Riskiteorian jatkokurssin laskuharjoitus 2, 4.5.2016

Olkoot $\underline{a}, \overline{a}, a_1, a_2, \ldots$ sellaisia vakioita, että $0 < \underline{a} \leq \overline{a} < \infty$ ja $\underline{a} \leq a_n \leq \overline{a}, \forall n \in \mathbb{N}$. Yhtiön vuoden n tappio ξ_n on muotoa $\xi_n = a_n \eta_n$, missä $\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia. Oletetaan, että $\mathbb{E}(\eta) \in (-\infty, 0)$ ja että

$$\lim_{x\to\infty} (\log x)^{-1} \log \mathbb{P}(\eta > x) = -\alpha,$$

missä $\alpha \in (1, \infty)$.

Olkoon $Y_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ yhtiön kumulatiivinen tappio ja $M_n = \max(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Olkoon edelleen U_0 alkupääoma ja $T = T(U_0)$ tappioprosessiin $\{Y_n\}$ liittyvä vararikkohetki.

1. Olkoon $\delta \in (0, 1)$ ja $h = h_n = n^{-1+\delta/2}$. Merkitään

$$\xi_j' = \xi_j \mathbf{1}(\xi_j \leq n^{1-\delta}), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Osoita, että voidaan määrätä sellaiset j:stä riippumattomat vakiot $\varepsilon' > 0$ ja $n_0 \in \mathbb{N}$, että

$$\mathbb{E}(e^{h\xi_j'}) \leq e^{-h\varepsilon'}, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0.$$

2. (jatkoa) Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} (\log n)^{-1} \log \mathbb{P}(Y_n > 0, M_n \leq n^{1-\delta}) = -\infty.$$

3. (jatkoa) Olkoon $b > 0$ kiinteä. Osoita, että

$$\lim_{U_0\to\infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T \leq bU_0, M_{\lfloor bU_0 \rfloor} \leq U_0^{1-\delta}) = -\infty.$$

4. (jatkoa) Osoita, että

$$\limsup_{U_0\to\infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T \leq bU_0) \leq 1 - \alpha.$$

5. (jatkoa) Oletetaan lisäksi, että $\mathbb{P}(\eta > -c) = 1$ eräälle vakiolle $c > 0$. Osoita, että

$$\lim_{U_0\to\infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T \leq bU_0) = 1 - \alpha.$$