktionaalille $x^* \in E^*$ suurin arvo

$$\max\{\ |\langle\, x \,|\, x^* \,\rangle| :\ \|\, x \,\| \leq 1\ \}$$

ei ole olemassa.

9.22. **Seuraus.** *Olkoon M normiavaruuden E vektorialiavaruus. Tällöin M on tiheä avaruudessa E, eli $\overline{M} = E$, silloin ja vain silloin kun avaruudella M on seuraava ominaisuus: Jos $x^* \in E^*$ ja $x^*(M) = \{0\}$, niin $x^* = \bar{0}$.*

Todistus. Oletetaan ensin, että $\overline{M} = E$. Jos tällöin $x^*(M) = \{0\}$, niin $M \subset \mathrm{Ker}(x^*)$, missä $\mathrm{Ker}(x^*) = (x^*)^{-1}(\{0\})$ on suljettu avaruudessa E, joten siis $E = \overline{M} \subset \mathrm{Ker}(x^*)$. Tällöin $E = \mathrm{Ker}(x^*)$, eli $x^* = \bar{0}$.

Oletetaan kääntäen, että $\overline{M} \neq E$. Tällöin löytyy sellainen vektori $x_0 \in E$, että $\mathrm{dist}(x_0, M) = \mathrm{dist}(x_0, \overline{M}) > 0$. Lauseen 9.18 nojalla on olemassa sellainen $x^* \in E^*$, että $x^*(M) = \{0\}$ ja $\| x^* \| = 1$ (jolloin toki $x^* \neq \bar{0}$). Siis avaruudella M ei ole väitteen ominaisuutta. (Erityisesti, jos avaruudella M on väitteen ominaisuus, niin välttämättä $\overline{M} = E$.) $\square$

Lisätietoja. Olkoon E $\mathbb{K}$-kertoiminen vektoriavaruus, $\varnothing \neq K \subset E$ suljettu ja *konveksi* osajoukko, sekä $x_0 \in E$ vektori, jolle $x_0 \notin K$. Tällöin on olemassa sellainen jatkuva lineaarinen funktionaali $x^* \in E^*$, että

$$Re\langle x_0, x^* \rangle > \sup_{x \in K} Re\langle x, x^* \rangle$$

Tämä *geometrinen* Hahn-Banachin *separaatiolause* on vahvempi versio Lauseesta 9.13, ja se on varsin hyödyllinen monissa yhteyksissä. Todistus kuitenkin sivuutetaan tällä kurssilla. (kts. esim. Werner: *Funktionalanalysis*, luku III.2).

10. Kompaktisuudesta*

Kompaktisuus on tärkeä ja hyödyllinen ominaisuus funktionaalianalyysissa (kuten analyysissa yleensä). Tosiaalta, kompaktisuus on verraten "harvinainen" ominaisuus ääretönulotteisissa Banachin avaruuksissa. Esimerkiksi, jos $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in \ell^p$ (ykkönen n:nnessä paikassa), missä $n \in \mathbb{N}$, niin

$$\|e_n - e_m\|_p = 2^{1/p}, \quad n \neq m,$$

kun $1 \leq p < \infty$. Tällöin jonolla $(e_n) \subset B_{\ell^p}$ ei ole suppenevia osajonoja, joten suljettu yksikköpallo B_{ℓ^p} ei ole kompakti joukko (*Topologia I*, luku 13). Yleisemmin, jos E on *ääretönulotteinen* Banachin avaruus, niin sen suljettu yksikköpallo $B_E = \{ x \in E : \ \| x \| \leq 1 \}$ *ei* koskaan ole kompakti (*Rieszin lemma* 10.22 alla).

Tässä luvussa luonnehdimme muun muassa avaruuden $C(K)$ kompakteja osajoukkoja (Arzela-Ascolin lause 10.7), tutustumme kompaktien operaattoreiden perusteoriaan, mukaanlukien Riesz-Fredholmin lauseeseen 10.25, sekä todistamme lopuksi separoituvan Hilbertin avaruuden *itse-adjungoidun* kompaktin operaattorin spektraalilauseen (ns. Hilbert-Schmidtin esitys).

Palautetaan mieliin, että Hausdorffin topologinen avaruus X on *kompakti*, jos jokaisella avaruuden X avoimella peitteellä on äärellinen osapeite. Funktionaalianalyysissä seuraava metrisissä avaruuksissa toimiva kompaktisuuden muotoilu on hyödyllinen, ja täysin riittävä esimerkiksi normitopologian tapauksessa.

10.1. **Määritelmä.** Metrinen avaruus (X, d) on *prekompakti*, jos jokaista $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen avaruuden X äärellinen peite $\{A_1, \dots, A_n\}$, eli

$$X = \bigcup_{j=1}^{n} A_j,$$

jossa joukkojen halkaisijat $\text{diam}(A_j) < \epsilon$ kaikilla $1 \leq j \leq n$.

Pidämme seuraavaa metristen avaruuksien tulosta tunnettuna tällä kurssilla. Huomaa kuitenkin, että allaolevat yhtäpitävyydet eivät ole välttämättä voimassa yleisemmissä tilanteissa.

10.2. **Lause.** *Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

a) avaruus X on kompakti,

b) avaruuden X jokaisella jonolla $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on ainakin yksi suppeneva osajono $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ (toisin sanoen, X on jonokompakti*).*

c) avaruus X on prekompakti ja täydellinen.

Todistus. Katso Väisälä: *Topologia I*, 13.39 ja 13.28, vrt. myös Väisälä: *Topologia II*, luku 16. □

Ääretönulotteisessa normiavaruudessa kompaktisuudelle ei ole yleisesti konkreettista, helppoa karakterisaatiota (kuten esimerkiksi tuttu Heine-Borelin lause euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$). Ehkä tunnetuin konkreettisista karakterisaatioista on *Arzela–Ascolin lause*, joka karakterisoi Banachin avaruuden $C(X)$ kompaktit joukot. Todistamme tämän tuloksen seuraavassa. Tarvitsemme tätä varten aluksi pari uutta käsitettä.

10.3. **Määritelmä.** Olkoon X topologinen avaruus, (Y, d) metrinen avaruus ja H perhe kuvauksia $X \to Y$. Sanomme, että H on *yhtäjatkuva* (engl. *equicontinuous*) *pisteessä* $x \in X$, jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti löytyy sellainen pisteen x avoin ympäristö V, että

$$d(f(y), f(x)) < \varepsilon, \quad \text{jokaisella } f \in H \text{ ja } y \in V.$$

Perhe H on yhtäjatkuva avaruudessa X, jos H on yhtäjatkuva avaruuden X jokaisessa pisteessä x.

Huomautus. (1) Jos H on yhtäjatkuva perhe kuvauksia $X \to Y$, niin jokainen $f \in H$ on jatkuva kuvaus $X \to Y$.
(2) Jos (X, d') on metrinen avaruus, niin edellisessä määritelmässä pisteen x ympäristöksi V riittää valita sopiva avoin pallo $B_{d'}(x, r) = \{y \in X : d'(x, y) < r\}$.

10.4. **Esimerkki.** (1) Jokainen äärellinen osajoukko $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset C(X, Y)$ on yhtäjatkuva, missä

$$C(X, Y) = \{f : X \to Y \mid f \text{ jatkuva kuvaus } \}.$$

(2) Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ väli (mahdollisesti rajoittamaton), ja H sellainen perhe derivoituvia kuvauksia $f : I \to \mathbb{R}$, joiden derivaatat ovat tasaisesti rajoitettuja:

$$|f'(t)| \leq M < \infty$$

kaikilla $f \in H$ ja $t \in I$. Tällöin $H \subset C(I)$ on yhtäjatkuva perhe välillä I.

Nimittäin, jos $t_0, t \in I$, niin väliarvolauseen nojalla

$$|f(t) - f(t_0)| = |f'(\xi_t)| \cdot |t - t_0| \leq M|t - t_0|,$$

missä ξ_t on sopiva piste pisteiden t_0 ja t välissä.
(3) Olkoon

$$H = \{ \, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \; f(x) = ax^2 \text{ ja } -1 \leq a \leq 1 \, \}.$$

Tällöin H on yhtäjatkuva jokaisessa $x_0 \in \mathbb{R}$ (eli H on yhtäjatkuva $\mathbb{R}$:ssä), koska

$$|ax^2 - ax_0^2| = |a||x + x_0||x - x_0| \leq (2|x_0| + 1)|x - x_0|$$

aina kun $|a| \leq 1$ ja $|x - x_0| \leq 1$.
(4) Olkoon $f_\alpha(x) = e^{\alpha x}$, kun $x \in \mathbb{R}$ ja $\alpha \geq 0$. Tällöin perhe

$$H = \{\ f_\alpha :\ \ \alpha \geq 0\ \}$$

on yhtäjatkuva esimerkiksi pisteessä -1, koska $f'_\alpha(x) = \alpha e^{\alpha x}$ ja jos $|x+1| < \frac{1}{2}$, niin

$$|f'_a(x)| \leq \alpha e^{-\alpha/2} < 1.$$

(Samalla tavalla voidaan päätellä, että H on yhtäjatkuva jokaisessa pisteessä $x < 0$.) Kuitenkaan H ei ole yhtäjatkuva pisteessä $x = 0$, koska (väliarvolauseen tai Taylorin sarjan nojalla) $|e^{\alpha x} - 1| \geq \alpha x$ kaikilla $\alpha > 0$ ja $x > 0$.

10.5. **Määritelmä.** Olkoon H joukko kuvauksia $X \to \mathbb{K}$. Sanomme, että H on *pisteittäin rajoitettu*, jos jokaista $x \in X$ kohti on olemassa sellainen $M(x) < \infty$, että

$$|f(x)| \leq M(x) \quad \text{ kaikilla } f \in H.$$

Jos $A \subset X$ on osajoukko, niin H on *tasaisesti rajoitettu joukossa* A jos on olemassa sellainen $M < \infty$, että

$$|f(x)| \leq M \quad \text{ kaikilla } f \in H \text{ ja } x \in A.$$

10.6. **Esimerkki.** (1) Olkoon $f_\alpha(x) = x\sin(\alpha x)$, missä $x \in \mathbb{R}$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$, ja merkitään $H = \{f_\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Tällöin joukko H on pisteittäin rajoitettu ja tasaisesti rajoitettu esimerkiksi välillä $[0, 1]$. Kuitenkaan H ei ole tasaisesti rajoitettu koko $\mathbb{R}$:ssä.
(2) Olkoon $f_n(x) = x + n$ kun $x \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{N}$. Tällöin perhe $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ on yhtäjatkuva $\mathbb{R}$:ssä, mutta ei pisteittäin rajoitettu.

Olkoon E Banachin avaruus. Sanomme, että joukko $D \subset E$ on *relatiivisesti kompakti* avaruudessa E jos sen sulkeuma $\overline{D}$ on kompakti joukko. Seuraava klassinen tulos on peräisin 1880-luvulta, joten se kuuluu tavallaan funktionaalianalyysin esihistoriaan.

10.7. **Lause** (Arzela–Ascoli)**.** *Olkoon X kompakti topologinen avaruus ja $H \subset C(X, \mathbb{K}) \equiv C(X)$. Tällöin joukko H on relatiivisesti kompakti avaruudessa $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ jos ja vain perhe H on yhtäjatkuva ja pisteittäin rajoitettu joukossa X .*

Huomautus. Koska metrisen avaruuden kompakti osajoukko on aina rajoitettu, niin sovelluksissa kannattaa ensin tarkistaa, onko tutkittava perhe $H \subset C(X)$ peräti tasaisesti rajoitettu, eli onko

$$M = \sup_{f \in H} \|f\|_\infty < \infty.$$

Tällöin H on toki myös pisteittäin rajoitettu joukossa X.

Todistus. "$\Rightarrow$" Oletetaan, että $H \subset C(X)$ on relatiivisesti kompakti joukko. Olkoon $x \in X$ kiinteä piste. Tällöin evaluaatiokuvaus

$$\delta_x;\ f \mapsto \delta_x(f) = f(x)$$

on jatkuva lineaarikuvaus $C(X) \to \mathbb{K}$, koska $|\delta_x(f)| \leq \|f\|_\infty$. Koska kompaktisuus säilyy jatkuvissa kuvauksissa (*Topologia I*, 13.18), niin joukko

$$\delta_x(\overline{H})) = \{f(x) : f \in \overline{H}\} \subset \mathbb{K}$$

on kompakti, ja siten erityisesti rajoitettu. Siis on olemassa sellainen luku $M(x) < \infty$, että $|f(x)| \leq M(x)$ kaikilla $f \in H$.

Osoitetaan seuraavaksi, että perhe H on yhtäjatkuva joukossa X. Oletuksen mukaan $\overline{H}$ on kompakti joukko, joten erityisesti H on prekompakti Lauseen 10.2 nojalla. Olkoon $\varepsilon > 0$ annettu. Tällöin löytyy osajoukkoja $A_1, \ldots, A_r \subset C(X)$, joille

$$H = \bigcup_{j=1}^{r} A_j$$

ja $\operatorname{diam}(A_j) < \frac{\epsilon}{4}$ kaikilla $1 \leq j \leq r$. Kiinnitetään jokin funktio $g_j \in A_j$ jokaisella $j = 1, \ldots, r$, jolloin

$$A_j \subset B(g_j, \frac{\epsilon}{3}), \quad j = 1, \ldots, r,$$

koska $\|h - g_j\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{4} < \frac{\epsilon}{3}$ kaikilla $h \in A_j$.

Olkoon $x \in X$ mielivaltainen piste. Koska funktiot $g_j : X \to \mathbb{K}$ ovat jatkuvia pisteessä x kaikilla $j = 1, \ldots, r$, niin on olemassa sellainen pisteen x avoin ympäristö V, että

$$(10.8) \qquad |g_j(y) - g_j(x)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{kaikilla } y \in V \text{ ja } j = 1, \ldots, r.$$

Olkoon $f \in H$ mielivaltainen funktio. Tällöin on olemassa $j \in \{1, \ldots, r\}$, jolle $f \in A_j$ ja siten $\|f - g_j\|_\infty < \frac{\epsilon}{3}$. Jos $y \in V$, niin arviosta (10.8) saadaan

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leq |f(y) - g_j(y)| + |g_j(y) - g_j(x)| + |g_j(x) - f(x)| \\ &\leq 2\|f - g_j\|_\infty + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon. \end{aligned}$$

Näin perhe H on yhtäjatkuva pisteessä x.

"$\Leftarrow$" Oletamme, että perhe $H \subset C(X)$ on yhtäjatkuva ja pisteittäin rajoitettu joukossa X. Olkoon $\epsilon > 0$ ja $x \in X$ mielivaltaisia. Yhtäjatkuvuuden nojalla on olemassa pisteen x avoin ympäristö V_x jolle

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{kaikilla } y \in V_x \text{ ja } f \in H. \tag{10.9}$$

Koska $X = \bigcup_{x \in X} V_x$ on avoin peite ja X on oletuksen nojalla kompakti, niin on olemassa äärellinen osapeite

$$X = \bigcup_{j=1}^{n} V_{x_j} \tag{10.10}$$

sopivilla $x_1, \dots, x_n \in X$. Oletuksen nojalla perhe H on myös pisteittäin rajoitettu, joten

$$M_j = \sup_{f \in H} |f(x_j)| < \infty \quad \text{kaikilla } j = 1, \dots, n.$$

Merkitään $M = \max\{M_1, \dots, M_n\}$ ja $B = \{u \in \mathbb{K} : |u| \leq M\}$. Olkoon $\phi : C(X) \to \mathbb{K}^n$ kuvaus

$$\phi(f) = (f(x_1), \dots, f(x_n)), \quad f \in C(X).$$

Tällöin $\phi(f) \in B^n = B \times \ldots \times B \subset \mathbb{K}^n$ kaikilla $f \in H$. Tässä $B^n \subset \mathbb{K}^n$ on suljettu ja rajoitettu joukko, kun varustetaan $\mathbb{K}^n$ (esimerkiksi) max-normilla

$$\| (z_1, \dots, z_n) \|_\infty = \max_{i \leq j \leq n} |z_j|.$$

Heine-Borelin lauseen nojalla B^n on kompakti joukko avaruudessa $(\mathbb{K}^n, \| \cdot \|_\infty)$ (muista: $(\mathbb{K}^n, \| \cdot \|_\infty)$ on lineaarisesti isomorfinen euklidisen avaruuden $(\mathbb{K}^n, \| \cdot \|_2)$ kanssa, vrt. HT 7:5). Lauseen 10.2 nojalla kuvajoukko $\phi(H) \subset B^n$ on prekompakti, joten voimme siis löytää sellaiset funktiot $\{f_1, \dots, f_s\} \subset H$, että

$$\phi(H) \subset \bigcup_{j=1}^{s} B_\infty(\phi(f_j), \frac{\epsilon}{3}). \tag{10.11}$$

Edellä $B_\infty(\phi(f_j), \frac{\epsilon}{3}) \subset \mathbb{K}^n$ on max-normin suhteen avoin pallo.

Olkoon $f \in H$ mielivaltainen funktio. Ehdon (10.11) perusteella on olemassa sellainen $k \in \{1, \dots, s\}$, että $\varphi(f) \in B_\infty(\varphi(f_k), \frac{\varepsilon}{3})$, toisin sanoen,

$$\max_{i \leq j \leq n} |f(x_j) - f_k(x_j)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Olkoon $x \in X$ mielivaltainen piste. Ehdon (10.10) nojalla löytyy $j \in \{1, \dots, n\}$ jolle $x \in V_{x_j}$. Tällöin erityisesti $|f(x) - f(x_j)| < \frac{\varepsilon}{3}$ ja $|f_k(x) - f_k(x_j)| < \frac{\varepsilon}{3}$ koska $f, f_k \in H$. Yhdistämällä ylläolevat tiedot saadaan arvio

$$\begin{aligned} |f(x) - f_k(x)| &\leq |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - f_k(x_j)| + |f_k(x_j) - f_k(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Siten $\| f - f_k \|_\infty = \sup_{x\in X}|f(x) - f_k(x)| \le \varepsilon$, josta seuraa

$$H \subset \bigcup_{k=1}^{s} \overline{B}_{\|\cdot\|_\infty}(f_k, \varepsilon).$$

Tämä tarkoittaa, että $H \subset C(X)$ on prekompakti joukko. Koska $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ on Banachin avaruutena toki täydellinen (luku 3), niin sulkeuma $\overline{H}$ on kompakti avaruudessa $C(X)$ Lauseen 10.2 perusteella, eli H on relatiivisesti kompakti. □

10.12. **Esimerkki.** (1) Olkoon $f_n(t) = t^n$, kun $t \in [0,1]$ ja $n = 1, 2, \ldots$ Arzela-Ascolin lauseen 10.7 nojalla $H = \{f_n | n \in \mathbb{N}\} \subset C(0,1)$ ei ole relatiivisesti kompakti, koska perhe H ei ole yhtäjatkuva pisteessä $t = 1$. Nimittäin, jos $0 < t < 1$ on kiinteä, niin

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(1) - f_n(t)| = \sup_{n\in\mathbb{N}} (1 - t^n) = 1.$$

(2) Olkoon $f_s(t) = e^{-st^2}$ kun $t \in [0,1]$ ja $s \ge 0$. Tällöin $H = \{f_s : s \ge 0\} \subset C(0,1)$ on relatiivisesti kompakti joukko Arzela-Ascolin lauseen perusteella. Nimittäin, $\|f_s\|_\infty \le 1$ kaikilla $s \ge 0$, joten $H \subset C(0,1)$ on tasaisesti rajoitettu joukko. Lisäksi H on yhtäjatkuva perhe jokaisessa pisteessä $t \in [0,1]$. Nimittäin, derivaatat $f_s'(t) = -2ste^{-st^2}$ ovat tasaisesti rajoitettuja kaikilla $s \ge 0$ välillä $[0,1]$ (vrt. Esimerkki 10.4.(2)). Rajoittuneisuuden voi nähdä seuraavasti: olkoon $t \in (0,1]$ kiinteä luku ja $u(s) = ste^{-st^2}$ kun $s \ge 0$. Tällöin

$$u'(s) = te^{-st^2}\big(1 - 2ts^2\big) = 0 \Leftrightarrow s = \frac{1}{\sqrt{2t}}.$$

Funktion u maksimiarvo välillä $[0,\infty)$ on $u(\frac{1}{\sqrt{2t}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{t}e^{-t^{3/2}}$, joka pysyy rajoitettuna kun $t \in (0,1]$. [TEKNINEN; PAREMPI ESIM?]

Seuraavassa esimerkissä palaamme Johdantoluvussa esitetyn integraaliyhtälön tutkimiseen.

10.13. **Esimerkki.** Olkoon $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ jatkuva kuvaus ja

$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)\,dy, \text{ kun } x \in [0,1] \text{ ja } f \in C(0,1).$$

Esimerkissä 2.31 olemme jo todenneet, että $f \mapsto Tf$ on jatkuva lineaarinen kuvaus $C(0,1) \to C(0,1)$.

Väite. Kuvajoukko $T(B_{C(0,1)}) \subset C(0,1)$ on relatiivisesti kompakti, missä suljettu yksikköpallo $B_{C(0,1)} = \{f \in C(0,1) : \| f \|_\infty \le 1\}$.

Todistus. Tutkimme, ovatko Arzela-Ascolin lauseen ehdot voimassa. Yksikköpallon kuva $T(B_{C(0,1)})$ on selvästi rajoitettu joukko avaruudessa $C(0,1)$ (mieti miksi!). Koska K on jatkuva kuvaus $[0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, missä $[0,1] \times [0,1]$ on kompakti joukko, niin K on tasaisesti jatkuva kuvaus (*Topologia I*, 13.36). Erityisesti, jos $x_0 \in [0,1]$ ja $\varepsilon > 0$ on annettu, niin on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|K(x,y) - K(x_0,y)| < \varepsilon \text{ aina kun } |x - x_0| < \delta \text{ ja } y \in [0,1].$$

Tällöin pätee kaikilla $f \in B_{C(0,1)}$ arvio

$$|(Tf)(x) - (Tf)(x_0)| \leq \int_0^1 \underbrace{|K(x,y) - K(x_0,y)|}_{<\varepsilon} \underbrace{|f(y)|}_{\leq \| f \|_\infty \leq 1} \, dy < \varepsilon$$

aina kun $x \in [0,1]$ ja $|x - x_0| < \delta$.

Siis perhe $T(B_{C(0,1)})$ on yhtäjatkuva välillä $[0,1]$, joten $T(B_{C(0,1)})$ on relatiivisesti kompakti osajoukko Arzela-Ascolin lauseen nojjalla. □

Esimerkissä 10.13 tapasimme lineaarikuvauksen $T : C(0,1) \to C(0,1)$, jonka yksikköpallon kuva $TB_{C(0,1)}$ oli relatiivisesti kompakti. Tällaisilla operaattoreilla on vahvoja ominaisuuksia, ja ne esiintyvät monissa analyysin sovelluksissa (integraaliyhtälöiden teoriassa, differentiaaliyhtälöiden spektraaliteoriassa jne.). Tutkimme seuraavaksi tätä luokkaa lineaarisia operaattoreita.

Olkoon E ja F Banachin avaruuksia. Lineaarinen operaattori $T \in \mathcal{L}(E,F)$ on *kompakti*, jos suljetun yksikköpallon $B_E = \{x \in E : \| x \| \leq 1\}$ kuvan sulkeuma

$$\overline{TB_E} = \overline{\{Tx : x \in E, \| x \| \leq 1\}}$$

on kompakti avaruudessa F. Merkitsemme

$$\mathcal{K}(E,F) = \{T \in \mathcal{L}(E,F) : \text{T kompakti operaattori}\}.$$

Huomautus. Lauseen 10.2 mukaan jatkuva lineaarinen operaattori $T \in \mathcal{K}(E,F)$ jos ja vain jos kuva TB_E on prekompakti avaruudessa F, eli jokaisella $\varepsilon > 0$ löytyy äärellisen monta vektoria $y_1, \ldots, y_n \in F$ (jotka voivat riippua luvusta ε) siten, että

$$TB_E \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(y_j, \varepsilon).$$

Tutustumme seuraavaksi kompaktien operaattoreiden perusominaisuuksiin.

10.14. **Lause.** *Olkoot E, F Banachin avaruuksia. Tällöin $\mathcal{K}(E,F)$ on avaruuden* $\mathcal{L}(E,F)$ suljettu *vektorialiavaruus.*

Todistus. Olkoon $S, T \in \mathcal{K}(E,F)$ ja $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Kompaktisuudesta seuraa, että

$$SB_E \subset \bigcup_{j=1}^{m} B(y_j, \varepsilon) \quad \text{ja} \quad TB_E \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(z_k, \varepsilon)$$

sopivilla vektoreilla $y_1, \ldots, y_m \in F$ ja $z_1, \ldots, z_n \in F$. Tällöin

$$(S+T)B_E \subset \bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{k=1}^{n} B(y_j + z_k, 2\varepsilon).$$

Nimittäin, jos $x \in B_E$ niin $\| Sx - y_j \| < \varepsilon$ ja $\| Tx - z_k \|$ sopivilla j ja k, joten kolmioepäyhtälöstä saadaan

$$\| Sx + Tx - (y_j + z_k) \| \leq \| Sx - y_j \| + \| Tx - z_k \| < 2\varepsilon.$$

Koska $\varepsilon > 0$ oli mielivaltainen päättelemme, että $S+T \in \mathcal{K}(E,F)$ on kompakti. Samantapaisella argumentilla nähdään, että jos $S \in \mathcal{K}(E,F)$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$, niin $\lambda S \in \mathcal{K}(E,F)$.

Olkoon lopuksi $T \in \overline{\mathcal{K}(E,F)}$. Tällöin on olemassa jono $(T_n) \subset \mathcal{K}(E,F)$, siten että $\| T - T_n \| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen, ja kiinnitetään $n \in \mathbb{N}$ jolle $\| T - T_n \| < \varepsilon$. Koska T_n on kompakti operaattori, niin

$$T_n B_E \subset \bigcup_{j=1}^{m} B(y_j, \varepsilon)$$

sopivilla vektoreilla $y_1, \ldots, y_m \in F$. Tällöin

$$TB_E \subset \bigcup_{j=1}^{m} B(y_j, 2\varepsilon).$$

Nimittäin, jos $x \in B_E$ niin $\| T_n x - y_j \| < \varepsilon$ jollakin j. Tällöin

$$\| Tx - y_j \| \leq \underbrace{\| Tx - T_n x \|}_{\leq \| T - T_n \| < \varepsilon} + \| T_n x - y_j \| < 2\varepsilon.$$

Siis $T \in \mathcal{K}(E,F)$ ja siten $\mathcal{K}(E,F)$ on suljettu vektorialiavaruus avaruudessa $\mathcal{L}(E,F)$. $\square$

10.15. **Lause.** *Olkoot E, F, E_1, F_1 Banachin avaruuksia sekä $T \in \mathcal{K}(E,F)$ kompakti operaattori. Jos $S \in \mathcal{L}(F, F_1)$ on jatkuva operaattori, niin yhdistetty kuvaus $ST \in \mathcal{K}(E, F_1)$ on kompakti. Jos $R \in \mathcal{L}(E_1, E)$, niin $TR \in \mathcal{K}(E_1, F)$.*

$$E_1 \xrightarrow{R\ jva} E \xrightarrow{T \in K} F \xrightarrow{S\ jva} F_1$$

Huomautus. Lauseet 10.14 ja 10.15 kertovat, että $\mathcal{K}(E,F)$ on ns. *operaattoriideaali.*

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Operaattorin T kompaktisuudesta seuraa, että

$$TB_E \subset \bigcup_{j=1}^{m} B(y_j, \varepsilon)$$

sopivilla $y_1, \ldots, y_m \in F$. Tällöin $RB_{E_1} \subset \| R \| B_E$, joten lineaarisuudesta ja normin homogeenisuudesta saadaan

$$TRB_{E_1} \subset \| R \| TB_E \subset \bigcup_{j=1}^{m} B(\| R \| y_j, \| R \| \varepsilon).$$

Siis TR on kompakti $E_1 \to F$.

Lisäksi kuvauksen S lineaarisuudesta

$$SB(y_j, \varepsilon) = S(y_j + \varepsilon B(\overline{0}, 1)) = Sy_j + \varepsilon \overbrace{SB(\overline{0}, 1)}^{\subset \| S \| \cdot B(\overline{0},1)} \subset B(Sy_j, \| S \| \varepsilon)$$

kaikilla $j = 1, \ldots, m$. Näin ollen

$$STB_E \subset S(\bigcup_{j=1}^{m} B(y_j, \varepsilon)) \subset \bigcup_{j=1}^{m} B(Sy_j, \| S \| \varepsilon).$$

Päättelemme tästä, että $ST \in \mathcal{K}(E, F_1)$. $\square$

Seuraava esimerkki on tärkeä monissa sovelluksissa.

10.16. **Esimerkki.** Sobolevin avaruus

$$H^1(0,1) = \{f \in L^2(0,1) : \text{ distribuutioderivaatta } f' \in L^2(0,1)\} \subset L^2(0,1).$$

Olkon $I : H^1(0,1) \to L^2(0,1)$ luonnollinen inkluusiokuvaus, eli $I(f) = f$ kun $f \in H^1(0,1)$. Muistutamme luvusta 5, että distribuutioderivaatta f' määräytyy ehdosta

$$\int_0^1 f' \phi \, dx = -\int_0^1 f \phi' \, dx \quad \text{kaikilla } \phi \in D(0,1),$$

jos sellainen f' on olemassa.
Väite: I on *kompakti* operaattori $H^1(0,1) \to L^2(0,1)$.

Todistus. Ideana on esittää $I = I_1 I_2$ yhdistettynä kuvauksena, missä

$$I_2 : H^1(0,1) \to C(0,1), \quad I_2(f) = f,$$
$$I_1 : C(0,1) \to L^2(0,1), \quad I_1(f) = f,$$

ovat luonnollisia inkluusioita.

Tähän Kaavio !

Tässä $I_1 \in \mathcal{L}(C(0,1), L^2(0,1))$ on rajoitettu operaattori, koska selvästi $\| I_1(f) \|_{L^2} = \| f \|_{L^2} \leq \| f \|_\infty$ kaikilla $f \in C(0,1)$. Lisäksi osoitimme luvussa 5, että $H^1(0,1) \subset C(0,1)$ ja

$$\| I_2(f) \|_\infty = \| f \|_\infty \leq 2\| f \|_{H^1} = 2(\| f \|_{L^2} + \| f' \|_{L^2}), \quad f \in H^1(0,1), \tag{10.17}$$

joten $I_2 \in \mathcal{L}(H^1(0,1), C(0,1))$. Siis $I = I_1 I_2 \in \mathcal{L}(H^1(0,1), L^2(0,1))$ on jatkuva.

Edelleen: jos $f \in H^1(0,1)$, niin (vrt. Lauseen 5.20 todistus)

$$|f(x) - f(y)| \leq \| f \|_{H^1} |x-y|^{\frac{1}{2}} \text{ kaikilla } x, y \in [0,1]. \tag{10.18}$$

Ehdoista (10.17) ja (10.18) seuraa, että perhe $B_{H^1} = \{f \in C(0,1) : \| f \|_{H^1} \leq 1\}$ on (pisteittäin) rajoitettu ja yhtäjatkuva välillä $[0,1]$. Arzela-Ascolin lauseen 10.7 perusteella silloin $I_2 B_{H^1} = B_{H^1} \subset C(0,1)$ on relatiivisesti kompakti. Siis I_2 on kompakti operaattori $H^1(0,1) \to C(0,1)$, joten lauseen 10.15 nojalla myös $I = I_1 I_2$ on kompakti $H^1(0,1) \to L^2(0,1)$. □

10.19. **Esimerkki.** Olkoon $\sigma = (\sigma_n) \in \ell^\infty$ rajoitettu skalaarijono. Määritellään ns. diagonaalioperaattori $D_\sigma : \ell^p \to \ell^p$ asettamalla

$$D_\sigma(x_n) = (\sigma_n x_n), \quad (x_n) \in \ell^p.$$

Tällöin ei ole vaikea tarkistaa, että $D_\sigma \in \mathcal{L}(\ell^p)$ on jatkuva operaattori, kun $1 \leq p < \infty$, ja lisäksi $\|D_\sigma\| = \sup_n |\sigma_n|$ (lisää HT luku 2).
Väite: jos $lim_{n\to\infty}\sigma_n = 0$, niin $D_\sigma \in \mathcal{K}(\ell^p)$ on kompakti operaattori.

Todistus. Asetetaan $D_k(x_n) = (\sigma_1 x_1, \sigma_2 x_2, \ldots, \sigma_k x_k, 0, 0, \ldots)$ kun $(x_n) \in \ell^p$ ja $k \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$D_k B_{\ell^p} = \{\sum_{j=1}^k \sigma_j x_j e_j : \sum_j |x_j|^p \leq 1\} \subset span\{e_1, \ldots, e_k\}$$

on rajoitettu joukko, missä $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) \in \ell^p$ (ykkönen j:nnellä paikalla). Muistutamme lisäksi, että avaruudet $(span\{e_1, \ldots, e_k\}, \| \cdot \|_p)$ ja $(span\{e_1, \ldots, e_k\}, \| . \|_2)$ ovat lineaarisesti isomorfiset kaikilla k (vrt. HT 7:5). Tällöin Heine-Borelin lauseen nojalla sulkeuma $\overline{D_k B_{\ell^p}}$ on kompakti joukko, eli $D_k \in \mathcal{K}(\ell^p)$ kaikilla k.

Edelleen

$$\| (D_\sigma - D_k)(x_n) \|_p^p = \sum_{j=k+1}^\infty |\sigma_j x_j|^p \leq (\sup_{j \geq k+1} |\sigma_j|^p) \sum_{j=1}^\infty |x_j|^p, \quad (x_n) \in \ell^p.$$

Tämä tarkoittaa, että

$$\| D_\sigma - D_k \| \leq \sup_{j \geq k+1} |\sigma_j| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Lauseesta 10.14 seuraa, että $D_\sigma \in \overline{\mathcal{K}(\ell^p)} = \mathcal{K}(\ell^p)$. □

Seuraava keskeinen duaalisuustulos (ns. Schauderin lause) kompakteille operaattoreille on varsin käyttökelpoinen. Muistutamme luvusta 9, että operaattorin $T \in \mathcal{L}(E,F)$ transpoosi $T^* \in \mathcal{L}(F^*,E^*)$ määritellään ehdolla

$$\langle T^*y^*, x\rangle = \langle y^*, Tx\rangle, \quad x \in E,\ y^* \in F^*.$$

10.20. **Lause.** *(Schauder 1932). Olkoot E ja F Banachin avaruuksia. Jos $T \in \mathcal{K}(E,F)$, niin tällöin myös transpoosi $T^* \in \mathcal{K}(F^*,E^*)$ on kompakti operaattori.*

Todistus. Ideana on soveltaa Arzela-Ascolin lausetta 10.7 sopivan identifikaation välityksellä. Oletuksesta seuraa, että $X = \overline{TB_E} \subset F$ on kompakti metrinen avaruus (Banachin avaruuden F normin suhteen). Tarkastellaan funktioperhettä

$$H = \{y^*|_X : y^* \in F^*, \|\, y^* \,\| \le 1\} \subset C(X),$$

missä $y^*|_X$ on funktionaalin y^* rajoittuma $X \to \mathbb{K}$. Tällöin
(i) perhe H on *yhtäjatkuva* joukossa X, koska

$$|\langle y^*, x\rangle - \langle y^*, y\rangle| = |\langle y^*, x-y\rangle| \le \|\, y^* \,\| \cdot \|\, x-y \,\| \le \|\, x-y \,\|$$

kun $x, y \in X$ ja $y^* \in B_{F^*}$.
(ii) $H \subset C(X)$ on tasaisesti rajoitettu joukko, koska

$$|\langle y^*, Tz\rangle| \le \|\, y^* \,\| \cdot \|\, T \,\| \le \|\, T \,\| \quad \text{kun } z \in B_E \text{ ja } y^* \in B_{F^*}.$$

Funktionaalin y^* jatkuvuudesta seuraa, että

$$\|\, y^*|_X \,\|_\infty = \sup_{x\in X} |\langle y^*, x\rangle| \le \|\, T \,\| \quad \text{kun } y^* \in B_{F^*}.$$

Arzela-Ascolin lause kertoo, että joukko $H \subset C(X)$ on relatiivisesti kompakti. Lisäksi havaitsemme, että jos $y_1^*, y_2^* \in B_{F^*}$ ovat mielivaltaisia, niin transpoosin T^* määritelmän mukaan

$$\begin{aligned}\|\, T^*y_1^* - T^*y_2^* \,\| &= \sup_{z\in B_E} |\langle T^*y_1^* - T^*y_2^*, z\rangle| = \sup_{z\in B_E} |\langle y_1^*, Tz\rangle - \langle y_2^*, Tz\rangle| \\ &= \sup_{x\in X} |\langle y_1^*, x\rangle - \langle y_2^*, x\rangle| = \|\, y_1^*|_X - y_2^*|_X \,\|_\infty,\end{aligned}$$

missä sup-normi $\|\cdot\|_\infty$ on laskettu avaruudessa $C(X)$. Edellä käytimme tietoa $X = \overline{TB_E}$ sekä funktionaalien y_1^* ja y_2^* jatkuvuutta.

Tämä tarkoittaa, että kuvaus $y^*|_X \mapsto T^*y^*$ on (hyvin määritelty) isometria $H \to E^*$, ja erityisesti siis jatkuva. Koska H on prekompakti, niin myös vastaava kuvajoukko $T^*B_{F^*} \subset E^*$ on prekompakti (tarkista miksi!). Olemme näin osoittaneet, että $T^* \in \mathcal{K}(F^*,E^*)$ on kompakti operaattori. □

Riesz-Fredholmin teoria*

Klassinen Riesz-Fredholmin teoria käsittelee operaattoriyhtälöiden

$$x - Kx = (I - K)x = y \tag{10.21}$$

ratkeavuutta, kun $K \in \mathcal{K}(E)$ on kompakti operaattori ja $y \in E$ on annettu vektori, missä E on Banachin avaruus. Erityisesti, jos $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ on jatkuva ydinfunktio, niin Johdantoluvussa esiintyvä integraaliyhtälö

$$f(t) - \int_0^1 K(t,s) f(s)\, ds = g(t), \quad t \in [0,1],$$

on tätä muotoa (Esimerkki 10.12.(2)). Tässä $g \in C(0,1)$ on annettu funktio ja etsitään jatkuvaa ratkaisufunktiota $f \in C(0,1)$.

Aloitamme seuraavasta aputuloksesta, jolla on oma merkityksensä.

10.22. **Lemma** (Rieszin lemma). *Olkoon E normiavaruus ja $M \subsetneq E$ suljettu vektorialiavaruus. Tällöin jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $x \in E$ että $\| x \| = 1$ ja*

$$dist(x, M) = \inf_{m \in M} \| x - m \| > 1 - \varepsilon.$$

Todistus. Kiinnitetään vektori $z \in E \backslash M$, jolloin $d = dist(z, M) > 0$. Valitaan tämän jälkeen (infimum!) alkio $m \in M$, jolle

$$d \le \| z - m \| < \frac{d}{1 - \varepsilon}.$$

Olkoon $x = \dfrac{z - m}{\| z - m \|}$. Tällöin $x = \dfrac{z}{\| z - m \|} - \dfrac{x}{\| z - m \|} \notin M$, koska $z \notin M$. Jos $n \in M$ on mielivaltainen alkio, niin

$$\begin{aligned} \| x - n \| &= \left\| \frac{z - m}{\| z - m \|} - n \right\| = \frac{1}{\| z - m \|} \| z - (m + \| z - m \| n) \| \\ &\ge \frac{1}{\| z - m \|} dist(z, M) > d\left(\frac{d}{1 - \varepsilon}\right)^{-1} = 1 - \varepsilon, \end{aligned}$$

koska vektori $m + \| z - m \| n$ kuuluu vektorialiavaruuteen M. □

Rieszin lemmasta seuraa että kompaktit joukot ovat ”harvinaisia” ääretön-ulotteisissä Banachin avaruuksissa.

10.23. **Seuraus.** *Jos E on ääretön-ulotteinen Banachin avaruus, niin sen suljettu yksikköpallo $B_E = \{x \in E : \| x \| \le 1\}$ ei ole kompakti joukko. (Erityisesti, jos B_E on kompakti, niin* $\dim(E) < \infty$.*) Yleisemmin, jos E on ääretön-ulotteinen Banachin avaruus, niin suljettu pallo $\overline{B}(x_0, r) \subset E$ ei ole kompakti millään $x_0 \in E$ ja $r > 0$.*

Todistus. Olkoon $\dim(E) = \infty$. Konstruoidaan induktiolla sellainen jono $(x_n) \subset B_E$, jolla ei ole suppenevia osajonoja. Erityisesti silloin B_E ei ole kompakti joukko Lauseen 10.2 mukaan.

Kiinnitetään $x_1 \in E$ jolle $\| x_1 \| = 1$. Riezin lemman perusteella on olemassa sellainen $x_2 \in E$, että $\| x_2 \| = 1$ ja $dist(x_2, span\{x_1\}) > \frac{1}{2}$.

Induktioaskel: oletamme, että olemme löytäneet vektorit $x_1, \ldots, x_n \in E$, joille

$$\| x_j \| = 1 \quad \text{ja} \quad dist(x_j, E_{j-1}) > \frac{1}{2}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

missä olemme merkinneet $E_{j-1} \equiv span\{x_1, \ldots, x_{j-1}\}$.

Koska E on ääretön-ulotteinen, niin $E_n \equiv span\{x_1, \ldots, x_n\} \subsetneq E$ on (suljettu) vektorialiavaruus. Rieszin lemman 10.22 mukaan on olemassa sellainen vektori $x_{n+1} \in E$, että $\| x_{n+1} \| = 1$ ja $dist(x_{n+1}, E_n) > \frac{1}{2}$. Näin jatkamalla löydetään jono $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$, jolle konstruktion perusteella pätee $\| x_n - x_m \| > \frac{1}{2}$ aina kun $n \neq m$. Erityisesti, jonolla (x_n) ei ole suppenevia osajonoja.

Ylläolevassa konstruktiossa tarvittiin seuraavaa tietoa: jos F on normiavaruus ja $M \subset F$ on äärellisulotteinen vektorialiavaruus, niin tällöin $M \subset F$ on *suljettu*. Nimittäin, M on lineaarisesti isomorfinen euklidisen avaruuden $(\mathbb{K}^n, \| \cdot \|_2)$ kanssa, missä $n = \dim(M)$ (vrt. HT 7:5). Lisäksi täydellisyys säilyy isomorfismeissa (Lause 6.14) ja täydellinen vektorialiavaruus on suljettu (Lause 3.12).

Lopuksi $\overline{B}(x_0, r) = x_0 + rB_E$, missä kuvaus $x \mapsto x_0 + rx$ on homeomorfismi $E \to E$, joten vastaava tulos pätee myös kaikille suljetuille palloille $\overline{B}(x_0, r)$. $\square$

10.24. *Huomautus.* Jos $\dim(E) < \infty$, niin suljettu yksikköpallo B_E on kompakti Heine-Borelin lauseen perusteella. Nimittäin, E on lineaarisesti isomorfinen euklidisen avaruuden $(\mathbb{K}^n, \| \cdot \|_2)$ kanssa, missä $n = \dim(E)$ (vrt. HT 7:5), ja toki kompaktisuus säilyy homeomorfismeissa.

Seuraavaa tulosta, joka koskee kuvauksia $I - K$, missä K on kompakti operaattori, sanotaan *Fredholmin alternatiiviksi.* Tämä tulos oli aikanaan ensimmäisiä funktionaalianalyysin teorian sovelluksia.

Muistutamme tätä varten, että jos E on Banachin avaruus ja $M \subset E$ on suljettu vektorialiavaruus, niin tekijäavaruus E/M on myös Banachin avaruus (HT 3:9 ja 3:10). Tekijäavaruuden E/M alkiot ovat muotoa $x + M = \{x + m : m \in M\}$ kun $x \in E$, ja tekijänormi on

$$\|x + M\| = \inf\{\|x - m\| : m \in M\} = dist(x, M), \quad x \in E.$$

Tekijäkuvaus $Q_M : x \mapsto x + M$, kun $x \in E$, on lineaarinen surjektio $E \to E/M$, jolle tekijänormin määritelmän mukaan $\|Q_M x\| = \|x + M\| \leq \|x\|$ kaikilla

$x \in E$. Kuvauksen Q_M lineaarisuus seuraa heti tekijäavaruuden lineaarisesta rakenteesta (tarkista).

10.25. **Lause** (Riesz 1918). *Olkoon E Banach avaruus ja $K \in \mathcal{K}(E)$ kompakti operaattori. Tällöin*
(1) $\dim(ker(I-K)) < \infty$,
(2) *Kuva-avaruus $Im(I-K)) \equiv \{x - Kx : x \in E\}$ on E:n suljettu vektorialiavaruus,*
(3) $\dim(E/Im(I-K)) < \infty$.

Huomautus. Lisäksi pätee dimensiokaava

$$\dim(ker(I-K)) = \dim(E/Im(I-K)) = \dim(ker(I-K^*)).$$

Erityisesti siis $\ker(I-K) = \{\bar{0}\}$ jos ja vain jos $Im(I-K) = E$. Tätä dimensiokaavaa ei kuitenkaan tässä todisteta (todistus löytyy esimerkiksi kirjoista Rudin: *Functional Analysis*, 4.25, tai Brezis: *Analyse Fonctionnelle*, VI.6.)

Todistus. (1) Merkitään $N = \ker(I-K))$. Jos $x \in B_N$, niin $x - Kx = 0$, eli $x = Kx$. Siten $B_N \subset KB_N$, missä $KB_N \subset KB_E$ on relatiivisesti kompakti joukko. Rieszin lemman 10.22 perusteella tällöin $dim(N) < \infty$.
(2) Olkoon $y \in \overline{Im(I-K)}$ mielivaltainen. Meidän tulee osoittaa, että tällöin $y \in Im(I-K)$.

Oletuksen perusteella on olemassa jono $(x_n) \subset E$, jolle

$$y_n = (I-K)x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y.$$

(Vektorit x_n eivät yleensä ole yksikäsitteisiä: jos $z \in Ker(I-K)$, niin myös $(I-K)(x_n - z) = (I-K)x_n$.) Osan (1) perusteella $\dim(Ker(I-K)) < \infty$, joten kompaktisuuden avulla (vrt. Väisälä: *Topologia I*, 13.22) löydetään jokaisella $n \in \mathbb{N}$ vektorille x_n lähin alkio $z_n \in Ker(I-K)$, jolle siis

$$d_n \equiv dist(x_n, Ker(I-K)) = \| x_n - z_n \|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

[$\frac{1}{n}$-approks riittäisi?!] Tällöin myös

$$(I-K)(x_n - z_n) = (I-K)x_n - \underbrace{(I-K)z_n}_{=\bar{0}} = y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y. \tag{10.26}$$

Väite: joukko $\{x_n - z_n : n \in \mathbb{N}\} \subset E$ on rajoitettu.

Tehdään vastaoletus: on olemassa sellainen osajono, että $\| x_{n_j} - z_{n_j} \| \longrightarrow \infty$ kun $j \to \infty$. Normitetaan nämä vektorit asettamalla $v_n = \frac{x_n - z_n}{\| x_n - z_n \|}$ kun $n \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$v_{n_j} - Kv_{n_j} = \frac{1}{\| x_{n_j} - z_{n_j} \|}(I-K)(x_{n_j} - z_{n_j}) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

koska jono $((I-K)(x_{n_j} - z_{n_j}))$ on rajoitettu (suppenevana jonona).

Oletuksemme nojalla K on kompakti operaattori, joten löydämme osajonon (jota edelleen merkitään (v_{n_j}) liiallisten alaindeksien välttämiseksi), jolle $Kv_{n_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} z$. Koska edellä $v_{n_j} - Kv_{n_j} \to 0$ kun $j \to \infty$, niin myös

$$v_{n_j} = (v_{n_j} - Kv_{n_j}) + Kv_{n_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} z.$$

Jatkuvuudesta seuraa, että $Kv_{n_j} \to Kz$ kun $j \to \infty$. Raja-arvon yksikäsitteisyys takaa, että tällöin on oltava $Kz = z$, eli $z \in \ker(I - K)$. Toisaalta, koska $z_n \in \ker(I - K)$ ja $\|x_n - z_n\| = dist(x_n, \ker(I - K))$ kun $n \in \mathbb{N}$, niin

$$\begin{aligned} dist(v_n, \ker(I - K)) &= dist\Big(\frac{x_n - z_n}{\| x_n - z_n \|}, \ker(I - K)\Big) \\ &= \frac{1}{\| x_n - z_n \|} dist(x_n, \ker(I - K)) = 1 \end{aligned}$$

kaikilla n. Tämä tarkoittaa erityisesti, että $\| v_n - z \| \geq dist(v_n, \ker(I - K)) = 1$ kaikilla n. Tämä arvio on kuitenkin räikeä ristiriita, koska edellä $v_{n_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} z$.

Joukko $\{x_n - z_n : n \in \mathbb{N}\}$ on siis rajoitettu:

$$\| x_n - z_n \| \leq C < \infty \quad \text{kaikilla } n.$$

Operaattorin K kompaktisuudesta seuraa, että sulkeuma $\overline{\{Kv : \| v \| \leq C\}}$ on avaruuden E kompakti osajoukko. Näin on olemassa suppeneva osajono $K(x_{n_j} - z_{n_j}) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u \in E$. Tällöin

$$x_{n_j} - z_{n_j} = \underbrace{x_{n_j} - z_{n_j} - K(x_{n_j} - z_{n_j})}_{=y_{n_j}} + K(x_{n_j}) - z_{n_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} y + u.$$

Jatkuvuudesta sekä ehdosta (10.26) päättelemme lopulta, että

$$(I - K)(y + u) = \lim_{j\to\infty} (I - K)(x_{n_j} - z_{n_j}) = \lim_{j\to\infty} y_{n_j} = y.$$

Siis $y = (I - K)(y + u) \in Im(I - K)$ ja kuva-avaruus $Im(I - K)$ on suljettu.

(3) Edellisen kohdan perusteella voidaan muodostaa Banachin (tekijä)avaruus $E/Im(I - K)$, koska $Im(I - K) \subset E$ on suljettu vektorialiavaruus. Olkoon Q jatkuva lineaarinen tekijäkuvaus $E \to E/Im(I - K)$, eli

$$Qx = x + Im(I - K), \quad x \in E.$$

Määritelmästä seuraa $0 = Q(I - K) = Q - QK$, joten Lauseen 10.16 mukaan $Q = QK$ on kompakti surjektio $E \to E/Im(I - K)$. Tekijänormin määritelmästä saadaan

$$(1/2)B_{E/Im(I-K)} \subset \overline{QB_E}. \tag{10.27}$$

Nimittäin, jos $x \in E$ toteuttaa $\|x + Im(I-K)\| = dist(x, Im(I-K)) \leq 1$, niin on olemassa vektori $m \in Im(I-K)$ jolle $\|x-m\| < 2$. Tällöin $Q(x-m) = x + Im(I-K)$.

Inkluusiossa (10.27) joukko $\overline{QB_E}$ on kompakti, joten myös tekijäavaruuden $E/Im(I-K)$ suljettu yksikköpallo $B_{E/Im(I-K)}$ on kompakti. Rieszin lemman 10.22 mukaan tämä taas tarkoittaa, että $\dim(E/Im(I-K)) < \infty$. $\square$

Itse-adjungoidun kompaktin operaattorin spektraaliesitys*

Lineaarialgebran kurssilla osoitetaan, että jokaisella $n \times n$ matriisilla A on ainakin yksi kompleksinen ominaisarvo $\lambda \in \mathbb{C}$ sekä siihen liittyvä ominaisvektori $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq \overline{0}$, jolle

$$Ax = \lambda x.$$

Tämän osion tavoitteena on osoittaa, että separoituvan ääretön-ulotteisen Hilbertin avaruuden H kompakteilla itse-adjungoiduilla operaattoreilla on aina ominaisarvoja ja ominaisvektoreita. Lisäksi jokaisella kompaktilla operaattorilla $A \in \mathcal{K}(H)$ on ns. *Hilbert-Schmidtin esitys*, joka esittää operaattorin A sopivien 1-ulotteisten operaattoreiden summana.

Tätä keskeista tulosta varten tarvitsemme uusia käsitteitä, sekä joitakin valmistelevia tuloksia. Lähestymistapamme tulee olemaan verraten suoraviivainen ja alkeellinen, eikä se perustu yleiseen spektraaliteoriaan.

10.28. **Määritelmä.** Olkoon E Banachin avaruus, $(x_n) \subset E$ sekä $x \in E$. Jono (x_n) suppenee *heikosti* avaruudessa E kohti vektoria x kun $n \to \infty$, jos $x^*(x_n) \to x^*(x)$ kun $n \to \infty$ jokaisella jatkuvalla funktionaalilla $x^* \in E^*$. Merkitsemme tätä

$$x_n \xrightarrow{w} x \quad \text{kun } n \to \infty.$$

10.29. **Esimerkki.** (1) Olkoon $1 < p < \infty$ ja $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) \in \ell^p$ (ykkönen j:nnessä paikassa) kun $j \in \mathbb{N}$. Tällöin $e_j \xrightarrow{w} \overline{0} = (0, 0, \ldots)$ avaruudessa ℓ^p kun $j \to \infty$. Nimittäin, Esimerkin 9.3 mukaan $(\ell^p)^* = \ell^q$, missä $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, ja dualiteetti on muotoa

$$y^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \qquad \text{kun } x = (x_n) \in \ell^p,\ y^* = (y_n) \in \ell^q.$$

Jos $y^* = (y_n) \in \ell^q$ on mielivaltainen funktionaali, niin tällöin

$$y^*(e_j) = y_j \to 0 = y^*(\overline{0}) \quad \text{kun } j \to \infty,$$

koska sarja $\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q$ suppenee.

(2) Avaruudessa ℓ^1 vastaava jono (e_j) ei suppene heikosti kohti $\overline{0}$ kun $j \to \infty$. Nimittäin,

$$x = (x_k) \mapsto y^*(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x_k, \quad x = (x_k) \in \ell^1,$$

määrittelee jatkuvan lineaarisen funktionaalin $y^* \in (\ell^1)^*$. Tällöin

$$y^*(e_j) = (-1)^j, \quad j \in \mathbb{N},$$

joten skalaarijono $(y^*(e_j))$ ei suppene. Pienellä lisätarkastelulla havaitaan, ettei jonolla (e_j) edes ole heikosti suppenevia osajonoja avaruudessa ℓ^1.

10.30. *Huomautus.* (1) Jonon (x_n) heikko raja-arvo on yksikäsitteinen. Nimittäin, olkoon $x_n \xrightarrow{w} y_1$ ja $x_n \xrightarrow{w} y_2$ kun $n \to \infty$ avaruudessa E. Jos $y_1 \neq y_2$, niin Hahn-Banachin lauseiden nojalla (Seuraus 9.17) on olemassa näitä pisteitä erottava funktionaali $x^* \in E$ jolle $x^*(y_1) = 1$ ja $x^*(y_2) = 0$. Tällöin suppenemisoletuksesta seuraa sekä $|x^*(x_n) - 1| < 1/2$ että $|x^*(x_n)| < 1/2$ kun $n \in \mathbb{N}$ on riittävän iso, mikä ei ole mahdollista.
(2) Jos $\|x_n - x\| \to 0$ kun $n \to \infty$, niin $x_n \xrightarrow{w} x$ avaruudessa E. Nimittäin, jos $x^* \in E^*$, niin $|x^*(x_n) - x^*(x)| \leq \|x^*\| \cdot \|x_n - x\| \to 0$ kun $n \to \infty$. Käänteinen implikaatio ei aina päde: Esimerkissä 10.29.(1) jono $e_j \xrightarrow{w} \overline{0}$ avaruudessa ℓ^p kun $j \to \infty$, mutta $\|e_j\|_p = 1$ kaikilla j.
(3) Jos $x_n \xrightarrow{w} x$ avaruudessa E kun $n \to \infty$, niin (x_n) on rajoitettu jono Banach-Steinhausin lauseen seurauksena (vrt. HT 9:16).

Olkoon H Hilbertin avaruus, $(x_n) \subset H$ jono sekä $x \in H$. Tällöin Fréchet-Rieszin lauseen 9.7 nojalla $x_n \xrightarrow{w} x$ avaruudessa H jos ja vain jos

$$\lim_{n\to\infty} (x_n|y) = (x|y) \qquad \text{kaikilla } y \in H.$$

Nimittäin, jokaisella $y^* \in H^*$ on olemassa yksikäsitteinen $y \in H$ jolle $y^*(x) = (x|y)$ kaikilla $x \in H$.

10.31. **Lemma.** *Olkoon H separoituva Hilbertin avaruus sekä $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ mielivaltainen rajoitettu jono. Tällöin jonolla (x_n) on heikosti suppeneva osajono: on olemassa osajono (x_{n_k}) ja sellainen vektori $x \in H$, että*

$$x_{n_k} \xrightarrow{w} x \qquad \text{kun } k \to \infty.$$

Huomautus. Ylläoleva tulos pätee jokaisessa *refleksiivisessä* Banachin avaruudessa, mutta yleisempää tulosta varten pitäisi tutkia tarkemmin Banachin avaruuden heikon topologian ominaisuuksia.

Todistus. Voidaan olettaa, että H on ääretön-ulotteinen, koska tapauksessa $dim(H) < \infty$ argumentti on helpompi versio allaolevasta. Koska H on separoituva Hilbertin avaruus, niin luvun 4 teorian nojalla (Lause 4.41) avaruudella on ortonormaali Hilbertin kanta $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Etsitään haluttu osajono (x_{n_k}) "diagonalisoimalla" ortonormaalin kannan (e_j) alkioiden suhteen.

Olkoon $C = \sup_n \|x_n\|$. Koska $|(x_n|e_j)| \le \|x_n\| \cdot \|e_j\| \le C$ kaikilla j ja n, niin skalaarijoukko $\{(x_n|e_j) : n, j \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{K}$ on siis rajoitettu. Heine-Borelin lauseen nojalla on olemassa suppeneva osajono $(x_k^{(1)}|e_1) \to c_1$ kun $k \to \infty$. Samasta syystä on olemassa osajono $(x_k^{(2)})_{k\in\mathbb{N}}$ jonolle $(x_k^{(1)})_{k\in\mathbb{N}}$, jolle $(x_k^{(2)}|e_2) \to c_2$ kun $k \to \infty$. Näin jatkamalla löydetään jokaisella $r \in \mathbb{N}$ osajono $(x_k^{(r)})_{k\in\mathbb{N}}$ edellisestä valinnasta $(x_k^{(r-1)})_{k\in\mathbb{N}}$, jolle $(x_k^{(r)}|e_r) \to c_r$ kun $k \to \infty$. Tarkastellaan diagonaalijonoa $(y_k) = (x_k^{(k)})$, joka on alkuperäisen jonon (x_n) osajono. Selvästi

$$\lim_{k\to\infty} (y_k|e_r) = c_r \quad \text{kaikilla } r \in \mathbb{N}, \tag{10.32}$$

koska $(y_k)_{k\ge r}$ on konstruktion nojalla jonon $(x_k^{(r)})_{k\in\mathbb{N}}$ osajono.

Toteamme seuraavaksi että $\sum_{j=1}^\infty |c_j|^2 < \infty$, jolloin erityisesti $x = \sum_{j=1}^\infty c_j e_j$ on avaruuden H vektori Riesz-Fischerin lauseen nojalla (Seuraus 4.38). Olkoon tätä varten $m \in \mathbb{N}$ mielivaltainen. Koska (e_j) on avaruuden ortonormaali kanta, niin $\sum_{j=1}^\infty |(x_n|e_j)|^2 = \|x_n\|^2 \le C^2$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin epäyhtälön säilymisen nojalla

$$\sum_{j=1}^m |c_j|^2 = \sum_{j=1}^m \lim_{k\to\infty} |(y_k|e_j)|^2 = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^m |(y_k|e_j)|^2 \le C^2 \quad \text{kaikilla } m.$$

Väite. *Jono* $y_k \xrightarrow{w} x$ *avaruudessa* H *kun* $k \to \infty$, *eli* (y_k) *on etsitty heikosti suppeneva osajono annetulle jonolle* (x_n).

Olkoon $z = \sum_{j=1}^\infty d_j e_j \in H$ mielivaltainen vektori. Tällöin sisätulon ominaisuuksista, Cauchy-Schwarzin epäyhtälöstä sekä ortonormaalisuudesta saadaan

$$\begin{aligned}
|(y_k|z) - (x|z)| &= |\sum_{j=1}^\infty \overline{d_j}(y_k - x|e_j)| \le \sum_{j=1}^\infty |\overline{d_j}| \cdot |(y_k - x|e_j)| \\
&\le (\sum_{j=1}^\infty |d_j|^2)^{1/2} (\sum_{j=1}^\infty |(y_k - x|e_j)|^2)^{1/2} \\
&= \|z\| \cdot (\sum_{j=1}^\infty |(y_k - x|e_j)|^2)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Olkoon $\varepsilon > 0$ annettu. Koska $\sum_{j=1}^\infty |(y_k - x|e_j)|^2 = \|y_k - x\|^2$ voidaan kiinnittää $j_0 \in \mathbb{N}$ jolle $\sum_{j=j_0+1}^\infty |(y_k - x|e_j)|^2 < \varepsilon^2/4$. Valitaan tämän jälkeen sellainen

$k_0 \in \mathbb{N}$, että jokaisella $k \geq k_0$ on voimassa

$$|(y_k - x|e_j)| < \frac{\varepsilon}{2j_0} \quad \text{kaikilla } j = 1, \dots, j_0.$$

Tämä on mahdollista, koska (10.32) mukaan $(x|e_j) = c_j = \lim_{k\to\infty}(y_k|e_j)$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Yhdistämällä nämä arviot saadaan

$$\begin{aligned}|(y_k|z) - (x|z)| &\leq \|z\|\Big(\sum_{j=1}^{j_0} |(y_k - x|e_j)|^2 + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} |(y_k - x|e_j)|^2\Big)^{1/2}\\ &\leq \|z\|\sqrt{\varepsilon^2/4 + \varepsilon^2/4} \leq \|z\|\varepsilon\end{aligned}$$

kaikilla $k \geq k_0$. □

Luvussa 9 määrittelimme jokaiselle $T \in \mathcal{L}(H)$ transpoosi $T^* \in \mathcal{L}(H^*)$ ehdolla

(10.33) $$T^*y^*(x) = y^*(Tx) \quad \text{kun } x \in H,\ y^* \in H^*.$$

10.34. **Lause.** *Olkoon H separoituva Hilbertin avaruus ja $T \in \mathcal{L}(H)$ rajoitettu lineaarinen operaattori. Tällöin $T \in \mathcal{K}(H)$ on kompakti jos ja vain jos $\|Tx_n\| \to 0$ kun $n \to \infty$ jokaisella jonolla $(x_n) \subset E$ jolle $x_n \xrightarrow{w} \overline{0}$ kun $n \to \infty$.*

Todistus. "$\Rightarrow$" Olkoon $T \in \mathcal{K}(H)$ sekä $(x_n) \subset E$ jono, jolle $x_n \xrightarrow{w} \overline{0}$ kun $n \to \infty$. Väitämme, että $\lim_n \|Tx_n\| = 0$.

Tehdään vastaoletus: on olemassa $c > 0$, jolle $\|Tx_n\| \geq c$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ (voidaan toki tarvittaessa siirtyä osajonoon). Operaattorin T kompaktisuuden nojalla on olemassa sellainen osajono (x_{n_k}) ja vektori $y \in H$, että $\|Tx_{n_k} - y\| \to 0$ kun $k \to \infty$. Jos $y^* \in H^*$, niin

$$y^*(Tx_{n_k}) = T^*y^*(x_{n_k}) \to 0 \quad \text{kun } k \to \infty,$$

koska $T^*y^* \in H^*$. Näin siis $Tx_{n_k} \xrightarrow{w} \overline{0}$ avaruudessa H kun $k \to \infty$. Toisaalta, Huomautuksen 10.30 kohtien (1) ja (2) perusteella $y = \overline{0}$, mikä on ristiriidassa ehdon $\|Tx_{n_k}\| \geq c$ kanssa kun $k \in \mathbb{N}$.

"$\Leftarrow$" Oletamme, että lauseen ehto on voimassa, mutta $T \notin \mathcal{K}(H)$. Tällöin on olemassa jono $(x_n) \subset B_H$ ja $c > 0$, jolle

$$\|Tx_n - Tx_m\| \geq c \quad \text{kaikilla } n \neq m.$$

Lemman 10.31 perusteella voimme olettaa, että jokin osajono $x_{n_k} \xrightarrow{w} x$ avaruudessa H kun $k \to \infty$. Koska $x_{n_k} - x \xrightarrow{w} \overline{0}$, niin oletuksen mukaan

$$\|Tx_{n_k} - Tx\| = \|T(x_{n_k} - x)\| \to 0 \quad \text{kun } k \to \infty.$$

Erityisesti tällöin $\|Tx_{n_k} - Tx_{n_k}\| \leq \|Tx_{n_k} - Tx\| + \|Tx - Tx_{n_l}\| < c/2$ kaikilla riittävän isoilla indekseillä $k, l \in \mathbb{N}$, mikä on ristiriita. □

Olkoon H ja K Hilbertin avaruuksia sekä $T \in \mathcal{L}(H,K)$ rajoitettu lineaarinen operaattori. Tällöin määritellään (luku 9) *adjungaatti* $T^* : K \to H$ ehdolla

$$(T^*x|y) = (x|Ty) \quad \text{kaikilla } x, y \in H. \tag{10.35}$$

Helposti verifioidaan, että T^* on lineaarinen kuvaus $K \to H$, jolle on lisäksi voimassa $\|T^*\| = \|T\|$. Nimittäin,

$$\begin{aligned}\|T^*\| &= \sup_{\|x\|\le 1} \|T^*x\| = \sup_{\|x\|\le 1} \sup_{\|y\|\le 1} |(T^*x|y)| \\ &= \sup_{\|x\|\le 1} \sup_{\|y\|\le 1} |(x|Ty)| = \sup_{\|y\|\le 1} \|Ty\| = \|T\|.\end{aligned}$$

Huomautus. Ehdon (10.35) määrittelemä adjungaatti $T^* \in \mathcal{L}(K,H)$ on mielekäs ainoastaan Hilbertin avaruuksien välillä, mutta tässä tapauksessa adjungaatti on vakiintunut käsite transpoosin sijasta. Huomaa erona, että ehdon (10.33) määrittelemä transpoosi on lineaarinen kuvaus $K^* \to H^*$. Läheinen yhteys näiden käsitteiden välillä käy kuitenkin ilmi kaavasta (tarkista!)

$$T^* = (\tau_H)^{-1} \circ T' \circ \tau_K, \tag{10.36}$$

missä T' on operaattorin T transpoosi, ja τ_H sekä τ_K ovat luonnolliset konjugaattilineaariset isometriset bijektiot $H \to H^*$ sekä $K \to K^*$ (Fréchet-Rieszin lause 9.7). Jatkossa tässä osiossa T^* tarkoittaa aina operaattorin $T \in \mathcal{L}(H,K)$ adjungaattia kun H ja K ovat Hilbertin avaruuksia (ellei toisin sanota).

Esitämme seuraavaksi joitakin adjungaatin perusominaisuuksia.

10.37. **Lause.** *Olkoon H, K Hilbertin avaruuksia sekä $S, T \in \mathcal{L}(H,K)$. Tällöin*
(i) $\|T^*T\| = \|T\|^2$,
(ii) $T^{**} = T$, *kun merkitään* $T^{**} = (T^*)^*$,
(iii) $(aS + bT)^* = \overline{a}S^* + \overline{b}T^*$ *kun* $a, b \in \mathbb{K}$.

Todistus. (i) Jos $x \in H$ ja $\|x\| = 1$, niin Cauchy-Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$\|Tx\|^2 = (Tx|Tx) = (x|T^*Tx) \le \|T^*Tx\|.$$

Tästä seuraa $\|T\|^2 \le \|T^*T\|$ ottamalla supremum puolittain yli x. Toisaalta, $\|T^*T\| \le \|T^*\| \cdot \|T\| = \|T\|^2$ yhdistetyn kuvauksen normiarvion perusteella.
(ii) Jos $x, y \in H$, niin

$$(T^{**}x|y) = (x|T^*y) = \overline{(T^*y|x)} = \overline{(y|Tx)} = (Tx|y).$$

Tällöin $(T^{**}x - Tx|y) = 0$ kaikilla $y \in H$, joten $T^{**}x = Tx$ kaikilla $x \in H$, eli $T^{**} = T$.

(iii) Jos $x, y \in H$, niin

$$\begin{aligned}((aS+bT)^*x|y) &= (x|(aS+bT)y) = \overline{a}(x|Sy) + \overline{b}(x|Ty) \\ &= \overline{a}(S^*x|y) + \overline{b}(T^*x|y) = ((\overline{a}S^* + \overline{b}T^*)x|y).\end{aligned}$$

Kuten edellä tästä saadaan $(aS+bT)^* = \overline{a}S^* + \overline{b}T^*$. □

Jos H, K ovat Hilbertin avaruuksia, ja $T : H \to K$ on jatkuva lineaarikuvaus, niin $T \in \mathcal{K}(H,K)$ on kompakti jos ja vain jos $T^* \in \mathcal{K}(K,H)$. Tämä havainto seuraa yleisestä Schauderin lauseesta 10.20 sekä kaavasta (10.36). On kuitenkin opettavaista todeta, että tämä seikka seuraa myös helposti suoraan Lemman 10.31 kriteerin avulla. Nimittäin, olkoon $T \in \mathcal{K}(H,K)$ sekä jono $x_n \xrightarrow{w} \overline{0}$ avaruudessa H. Tällöin $T^*x_n \xrightarrow{w} \overline{0}$ (vrt. Lauseen 10.34 todistus), joten $\|T(T^*x_n)\| \to 0$ operaattorin T kompaktisuuden nojalla kun $n \to \infty$. Saamme

$$\|T^*x_n\|^2 = (T^*x_n|T^*x_n) = (T(T^*x_n)|x_n) \le C\|T(T^*x_n)\| \to 0$$

kun $n \to \infty$, missä $C = \sup_n \|x_n\| < \infty$ (Huomautus 10.30.(3)). Lemmasta 10.31 seuraa tällöin, että $T^* \in \mathcal{K}(K,H)$. Kääntäen, jos $T^* \in \mathcal{K}(K,H)$ niin edellisen nojalla myös $T^{**} = T \in \mathcal{K}(H,K)$ on kompakti.

Seuraavaksi tutustutaan tärkeään ja hyödylliseen operaattoriluokkaan.

10.38. **Määritelmä.** Olkoon H Hilbertin avaruus. Operaattori $T \in \mathcal{L}(H)$ on *itse-adjungoitu* jos $T^* = T$, eli

$$(Tx|y) = (x|Ty) \quad \text{kaikilla } x, y \in H.$$

Huomautus. Jos H on kompleksinen Hilbertin avaruus ja $T \in \mathcal{L}(H)$ on itse-adjungoitu, niin $(Tu|u) \in \mathbb{R}$ kaikilla $u \in H$. Nimittäin,

$$(Tu|u) = (u|T^*u) = (u|Tu) = \overline{(Tu|u)}.$$

Kääntäen, jos $(Tu|u) \in \mathbb{R}$ kaikilla $u \in H$, niin T on itse-adjungoitu (HT 11:?). (Huomaa, että jos H on reaalinen Hilbertin avaruus, niin tämä implikaatio ei aina päde.)

10.39. **Esimerkki.** Olkoon H Hilbertin avaruus ja $S, T \in \mathcal{L}(H)$ itse-adjungoituja operaattoreita. Tällöin
(i) $S+T$ on itse-adjungoitu,
(ii) jos $c \in \mathbb{R}$, niin cS on itse-adjungoitu,
(iii) jos $ST = TS$, niin ST on itse-adjungoitu.

Kohdat (i) ja (ii) seuraavat heti Lauseesta 10.37.(iii). Jos $x, y \in H$, niin

$$(STx|y) = (TSx|y) = (Sx|Ty) = (x|STy),$$

joten $(ST)^* = ST$.

Jos $x, y \in H$ ovat vektoreita, niin $x \otimes y \in \mathcal{L}(H)$ on 1-ulotteinen operaattori, missä

$$(x \otimes y)z = (z|x)y, \quad \text{kun } z \in H.$$

10.40. **Esimerkki.** Olkoon H Hilbertin avaruus, $(e_n) \subset H$ ortonormaali jono ja $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ rajoitettu reaalilukujono. Tällöin operaattori

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \otimes e_n$$

on itse-adjungoitu.

Todistus. Määritelmän mukaan $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x|e_n) e_n$ kun $x \in H$. Yleistetystä Pythagoraan lauseesta 4.37 sekä Besselin epäyhtälöstä seuraa, että

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2 = \|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x|e_n) e_n\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |(x|e_n)|^2 \\ &\leq \sup_m |\lambda_m|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |(x|e_n)|^2 \leq \sup_m |\lambda_m|^2 \|x\|^2,\end{aligned}$$

joten $T \in \mathcal{L}(H)$.

Jos $x, y \in H$, niin sisätulon jatkuvuudesta

$$\begin{aligned}(Tx|y) = (\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x|e_n) e_n | y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x|e_n)(e_n|y) \\ = (x| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \overline{(e_n|y)} e_n) &= (x| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (y|e_n) e_n) = (x|Ty).\end{aligned}$$

Siis T on itse-adjungoitu operaattori. □

Spektraaliesitystä varten tarvitaan seuraava variaatio Esimerkistä 10.19.

10.41. **Esimerkki.** Olkoon H Hilbertin avaruus, $(e_n) \subset H$ ja $(f_n) \subset H$ ortonormaaleja jonoja, sekä (λ_n) skalaarijono jolle $\lim_n \lambda_n = 0$. Tällöin

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \otimes f_n$$

on kompakti operattori $H \to H$.

Todistus. Olkoon $m \in \mathbb{N}$. Jos $x \in B_H$, niin Lauseesta 4.37 sekä Besselin epäyhtälöstä seuraa, että

$$\begin{aligned}\|Tx - \sum_{n=1}^{m} \lambda_n (x|e_n) f_n\|^2 = \|\sum_{n=m+1}^{\infty} \lambda_n (x|e_n) f_n\|^2 &= \sum_{n=m+1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |(x|e_n)|^2 \\ &\leq \sup_{n \geq m+1} |\lambda_n|^2 \|x\|^2 \leq \sup_{n \geq m+1} |\lambda_n|^2.\end{aligned}$$

Siten $\|T - \sum_{n=1}^{m} \lambda_n e_n \otimes f_n\| \le \sup_{n\ge m+1} |\lambda_n| \to 0$ kun $m \to \infty$. Koska jokainen 1-ulotteinen peraattori $e_n \otimes f_n$ on kompakti (mieti miksi!) niin äärellinen summa $\sum_{n=1}^{m} \lambda_n e_n \otimes f_n$ on kompakti jokaisella m (Lause 10.14), joten myös raja-operaattori T on kompakti samoin Lauseen 10.14 mukaan. $\square$

Seuraava kaava itse-adjungoidun operaattorin normille on lähestymistavamme puuttuva palanen.

10.42. **Lemma.** *Olkoon H Hilbertin avaruus ja $T \in \mathcal{L}(H)$ itse-adjungoitu operaattori. Tällöin*

$$\|T\| = \sup\{|(Tx|x)| : \|x\| = 1\}. \tag{10.43}$$

Todistus. Merkitään

$$\alpha = \|T\| = \sup\{|(Tx|x)| : \|x\| = 1\}.$$

Cauchy-Schwarzin epäyhtälöstä $|(Tx|x)| \le \|T\|$ kun $\|x\| = 1$, joten $\alpha \le \|T\|$.

Koska $T^* = T$, niin kehittämällä auki sisätulot

$$\begin{aligned}(T(x+y)|x+y) - (T(x-y)|x-y) &= 2(Tx|y) + 2(Ty|x) = 2\big((Tx|y) + (y|Tx)\big)\\ &= 2\big((Tx|y) + \overline{(Tx|y)}\big) = 4Re(Tx|y)\end{aligned}$$

kaikilla $x, y \in H$. (Reaalisessa tapauksessa reaaliosa on tarpeeton.) Homogeenisuuden takia $|(Tv|v)| = |(T(\frac{v}{\|v\|})|\frac{v}{\|v\|})| \cdot \|v\|^2 \le \alpha\|v\|^2$ vektoreille $v \in H$, $v \ne \overline{0}$. Tämän epäyhtälön sekä suunnikasyhtälön (Lause 4.9) avulla saadaan kaikilla $x, y \in H$, missä $\|x\| = 1 = \|y\|$, arvio

$$\begin{aligned}4Re(Tx|y) &\le |(T(x+y)|x+y)| + |(T(x-y)|x-y)| \le \alpha\big(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\big)\\ &= 2\alpha\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big) = 4\alpha.\end{aligned}$$

Olkoon H kompleksinen Hilbertin avaruus. Jos $x, y \in H$, $\|x\| = 1 = \|y\|$, ovat mielivaltaisia, niin on olemassa $\lambda \in \mathbb{C}$ jolle $|\lambda| = 1$ ja $\lambda(Tx|y) = |(Tx|y)|$. Tällöin edellisen perusteella

$$|(Tx|y)| = \lambda(Tx|y) = (T(\lambda x)|y) = Re(T(\lambda x)|y) \le \alpha,$$

joten

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \sup_{\|y\|=1} |(Tx|y)| \le \alpha.$$

(Jos H on reaalinen Hilbertin avaruus riittää tarkastella $\lambda = \pm 1$.) $\square$

10.44. **Lause.** *Olkoon H Hilbertin avaruus ja $T \in \mathcal{K}(H)$ kompakti itse-adjungoitu operattori. Tällöin on olemassa (mahdollisesti äärellinen) reaalilukujono $(\lambda_n) \subset$*

$\mathbb{R}$ *jolle* $\lim_n \lambda_n = 0$ *sekä (mahdollisesti äärellinen) ortonormaali jono* $(e_n) \subset H$, *siten että*

$$T = \sum_n \lambda_n e_n \otimes e_n. \tag{10.45}$$

Huomautus. Ortonormaalisuudesta $Te_m = \sum_n \lambda_n (e_m|e_n)e_n = \lambda_m e_m$, joten jokainen $\lambda_m \in \mathbb{R}$ on operaattorin T ominaisarvo, ja e_m on vastaava ominaisvektori. Huomaa, että itse-adjungoidun operaattorin T kaikki ominaisarvot ovat reaalisia: jos $Tx = \lambda x$, missä $x \neq \overline{0}$, niin

$$(Tx|x) = (\lambda x|x) = \lambda \|x\|^2.$$

Koska $(Tx|x) \in \mathbb{R}$, niin $\lambda \in \mathbb{R}$.

Todistus. Voidaan olettaa, että $T \neq \overline{0}$. Lemman 10.42 nojalla

$$\|T\| = \sup\{|(Tx|x)| : \|x\| = 1\}.$$

Tällöin on olemassa jono $(x_n) \subset S_H \equiv \{x \in H : \|x\| = 1\}$, jolle $|(Tx_n|x_n)| \to \|T\|$ kun $n \to \infty$. Siirtymällä osajonoon, sekä mahdollisesti korvaamalla T operaattorilla $-T$, voidaan olettaa että $(Tx_n|x_n) \to \|T\|$ kun $n \to \infty$, missä $(Tx_n|x_n) \in \mathbb{R}$ kaikilla n. Koska

$$(Tx_n|x_n) \leq \|Tx_n\| \leq \|T\|,$$

niin myös $\|Tx_n\| \to \|T\|$ kun $n \to \infty$. Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned} \|Tx_n - \|T\|x_n\|^2 &= (Tx_n - \|T\|x_n | Tx_n - \|T\|x_n) \\ &= \|Tx_n\|^2 - \|T\|\big((Tx_n|x_n) + (x_n|Tx_n)\big) + \|T\|^2 \to 0 \end{aligned}$$

kun $n \to \infty$. Oletuksen nojalla $T \in \mathcal{K}(H)$ on kompakti, joten on olemassa osajono (x_{n_k}) ja $y \in H$ jolle $\|Tx_{n_k} - y\| \to 0$ kun $k \to \infty$. Erityisesti,

$$\|T\|x_{n_k} = \|T\|x_{n_k} - Tx_{n_k} + Tx_{n_k} \to y \quad \text{kun } k \to \infty.$$

Siten $\|T\|T(x_{n_k}) \to Ty$ kun $k \to \infty$, joten raja-arvon yksikäsitteisyyden nojalla $Ty = \|T\|y$.

Yhteenvetona siis jokaisella itse-adjungoidulla kompaktilla operaattorilla $T \neq \overline{0}$ on ominaisarvo $\pm\|T\| \neq 0$ (vähintään toinen näistä luvuista on ominaisarvo).

Olkoon $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq \mu$, itse-adjungoidun operaattorin T ominaisarvoja sekä $x, y \in H$ vastaavia ominaisvektoreita: $Tx = \lambda x$ ja $Ty = \mu y$. Tällöin x ja y ovat kohtisuorassa toisiaan kohtaan, eli $(x|y) = 0$. Nimittäin,

$$\lambda(x|y) = (Tx|y) = (x|Ty) = \mu(x|y),$$

eli $(\lambda - \mu)(x|y) = 0$. Koska $\lambda - \mu \neq 0$, niin $(x|y) = 0$. Tästä seuraa, että jokaisella $\delta > 0$ operaattorin T ominaisarvojen joukko λ joille $|\lambda| \geq \delta$, on äärellinen. Nimittäin, olkoon (λ_n) jono eri ominaisarvoja T:lle sekä $(x_n) \subset S_H$ näitä vastaava normitettu jono ominaisvektoreita, eli $Tx_n = \lambda_n x_n$ kaikilla n. Tällöin (x_n) on avaruuden H ortonormaali jono ylläolevan havainnon nojalla, joten Besselin epäyhtälön mukaan

$$\sum_n |(x|x_n)|^2 \leq \|x\|^2 \quad \text{kaikilla } x \in H.$$

Tämä tarkoittaa, että $x_n \xrightarrow{w} \overline{0}$ heikosti avaruudessa H kun $n \to \infty$. Koska T on kompakti, niin Lauseesta 10.34 seuraa, että $|\lambda_n| = \|Tx_n\| \to 0$ kun $n \to \infty$.

Yhteenvetona siis joko operaattorilla T on vain äärellisen monta ominaisarvoa, tai sitten ominaisarvojen jono (λ_n) suppenee nollaan kun $n \to \infty$.

Havaitaan seuraavaksi, että jos $\lambda \neq 0$ on operattorin T ominaisarvo, niin vastaavien ominaisvektoreiden aliavaruus

$$M_\lambda = Ker(\lambda - T) = \{x \in H : Tx = \lambda x\}$$

on äärellisulotteinen. Nimittäin, jos M_λ olisi ääretön-ulotteinen ja (e_n) on ortonormaali kanta aliavaruudelle M_λ, niin kuten edellä saadaan, että $e_n \xrightarrow{w} \overline{0}$ ja $|\lambda| = \|Te_n\| \to 0$ kun $n \to \infty$, mikä on ristiriita. [Vaihtoehtoisesti, tämä tieto seuraa myös yleisestä Riesz-Fredholmin lauseesta 10.25.(i), koska

$$M_\lambda = Ker(I - \lambda^{-1}T),$$

missä $\lambda^{-1}T \in \mathcal{K}(H)$.]

Olkoon $\{\mu_1, \mu_2, \ldots\}$ operaattorin T kaikkien *eri* ei-nollaa olevien ominaisarvojen (äärellinen tai ääretön) joukko järjestettynä siten, että $|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \ldots$. Merkitään $m_n = \dim(M_n)$, missä $M_n = Ker(\mu_n - T)$, jolloin siis $m_n < \infty$ kaikilla n. Olkoon lisäksi $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ ominaisarvojen jono $(\mu_1, \mu_2, \ldots)$ siten, että alussa toistetaan ominaisarvo μ_1 m_1 kertaa, tämän jälkeen toistetaan ominaisarvo μ_2 m_2 kertaa jne. Olkoon lopuksi $(e_1, e_2, \ldots) \subset S_H$ ortonormaali jono, missä $(e_1, \ldots, e_{m_1})$ on ortonormaali kanta aliavaruudelle M_1, $(e_{m_1+1}, \ldots, e_{m_1+m_2})$ on ortonormaali kanta aliavaruudelle M_2 jne. (Koska eri ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit ovat keskenään kohtisuorassa, niin jonosta (e_n) tulee ortonormaali.) Erityisesti siis $Te_n = \lambda_n e_n$ kaikilla n.

Asetetaan

$$T_0 x = \sum_n \lambda_n (x|e_n) e_n \quad \text{kun } x \in H.$$

Esimerkkien 10.40 ja 10.41 nojalla $T_0 \in \mathcal{K}(H)$ on kompakti itse-adjungoitu operaattori. Olkoon M kaikkien ominaisvektoreiden e_n virittämä suljettu vektorialiavaruus H:ssa. Määritelmän mukaan $T_0 M \subset M$ ja $T_0 x = \overline{0}$ jos $x \in M^\perp$, koska tällöin $(x|e_n) = 0$ kaikilla n. Lisäksi, jos $x \in M^\perp$, niin

$$(Tx|e_n) = (x|Te_n) = \lambda_n (x|e_n) = 0$$

kaikilla n, joten $Tx \in M^\perp$. Näin siis $T(M^\perp) \subset M^\perp$.

Tarkastellaan itse-adjungoitua operaattoria $S = T - T_0 \in \mathcal{K}(H)$, ja havaitaan ettei S:lla ole lainkaan ominaisarvoja $\mu \neq 0$. Nimittäin, jos $\mu \neq 0$ olisi ominaisarvo S:lle ja $Sx = \mu x$, missä $x \neq \overline{0}$, niin

$$T(x - \sum_n (x|e_n)e_n) = Tx - \sum_n \lambda_n (x|e_n)e_n = Tx - T_0 x = Sx = \mu x,$$

koska $Te_n = \lambda_n e_n$ kaikilla n. Edellä vektori $x - \sum_n (x|e_n)e_n \in M^\perp$ ortoprojektiolauseen 4.21 mukaan, josta päätellään että $x \in M^\perp$ koska $T(M^\perp) \subset M^\perp$ ja $\mu \neq 0$. Tällöin $T_0 x = \overline{0}$ ja $Tx = Sx = \mu x$, joten $\mu \neq 0$ on operaattorin T ominaisarvo. Konstruktion perusteella jokainen sellainen ominaisarvo esiintyy jonossa (μ_n), joten $\mu = \mu_m$ jollakin m. Silloin vastaava ominaisvektori $x \in M_m \subset M$. Tämä taas tarkoittaa, että $x \in M \cap M^\perp = \{\overline{0}\}$, mikä on ristiriita.

Yhteenvetona $S = T - T_0$ on kompakti itse-adjungoitu operaattori $H \to H$, jolla ei ole ominaisarvoja $\mu \neq 0$. Todistuksen ensimmäisen askeleen mukaan $S = T - T_0 = \overline{0}$. Erityisesti

$$Tx = \sum_n \lambda_n (x|e_n)e_n, \quad x \in H,$$

mikä on väitetty spektraaliesitys. □

Olkoon E_k ortoprojektio $H \to M_k$ kaikilla k, eli Lauseen 10.44 merkinnöin $E_k x = \sum_{n:e_n \in M_k} (x|e_n)e_n$ kun $x \in E$ (Lause 4.34). Jos $T^* = T \in \mathcal{K}(H)$, niin tällöin Spektraalilauseen 10.44 nojalla

$$Tx = \sum_n \mu_n E_n x, \quad x \in H,$$

missä oikeanpuoleinen sarja suppenee pisteittäin. Tässä (μ_k) on operaattorin T eri ei-nollaa olevien ominaisarvojen jono järjestettyinä siten että $|\mu_k| \geq |\mu_{k+1}|$ kaikilla k. Sarjan suppenemisesta voidaan itse asiassa sanoa enemmän.

10.46. **Seuraus.** *(Spektraaliprojektioversio) Olkoon H Hilbertin avaruus ja $T^* = T \in \mathcal{K}(H)$ kompakti itse-adjungoitu operattori. Tällöin*

$$T = \sum_n \mu_n E_n,$$

missä suppeneminen tapahtuu operaattorinormin suhteen.

Todistus. Yleistetyn Pythagoraan Lauseen 4.37 sekä Besselin epäyhtälön nojalla [kaipaa lisää yksityiskohtia!?]

$$\begin{aligned}\|Tx - \sum_{k=1}^{N} \mu_k E_k x\|^2 &= \|\sum_{k>N} \mu_k E_k x\|^2 = \sum_{k>N} |\mu_k|^2 \cdot \|E_k x\|^2 \\ &\le \sup_{k>N} |\mu_k|^2 \sum_{k>N} \|E_k x\|^2 \le \sup_{k>N} |\mu_k|^2 \|x\|^2\end{aligned}$$

kaikilla $x \in H$, koska $E_k x \perp E_l x$ kun $k \neq l$. Tällöin

$$\|T - \sum_{k=1}^{N} \mu_k E_k\| \le \sup_{k>N} |\mu_k| \to 0$$

kun $N \to \infty$. □

Huomautus. Olkoon $N = Ker(T)$. Lauseen 10.44 todistuksesta seuraa, että $T(M^{\perp}) = \{\overline{0}\}$, joten $H = Ker(T) \oplus M$ (ortogonaalinen suora summa). Tästä seuraa, että

$$H = Ker(T) \oplus M_1 \oplus M_2 \oplus \dots,$$

missä aliavaruudet $M_k \perp M_l$ aina kun $k \neq l$. Ylläoleva suora summa tarkoittaa, että jokaisella $x \in H$ on yksikäsitteinen normissa suppeneva esitys $x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k$, missä $x_0 \in Ker(T)$ ja $x_k \in M_k$ kaikilla k ovat keskenään kohtisuorassa toisiaan vastaan. [Perustelut!?]

Seuraavana tavoitteenamme on laajentaa Lauseen 10.44 esitys (10.45) kaikille kompakteille operaattoreille $H \to H$. Havaitsemme aluksi, että jos $T \in \mathcal{L}(H)$, niin T^*T on itse-adjungoitu. Nimittäin,

$$(T^*Tx|y) = (Tx|Ty) = (x|T^*Ty) \quad \text{kaikilla } x, y \in H.$$

Jos $T \in \mathcal{K}(H)$ on kompakti operaattori, niin $T^*T \in \mathcal{K}(H)$ on itse-adjungoitu, joten Lauseen 10.44 nojalla on olemassa esitys

$$T^*Tx = \sum_n \lambda_n (x|e_n) e_n, \quad x \in H,$$

missä $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ on (mahdollisesti äärellinen) reaalilukujono, $\lim_n \lambda_n = 0$ (jos jono on ääretön) ja $(e_n) \subset H$ on (mahdollisesti äärellinen) ortonormaali jono. Lisäksi edellä $\lambda_n > 0$ kaikilla n, koska $\lambda_n = (T^*Te_n|e_n) = (Te_n|Te_n) = \|Te_n\|^2$. Asetetaan

$$|T|x = \sum_n \sqrt{\lambda_n} (x|e_n) e_n, \quad x \in H. \tag{10.47}$$

10.48. **Lause.** *Olkoon H Hilbertin avaruus, $T \in \mathcal{K}(H)$ kompakti operaattori sekä $|T|$ kaavan* (10.47) *määrittelemä kuvaus. Tällöin*
(i) $|T| \in \mathcal{K}(H)$ *on kompakti itse-adjungoitu operaattori.*
(ii) $|T|^2 = T^*T$ *(missä $|T|^2 = |T| \circ |T|$ on yhdistetty kuvaus).*

Todistus. (i) Tämä seuraa heti Esimerkeistä 10.40 ja 10.41, koska $\lambda_n \to 0$ kun $n \to \infty$ jos (λ_n) on ääretön jono.
(ii) Jonon (e_n) ortonormaalisuudesta ja sisätulon jatkuvuudesta saadaan

$$|T|^2x = |T|(\sum_n \sqrt{\lambda_n}(x|e_n)e_n) = \sum_m \sqrt{\lambda_m}(\sum_n \sqrt{\lambda_n}(x|e_n)e_n|e_m)e_m$$
$$= \sum_{m,n} \sqrt{\lambda_m}\sqrt{\lambda_n}(x|e_n)(e_n|e_m)e_m = \sum_n \lambda_n(x|e_n)e_n = T^*Tx$$

kun $x \in H$. □

Huomautus. Lisävaivalla voidaan todistaa, että kaavan (10.47) määrittelemä kuvaus $|T|$ on *yksikäsitteinen* itse-adjungoitu operaattori $S \in \mathcal{K}(H)$ jolle $(Sx|x) \geq 0$ kaikilla $x \in H$ ja $S^2 = T^*T$ (merkitään tällöin $|T| = (T^*T)^{1/2}$ ja sanotaan että $|T|$ on operattorin moduuli). Koska emme tarvitse tätä tarkempaa tietoa tässä yhteydessä niin viitamme esimerkiksi kirjaan D. Werner: *Funktionalanalysis*, VI.3.4. Yleisemmin, jokaisella $T \in \mathcal{L}(H)$ on olemassa yksikäsitteinen rajoitettu operaattori $|T| \in \mathcal{L}(H)$, että $(|T|x|x) \geq 0$ kaikilla $x \in H$ ja $|T|^2 = T^*T$.

Seuraava tieto on ns. *polaarihajotelma* kompakteille operaattoreille $H \to H$. Tässäkin tyydymme minimiversioon joka riittää meidän spektraaliesitystä varten.

10.49. **Lause.** *Olkoon H Hilbertin avaruus, $T \in \mathcal{K}(H)$ kompakti operaattori sekä $|T|$ kaavan* (10.47) *määrittelemä kuvaus. Tällöin on olemassa sellainen operaattori $U \in \mathcal{L}(H)$, että*

(10.50) $$T = U|T|,$$

$\|Ux\| = \|x\|$ *kaikilla* $x \in \overline{Im(|T|)}$ *ja* $Uy = \overline{0}$ *kaikilla* $y \in Im(|T|)^\perp$.

Todistus. Jos $x \in H$, niin

$$\||T|x\|^2 = (|T|x||T|x) = (x||T|^2x) = (x|T^*Tx) = (Tx|Tx) = \|Tx\|^2.$$

Tällöin voidaan määritellä lineaarinen kuvaus $U : Im(|T|) \to Im(T)$ aettamalla $U(|T|x) = Tx$ kun $x \in H$. Koska ylläolevan kaavan nojalla

$$\|U(|T|x)\| = \|Tx\| = \||T|x\| \quad \text{kaikilla } |T|x \in Im(|T|),$$

niin laajennuslauseen 6.16 nojalla U laajenee yksikäsitteiseksi lineaarikuvaukseksi $U : \overline{Im(|T|)} \to \overline{Im(T)}$ sulkeumien välillä, jolle edelleen on voimassa

$\|Ux\| = \|x\|$ kaikilla $x \in \overline{Im(|T|)}$ (normin säilyminen seuraa Lauseen 6.16 todistuksesta, tarkista miksi!). Lopuksi, koska $H = \overline{Im(|T|)} \oplus Im(|T|)^\perp$ luvun 4 teorian nojalla, niin voidaan asettaa $Uy = \overline{0}$ kaikilla $y \in Im(|T|)^\perp$. Tällöin operattorilla $U \in \mathcal{L}(H)$ on halutut ominaisuudet.

(Sanotaan, että U on *osittainen isometria*, koska U on isometria rajoitettuna suljettuun aliavaruuteen $\overline{Im(|T|)}$ ja nollakuvaus sen ortokomplementissa.) □

10.51. **Lause.** *Olkoon H Hilbertin avaruus ja $T \in \mathcal{K}(H)$ kompakti operattori. Tällöin on olemassa (mahdollisesti äärellinen) reaalilukujono $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ jolle $\lim_n \lambda_n = 0$ sekä (mahdollisesti äärelliset) ortonormaalit jonot $(e_n) \subset H$ ja $(f_n) \subset H$, siten että*

$$T = \sum_n \lambda_n e_n \otimes f_n. \tag{10.52}$$

Todistus. Operaattori $T^*T \in \mathcal{K}(H)$ on kompakti ja itse-adjungoitu. Olkoon

$$T^*Tx = \sum_n \lambda_n (x|e_n)e_n, \quad x \in H,$$

Lauseen 10.44 antama spektraaliesitys, missä $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ on (mahdollisesti äärellinen) positiivinen reaalilukujono ja $(e_n) \subset H$ on (mahdollisesti äärellinen) ortonormaali jono, sekä

$$|T|x = \sum_n \sqrt{\lambda_n}(x|e_n)e_n, \quad x \in H,$$

kuten kaavassa (10.47). Polaarihajotelmasta (Lause 10.49) tiedämme, että $T = U|T|$, missä $\|Ux\| = \|x\|$ kun $x \in \overline{Im(|T|)}$. Tällöin

$$Tx = U|T|x = U(\sum_n \sqrt{\lambda_n}(x|e_n)e_n) = \sum_n \sqrt{\lambda_n}(x|e_n)Ue_n$$

kun $x \in H$. Merkitään $f_n = Ue_n$ kaikilla n.

Verifioimme lopuksi, että $(Ue_n) = (f_n)$ on myös ortonormaali jono. Tämä seuraa ns. polarisaatiokaavasta (HT 4:2): jos H on kompleksinen Hilbertin avaruus, niin kaikilla n, m saadaan

$$\begin{aligned}
&(Ue_n|Ue_m) \\
&= \frac{1}{4}\big(\|U(e_n + e_m)\|^2 - \|U(e_n - e_m)\|^2 + i(\|U(e_n + ie_m)\|^2 - \|U(e_n - ie_m)\|^2)\big) \\
&= \frac{1}{4}\big(\|e_n + e_m\|^2 - \|e_n - e_m\|^2 + i(\|e_n + ie_m\|^2 - \|e_n - ie_m\|^2)\big) = (e_n|e_m),
\end{aligned}$$

koska $e_n \pm ie_m \in Im(|T|)$, ja näin $\|U(e_n \pm ie_m)\| = \|e_n \pm ie_m\|$. Reaalinen tapaus on samanlainen, mutta helpompi, koska termi $i(\|U(e_n+ie_m)\|^2 - \|U(e_n-ie_m)\|^2)$ puuttuu polarisaatiokaavasta.

[Vaihtoehto ilman polarisaatiokaavaa: HT 11:a (helpompi?)] □

Huomautus. Kompaktilla operaattorilla $T \in \mathcal{K}(H)$ ei aina ole ominaisarvoja. Volterran integraalioperaattori $V : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ on tästä konkreettinen esimerkki, missä

$$(Vf)(x) = \int_0^x f(t)dt, \qquad \text{kun } f \in L^2(0,1), x \in [0,1]$$

(yksityiskohdat? HT??).

Lisätietoja. Olkoon E kompleksinen Banachin avaruus. Operattorin $T \in \mathcal{L}(E)$ *spektri* on

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - T \text{ ei ole kääntyvä }\}.$$

Muistutus: $\lambda - T$ on kääntyvä $E \to E$ jos ja vain jos $\lambda - T$ on jatkuva bijektio $E \to E$ (Seuraus 8.7). Voidaan osoittaa, että $\sigma(T) \subset \mathbb{C}$ on aina epä-tyhjä kompakti joukko. Määritelmän mukaan jokainen T:n ominaisarvo $\lambda \in \sigma(T)$, mutta $\sigma(T)$ on yleensä ominaisarvoja paljon laajempi joukko.

Spektraaliteoria on monipuolinen ja hyödyllinen teoria, jossa tutkitaan operaattoreiden spektrejä ja niiden sovelluksia. Funktionaalikalkyylissa konstruoidaan operaattori $f(T)$ aina kun $f : U \to \mathbb{C}$ on analyyttinen kuvaus, missä $U \subset \mathbb{C}$ on rajoitettu avoin joukko jolle $\sigma(T) \subset U$. Esimerkiksi, jos H on kompleksinen Hilbertin avaruus ja $T^* = T \in \mathcal{K}(H)$, niin olkoon $T = \sum_n \lambda_n e_n \otimes e_n$ vastaava Hilbert-Schmidtin esitys (10.45). Jos $f : I \to \mathbb{R}$ on jatkuva kuvaus, missä $I \subset \mathbb{R}$ on väli joka sisältää kaikki T:n ominaisarvot, niin tällöin määritellään $f(T) \in \mathcal{L}(H)$ asettamalla

$$f(T)x = \sum_n f(\lambda_n)(x|e_n)e_n, \quad x \in H.$$

Operaattorin $|T|$ määritelmä kaavassa (10.47) kuvauksen T^*T tapauksessa on esimerkki tästä, missä $f(t) = \sqrt{t}$ kun $t \geq 0$.

Spektraaliteorian perusteet vähän eri näkökulmista löytyy esimerkiksi kirjoista Rudin: *Functional Analysis*, Werner: *Funktionalanalysis* tai Bollobas: *Linear Analysis*.

Harjoitustehtäviä

11:1 Olkoon $f_s(t) = e^{-st}$ kun $t \in [0,1]$ ja $s \in \mathbf{R}$. Tutki, onko joukko $\{f_s : s \geq 0\}$ relatiivisesti kompakti avaruudessa $C(0,1)$.

11:2 Olkoon $g \in C(0,1)$ kiinnitetty jatkuva funktio $[0,1] \to \mathbb{R}$. Tutki Arzela-Ascolin lauseen avulla onko joukko $\{g_s : 0 \leq s \leq 1\}$ relatiivisesti kompakti avaruudessa $C(0,1)$, kun

$$g_s(t) = g(st), \quad t \in [0,1] \text{ ja } s \in [0,1].$$

[*Vihje:* funktion g tasaisesta jatkuvuudesta on hyötyä.]

11: ? Olkoon H Hilbertin avaruus ja $T \in \mathcal{K}(H)$ kompakti itse-adjungoitu operaattori. Tällöin

$$\|T\| = \max\{|(Tx|x)| : \|x\| = 1\}.$$

[*Vihje:* Yhdistä Lemman 10.42 kaava operaattorinormille kompaktisuuteen.]

11: ? Olkoon $D(x_n) = (\sigma_n x_n)$ kun $(x_n) \in \ell^2$, missä $(\sigma_n) \in \ell^\infty$ on annettu rajoitettu jono. Määritä adjungaatti $D^* \in \mathcal{L}(\ell^2)$.

11: ? Olkoon $D(x_n) = (\sigma_n x_n)$ kun $(x_n) \in \ell^2$, missä $(\sigma_n) \in \ell^\infty$ on annettu rajoitettu jono. Määrää operaattorin $D \in \mathcal{L}(\ell^2)$ ominaisarvot.

11: ? Olkoon $S : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ bilateraalinen siirto-operaattori, jolle $Se_n = e_{n+1}$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$, missä $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ on luonnollinen ortonormaali kanta avaruudessa $\ell^2(\mathbb{Z})$ (siis $e_n = (\delta_{n,m})_{m\in\mathbb{Z}}$, missä $\delta_{n,m}$ on Kroneckerin symboli). Tutki, onko operaattorilla S ominaisarvoja.

11:? Olkoon $S, T \in \mathcal{L}(H)$ itse-adjungoituja operaattoreita. Asetetaan $S \le T$ jos

$$(Sx|x) \le (Tx|x) \quad \text{kaikilla } x \in H.$$

Etsi 2×2- matriiseja S, T joille $|S + T| \le |S| + |T|$ ei päde. [tarkista]

11:? Olkoon H kompleksinen Hilbertin avaruus ja $T \in \mathcal{L}(H)$ operaattori. Osoita, että jos $(Tu|u) \in \mathbb{R}$ kaikilla $u \in H$, niin T on itse-adjungoitu. [*Vihje:* kehitä auki sisätulolauseke $(T(x + \lambda y)|x + \lambda y)$ kun $x, y \in H$ ja $\lambda \in \mathbb{C}$. Oletuksen mukaan $(T(x + \lambda y)|x + \lambda y) = \overline{(T(x + \lambda y)|x + \lambda y)}$. Sijoita $\lambda = 1$ ja $\lambda = -i$, sekä päättele vertailemalla lausekkeita, että $(Tx|y) = (x|Ty)$.]

11:a Olkoon H, K Hilbertin avaruuksia ja $T \in \mathcal{L}(H, K)$. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(i) $\|Tx\| = \|x\|$ kaikilla $x \in H$ (eli T on *isometria* $H \to K$),

(ii) $(Tx|Ty) = (x|y)$ kaikilla $x, y \in H$.

[*Vihje:* jos (i) on voimassa, niin kehittämällä auki lauseke

$$\|T(x + \lambda y)\|^2 = \|x + \lambda y\|^2$$

saadaan $Re\overline{\lambda}(Tx|Ty) = Re\overline{\lambda}(x|y)$ kun $x, y \in H$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$.]

11:? (Hellinger-Toeplitz) Olkoon $T : H \to H$ sellainen lineaarikuvaus, että

$$(Tx|y) = (x|Ty) \quad \text{kaikilla } x, y \in H.$$

Osoita, että T on jatkuva. [*Vihje:* Suljetun kuvaajan lauseen nojalla (Lause 8.20) riittää verifioida, että jos $x_n \to \overline{0}$ ja $Tx_n \to y$ kun $n \to \infty$, niin $y = \overline{0}$.]