Riskiteorian jatkokurssin laskuharjoitus 3, 10.5.2016

Huom. Harjoitus on poikkeuksellisesti tiistaina klo 16-18, sali C322.

Tehtävissä tarkastellaan luentojen kohdan 4.1 mukaista mallia, mutta prosessien $\{r_n\}$ ja $\{\xi_n\}$ riippumattomuuden sijaan oletetaan lievemmin, että

$$(\xi, d), (\xi_1, d_1), (\xi_2, d_2), \ldots$$

ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaisvektoreita. Oletetaan lisäksi, että $\alpha_\xi, \alpha_d \in (1, \infty)$. Tehtävien merkinnät ovat luentojen kohdan 4 mukaisia.

1. Olkoon $N \in \mathbb{N}$ kiinteä ja $N \geq 2$. Osoita, että

$$\limsup_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T \leq N) \leq -\min(\alpha_d, \alpha_\xi).$$

2. (jatkoa) Oletetaan, että $\mathbb{P}(\xi > 0) = 1$. Osoita, että

$$\lim_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T \leq N) = -\min(\alpha_d, \alpha_\xi).$$

3. Oletetaan, että $\xi = d - 1$ ja että d on log-normaalisti jakautunut parametreilla μ, σ, missä $\mu < 0$ ja $\sigma > 0$. Siis d:n tiheysfunktio s on

$$s(z) = \frac{1}{\sigma z \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\log z - \mu)^2}, \quad z > 0.$$

Osoita, että

$$\lim_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty) = \frac{2\mu}{\sigma^2}.$$

4. (jatkoa) Määrää

$$\lim_{n \to \infty} Y'_n = \sum_{j=1}^{\infty} d_1 \cdots d_{j-1} \xi_j.$$

5. Oletetaan, että $\mathbb{P}(\xi > 0) = 1$, $c(R') = 0$ eräälle $R' > 1$, $c(s) < 0$ eräälle $s > 0$, ja että $\mathbb{E}(\xi^s) < \infty$ eräälle $s > R'$. Osoita, että

$$\mathbb{E}(\bar{Y}') = \frac{\mathbb{E}(\xi)}{1 - \mathbb{E}(d)}.$$