4.2. Kiinteän aikajänteen vararikkotodennäköisyydestä

Olkoon $N \in \mathbb{N}$ kiinteä. Tarkastellaan todennäköisyyttä

$$\mathbb{P}(T \leq N)$$

edellä esitetyssä mallissa. Olkoon

$$\bar{Y}'_N = \max\{Y'_1, \ldots, Y'_N\}.$$

Tuloksen (4.5.1) nojalla

$$\mathbb{P}(T \leq N) = \mathbb{P}(\bar{Y}'_N > U_0).$$

Oletetaan seuraavassa, että raja-arvot

$$\lim_{x\to\infty} (\log x)^{-1} \log \mathbb{P}(\xi > x) \doteq -\alpha_\xi$$

ja

$$\lim_{x\to\infty} (\log x)^{-1} \log \mathbb{P}(d > x) \doteq -\alpha_d$$

ovat olemassa. Sallitaan ääritapaukset

$$\alpha_\xi, \alpha_d = 0 \text{ tai } \infty.$$

<u>Lause 4.1.</u> Edellä esitetyin oletuksin ja merkinnöin kaikilla $N \geq 2$,

$$\lim_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T \leq N) = -\min(\alpha_\xi, \alpha_d).$$

<u>Todistus</u> Riskiteorian lemman 5.1 nojalla

$$\limsup_{x \to \infty} (\log x)^{-1} \log \mathbb{P}(\xi > x)$$

$$- \sup\{s \geq 0 \mid \mathbb{E}(\xi^s 1(\xi > 0)) < \infty\}.$$

Vastaava tulos pätee teetysti todennäköisyydelle $\mathbb{P}(d > x)$. Nähdään, että esimerkiksi

$$\alpha_\xi = \sup\{s \geq 0 \mid \mathbb{E}(\xi^s 1(\xi > 0)) < \infty\}.$$

Tarkastellaan ensin tapausta, jossa $\alpha_\xi, \alpha_d > 1$. Olkoon $s \geq 1$. Tällöin

$$\mathbb{E}((\bar{Y}_N')^s 1(\bar{Y}_N' > 0))$$

$$\leq \mathbb{E}\left(\left(\sum_{j=1}^{N} d_1 \cdots d_{j-1} \xi_j 1(\xi_j > 0)\right)^s\right)$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^{N} \mathbb{E}\left((d_1 \cdots d_{j-1} \xi_j 1(\xi_j > 0))^s\right)^{\frac{1}{s}}\right)^s.$$

Viimeinen yläraja seuraa Minkowskin epäyhtälöstä.

Nyt

$$\mathbb{E}\left(\left(d_1 \cdots d_{j-1}\xi_j 1(\xi_j > 0)\right)^s\right)$$

$$= \mathbb{E}(d^s)^{j-1}\,\mathbb{E}\left(\xi^s 1(\xi > 0)\right).$$

Jos siis $s < \min(\alpha_\xi, \alpha_d)$, niin

$$\mathbb{E}\left((\bar{Y}'_N)^s 1(\bar{Y}'_N > 0)\right) < \infty$$

ja edelleen

$$\limsup_{U_0\to\infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(\bar{Y}'_N > U_0) \leq -s.$$

Antamalla $s \to \min(\alpha_\xi, \alpha_d)$ alhaalta saadaan

$$\limsup_{U_0\to\infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(\bar{Y}'_N > U_0) \leq -\min(\alpha_\xi, \alpha_d).$$

Toisaalta

$$\liminf_{U_0\to\infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(\bar{Y}'_N > U_0)$$

$$\geq \liminf_{U_0\to\infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(\xi_1 > U_0) = -\alpha_\xi$$

ja jos $\varepsilon > 0$ on pieni,

$$\liminf_{U_0\to\infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(\bar{Y}'_N > U_0)$$

$$\geq \liminf_{U_0\to\infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}\left(\xi_1 > \varepsilon, \xi_2 > \varepsilon, d_1 > \frac{U_0}{\varepsilon}\right)$$

$$= \liminf_{U_0\to\infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}\left(d > \frac{U_0}{\varepsilon}\right) = -\alpha_d.$$

Nähdään, että

$$\liminf_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T \le N) \ge -\min(\alpha_\xi, \alpha_\delta).$$

Saadut tulokset todistavat lauseen tapauksessa $\min(\alpha_\xi, \alpha_\delta) \ge 1$.

Olkoon nyt $\min(\alpha_\xi, \alpha_\delta) < 1$. Ylärajа-arvio todennäköisyydelle $\mathbb{P}(T \le N)$ saadaan käyttämällä Minkowskin epäyhtälön sijaan elementaarista arviota

$$(x+y)^s \le x^s + y^s, \quad x, y \ge 0, \quad s \in (0,1).$$

Alarajan todistus on sama kuin edellä. $\square$

Lauseen nojalla pahempi hännistä $\mathbb{P}(\xi > x)$, $\mathbb{P}(\delta > x)$ määrää vararikkotodennäköisyyden hännän vahvuuden (ainakin, jos $\min(\alpha_\xi, \alpha_\delta) < \infty$).

Lähde: Tang, Q., Tsitsiashvili, G. (2003) Precise estimates for the ruin probability in finite horizon in a discrete-time model with heavy-tailed insurance and financial risks. Stoch. Processes Appl. 108, p. 299-325.

4.3. Äärettömän aikajänteen vararikkotodennäköisyydestä

Olkoon malli ja oletukset kuten kohdassa 4.1.
Merkitään

$$c(s) = \log \mathbb{E}(d^s) = \log \mathbb{E}(e^{s \log d}), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Oletetaan, että $c(s) < 0$ jollain $s > 0$. Merkitään

$$(4.5.2) \qquad \bar{Y}' = \sup\{Y_1', Y_2', \ldots\}.$$

<u>Lemma 4.1.</u> Oletetaan edellä esitelyn lisäksi, että

$$(4.6) \qquad \mathbb{E}(|\xi|^s) < \infty$$

jollain $s > 0$. Silloin $\mathbb{P}(\bar{Y}' < \infty) = 1$ ja

$$(4.7) \qquad \mathbb{E}((\bar{Y}')^s \, 1(\bar{Y}' > 0)) < \infty$$

aina, kun $c(s) < 0$ ja $\mathbb{E}(|\xi|^s) < \infty$.

<u>Todistus.</u> Olkoon $s \in (0,1]$ sellainen, että

$$\mathbb{E}(|\xi|^s) < \infty \quad \text{ja} \quad c(s) < 0.$$

Merkitään

$$\bar{Y}'_n = \sup\{Y'_1, \dots, Y'_n\}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Silloin

$$(4.9) \quad \bar{Y}'_n \mathbb{1}(\bar{Y}'_n > 0) \le \sum_{j=1}^{n} d_1 \cdots d_{j-1} |\xi_j|.$$

On helppo nähdä, että

$$(x+y)^s \le x^s + y^s, \quad \forall x, y \ge 0, \; s \in (0,1].$$

Siispä

$$\mathbb{E}\left((\bar{Y}'_n)^s \mathbb{1}(\bar{Y}'_n > 0)\right) \le \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left((d_1 \cdots d_{j-1})^s |\xi_j|^s\right)$$

$$= \mathbb{E}(|\xi|^s) \sum_{j=1}^{n} e^{(j-1)c(s)}$$

$$\le \mathbb{E}(|\xi|^s) \frac{1}{1 - e^{c(s)}} < \infty.$$

Monotonisen konvergenssin lauseen nojalla

$$\mathbb{E}\left((\bar{Y}')^s \mathbb{1}(\bar{Y}' > 0)\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\left((\bar{Y}'_n)^s \mathbb{1}(\bar{Y}'_n > 0)\right)$$

$$\le \mathbb{E}(|\xi|^s) \frac{1}{1 - e^{c(s)}} < \infty.$$

Nähdään, että $\mathbb{P}(\bar{Y}' < \infty) = 1$. Samoin (4.7) on todistettu tapauksessa $s \in [0,1]$.

Olkoon nyt $s > 1$ sellainen, että (4.6) toteutuu ja $c(s) < 0$. Minkowskin epäyhtälön nojalla

$$\mathbb{E}\left((\bar{Y}_n')^s \, 1(\bar{Y}_n' > 0)\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left((d_1 \cdots d_{j-1})^s \, |\xi_j|^s\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$\leq \mathbb{E}(|\xi|^s)^{\frac{1}{s}} \sum_{j=1}^{\infty} e^{(j-1)c(s)/s}$$

$$= \mathbb{E}(|\xi|^s)^{\frac{1}{s}} \frac{1}{1 - e^{c(s)/s}} < \infty.$$

Nähdään kuten todistuksen alkuosassa, että

$$\mathbb{E}\left((\bar{Y}')^s \, 1(\bar{Y}' > 0)\right) < \infty. \quad \square$$

Selvästi

$$\mathbb{P}(T < \infty) = \mathbb{P}(\bar{Y}' > U_0).$$

Edellisestä lemmasta seuraa, että

$$\lim_{U_0 \to \infty} \mathbb{P}(T < \infty) = 0.$$

Kiinnostava satunnaismuuttuja sovelltavasta ja teoreettisesta näkökulmasta on myös Y'_∞,

$$Y'_\infty = \lim_{n\to\infty} Y'_n$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} d_1 \cdots d_{j-1} \xi_j .$$

Lemman 4.1 todistuksen nojalla viimeksi kirjoitettu sarja suppenee m.v., jos $\mathbb{E}(|\xi|^s) < \infty$ ja $c(s) < 0$ jollain $s > 0$.

Lause 4.2. Lemman 4.1 oletuksin

$$\mathbb{P}(T < \infty) \geq \mathbb{P}(Y'_\infty > U_0) \geq \mathbb{P}(T < \infty)\, \mathbb{P}(Y'_\infty > 0).$$

Todistus. Ensimmäinen epäyhtälö on ilmeinen. Toisaalta

$$\mathbb{P}(T = n, Y'_\infty > U_0)$$
$$\geq \mathbb{P}\Big(T = n, \sum_{m=n+1}^{\infty} d_1 \cdots d_{m-1} \xi_m > 0\Big)$$
$$= \mathbb{P}\Big(T = n, \sum_{m=n+1}^{\infty} d_{n+1} \cdots d_{m-1} \xi_m > 0\Big)$$
$$= \mathbb{P}(T = n)\, \mathbb{P}(Y'_\infty > 0).$$

Så på

$$\mathbb{P}(Y'_\infty > U_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T=n,\ Y'_\infty > U_0)$$

$$\geq \mathbb{P}(Y'_\infty > 0) \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T=n)$$

$$= \mathbb{P}(T<\infty)\, \mathbb{P}(Y'_\infty > 0). \quad \square$$

4.2. Summuskorkka-arvioita

Osoitetaan, että todennäköisyydet $\mathbb{P}(T < \infty)$ ja $\mathbb{P}(Y'_\infty > U_0)$ ovat asymptoottisesti summuskorkeaan U_0:n potensseja.

Lause 4.3. Oletetaan, että on olemassa yksikäsitteinen $R' \in (0, \infty)$ siten, että $c(R') = 0$. Oletetaan lisäksi, että $\mathbb{P}(\xi > 0) > 0$, ja että

$$E(|\xi|^s) < \infty \quad \text{ja} \quad c(s) < \infty$$

eräälle $s \in (R', \infty)$. Silloin

$$(4.12) \qquad \lim_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty) = -R'$$

ja

$$(4.13) \qquad \lim (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(Y'_\infty > U_0) = -R'.$$

Huomautus 4.1. Raja-arvo (4.12) riippuu vain d-muuttujista. Oleellinen ero verrattuna klassiseen malliin (jossa $d = 1$ ja ξ-muuttujat ovat kevythäntäisiä) on myös se, että vararikkotodennäköisyyden summuskorkka on $U_0^{-R'}$. Tämä on asymptoottisesti suurempi kuin klassinen e^{-RU_0}. Tässä mielessä sijoitusriskit ovat dominoivia. Jos ξ-muuttujat ovat paksuhäntäisiä, ovat vakuutus- ja sijoitusriskit lähempänä toisiaan.

Lauseen 4.3 todistus. Todistetaan ensin (4.12). Olkoon $s \in (0, R')$. Lemman 4.1 ja Tsebysevin epäyhtälön nojalla

$$\infty > \mathbb{E}\left((\bar{Y}')^s \, 1(\bar{Y}' > 0) \right)$$

$$\geq \mathbb{E}\left((\bar{Y}')^s \, 1(\bar{Y}' > U_0) \right)$$

$$\geq U_0^s \, \mathbb{P}(\bar{Y}' > U_0) = U_0^s \, \mathbb{P}(T < \infty).$$

Siispä

$$\limsup_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty) \leq -s$$

ja edelleen

$$\limsup_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty) \leq -R'.$$

On todistettava vielä, että

(4.15) $$\liminf_{v_0\to\infty} (\log v_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T<\infty) \geq -R'.$$

Olkoon $u>0$ ja

$$\tau = \tau(u) = \inf\{m\in\mathbb{N} \mid \log d_1 + \dots + \log d_m > u\} \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}.$$

Olkoon edelleen

$$\mu = \frac{1}{c'(R')}, \quad \delta\in(0,\mu), \quad \delta'\in(0,1).$$

Klassisesta varianttiteoriasta seuraa, että kun δ' on riittävän pieni, niin

(4.16) $$\limsup_{u\to\infty} u^{-1}\log \mathbb{P}(\tau((1-\delta')u) \leq (\mu-\delta)u) < -R'$$

ja

(4.17) $$\liminf_{u\to\infty} u^{-1}\log \mathbb{P}(\tau(u)\in((\mu-\delta)u,(\mu+\delta)u)) = -R'.$$

Olkoon $\varkappa > 0$ sellainen, että $\mathbb{P}(\xi > \varkappa) > 0$ ja $\varepsilon, \delta'' > 0$. Silloin

$$(4.20)\quad \liminf_{n\to\infty} n^{-1} \log \mathbb{P}\big(\xi_i > -e^{\delta'' n}, \forall\, i \le \lceil(\mu-\delta)n\rceil, \; \xi_{\lceil(\mu-\delta)n\rceil+1} > \varkappa, \dots, \xi_{\lceil(\mu+\delta)n\rceil} > \varkappa\big)$$

$$= \liminf_{n\to\infty} n^{-1} \log \underbrace{\mathbb{P}(\xi > -e^{\delta'' n})}_{> 1-\varepsilon,\text{ kun } n \text{ suuri}}{}^{\lceil(\mu-\delta)n\rceil}\, \mathbb{P}(\xi > \varkappa)^{2\delta n + 2}$$

$$\ge (\mu-\delta)\log(1-\varepsilon) + 2\delta \log \mathbb{P}(\xi > \varkappa).$$

Alaraja tuli saadaan annetaan $-\varepsilon'$, $\varepsilon' > 0$. Olkoon

$$H_n = \{\tau((1-\delta')n) > (\mu-\delta)n\}$$
$$\cap\, \{\tau(n) \in ((\mu-\delta)n, (\mu+\delta)n)\}$$
$$\cap\, \{\xi_i > -e^{\delta'' n}, \forall\, i \le \lceil(\mu-\delta)n\rceil\}$$
$$\cap\, \{\xi_{\lceil(\mu-\delta)n\rceil+1} > \varkappa, \dots, \xi_{\lceil(\mu+\delta)n\rceil} > \varkappa\},$$

missä $\delta, \delta', \delta''$ ovat sellaisia, että edellä saadut arviot pätevät. Lisäksi vaaditaan vielä $\delta'' < \delta'$.

Jos $n \in \mathbb{N}$ on kiinteä ja $\omega \in H_n$, niin

$$\max\{Y'_m \mid \lceil(\mu-\delta)n\rceil+1 \le m \le \lceil(\mu+\delta)n\rceil\}$$

$$= Y'_{\lceil(\mu-\delta)n\rceil} + \max\{Y'_m - Y'_{\lceil(\mu-\delta)n\rceil} \mid \lceil(\mu-\delta)n\rceil+1 \le m \le \lceil(\mu+\delta)n\rceil\}$$

$$\ge -e^{\delta''n} - \lceil(\mu-\delta)n\rceil e^{\delta''n} \max\{e^{\log d_1+\dots+\log d_m} \mid 1 \le m \le \lceil(\mu-\delta)n\rceil - 1\}$$

$$+ \gamma e \max\{e^{\log d_1+\dots+\log d_m} \mid \lceil(\mu-\delta)n\rceil \le m \le \lceil(\mu+\delta)n\rceil - 1\}$$

$$\ge -e^{\delta''n} - \lceil(\mu-\delta)n\rceil e^{\delta''n} e^{(1-\delta')n} + \gamma e^n.$$

Kun n on riittävän suuri, on siis, $\forall \omega \in H_n$,

$$\max\{Y'_m \mid \lceil(\mu-\delta)n\rceil+1 \le m \le \lceil(\mu+\delta)n\rceil\} \ge e^{(1-\varepsilon)n}.$$

Olkoon $\bar{Y}'$ kuten (4.5.2):ssa. Silloin

$$H_{\lceil\log U_0\rceil} \subseteq \{\bar{Y}' > e^{(1-\varepsilon)\lceil\log U_0\rceil}\}$$

$$\subseteq \{\bar{Y}' > U_0^{1-\varepsilon}\} = \{T(U_0^{1-\varepsilon}) < \infty\},$$

kun U_0 on suuri.

Arvioiden (4.16), (4.17) ja (4.20) nojalla

$$\liminf_{U_0\to\infty} \lceil\log U_0\rceil^{-1} \log \mathbb{P}(T(U_0^{1-\varepsilon}) < \infty) \ge -R' - \varepsilon',$$

joten

$$\liminf_{U_0\to\infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T(U_0) < \infty) \ge -\frac{R'+\varepsilon'}{1-\varepsilon}.$$

Alaraja (4.15) saadaan antamalla $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon' \to 0$.

Raja-arvon (4.13) todistamiseksi on lauseen 4.2 nojalla riittävää näyttää, että $\mathbb{P}(Y'_\infty > 0) > 0$.

Olkoot $M > 0$ ja $\gamma > 0$ sellaisia, että

$$\mathbb{P}(Y'_\infty > -M) > 0 \quad \text{ja} \quad \mathbb{P}(\xi > \gamma) > 0.$$

Silloin

$$\mathbb{P}(Y'_\infty > -M + \gamma) \geq \mathbb{P}(\xi_1 > \gamma,\ Y'_\infty - \xi_1 > -M)$$

$$= \mathbb{P}(\xi_1 > \gamma)\, \mathbb{P}\Big(\sum_{j=2}^{\infty} d_1 \cdots d_{j-1} \xi_j > -M\Big).$$

Nyt

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{j=2}^{\infty} d_1 \cdots d_{j-1} \xi_j > -M\Big)$$

$$\geq \mathbb{P}\Big(d_1 \leq 1,\ \sum_{j=2}^{\infty} d_2 \cdots d_{j-1} \xi_j > -M\Big)$$

$$= \mathbb{P}(d_1 \leq 1)\, \mathbb{P}(Y'_\infty > -M) > 0,$$

sillä oletuksen $R' > 0$ nojalla $\mathbb{P}(d_1 \leq 1) > 0$. Nähdään, että

$$\mathbb{P}(Y'_\infty > -M + \gamma) > 0.$$

Toistamalla päättelyä saadaan vaadittu tulos. $\square$

4.4. Inflaation vaikutus vararikkoriskiin

Edellä oletettiin, että perusliikettä kuvaavat satunnaismuuttujat ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita. Inflaatio tyypillisesti aiheuttaa riippuvuutta ja epä-stationaarisuutta.

Korvataan nyt ξ_n muuttujalla ξ_n',

$$\xi_n' = (1+i_1)\cdots(1+i_{n-1})\,\xi_n, \quad n=1,2,\dots,$$

missä $i_1, i_2, \dots$ kuvaavat inflaatioasteita. Oletetaan, että nämä ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita ja riippumattomia muuttujista $\xi_1, \xi_2, \dots$ Lisäksi oletetaan, että $\mathbb{P}(i_n > -1) = 1$.

Kohdassa 4.1 esitetty rekursiivinen päättely antaa nyt

$$\begin{aligned} U_n = {} & (1+r_n)\cdots(1+r_1)\,U_0 \\ & - (1+r_n)\cdots(1+r_1)\,\xi_1 \\ & - (1+r_n)\cdots(1+r_2)(1+i_1)\,\xi_2 \\ & \cdots \\ & - (1+r_n)(1+i_1)\cdots(1+i_{n-1})\,\xi_n. \end{aligned}$$

Edelleen

$$U_n < 0 \iff \xi_1 + \frac{1+i_1}{1+r_1}\xi_2 + \dots + \frac{(1+i_1)\cdots(1+i_{n-1})}{(1+r_1)\cdots(1+r_{n-1})}\xi_n > U_0 .$$

Edellä esitetty teoria siis pätee, kun diskonttaustekijä d korvataan muuttujalla

$$d' = \frac{1+i}{1+r} ,$$

missä i on samoin jakautunut kuin i_j.

Karkeasti ilmaistuna aiemmin saadut tulokset pätevät, kunhan sijoitustuotot riittävät kompensoimaan inflaation. Tarkemmin, on oletettava, että

$$\mathbb{E}(\log d') < 0 ,$$

jotta parametri R' olisi positiivinen. Jensenin epäyhtälön nojalla

$$\mathbb{E}((d')^s) \geq e^{s\,\mathbb{E}(\log d')} .$$

Riittävää on siis esimerkiksi se, että $\mathbb{E}(d') < 1$.

4.5. Tarkennetut estimaatit

Esitetään seuraavassa todennäköisyyksien $\mathbb{P}(T<\infty)$ ja $\mathbb{P}(\bar{Y}'_\infty > u_0)$ asymptoottinen muoto pääosin ilman perusteluja. Oletetaan, että lauseen 4.3 ehdot on täytetty.

Mielivaltaiselle $u \in \mathbb{R}$ kirjoitetaan

$$\mathbb{P}(T(e^u) < \infty) = \mathbb{P}(\bar{Y}' > e^u)$$

$$= \mathbb{P}(\bar{Y}' > e^u) - \mathbb{P}(\bar{Y} - \xi_1 > e^u) + \mathbb{P}(\bar{Y} - \xi_1 > e^u).$$

Nyt

$$\bar{Y}' = \sup\{\xi_1, \xi_1 + d_1 \xi_2, \xi_1 + d_1 \xi_1 + d_1 d_2 \xi_2, \dots\}$$

$$= \xi_1 + d_1 \sup\{0, \xi_2, \xi_2 + d_2 \xi_3, \xi_2 + d_2 \xi_3 + d_2 d_3 \xi_4, \dots\}$$

$$=_L \xi_1 + d_1 \max(0, \bar{Y}'),$$

missä oikealla puolella $\xi_1, d_1 \perp\!\!\!\perp \bar{Y}'$ ($=_L$ tarkoittaa, että jakaumat ovat samat). Toisin sanoen $\bar{Y}'$ toteuttaa satunnaisyhtälön (random equation)

$$\bar{Y}' =_L \xi + d \max(0, \bar{Y}'),$$

ξ ja d riippumattomia $\bar{Y}'$:stä oikealla puolella.

Nähdään, että

$$\mathbb{P}(\bar{Y}' \cdot \xi_1 > e^u) = \mathbb{P}(d\bar{Y}' > e^u)$$

$$= \mathbb{P}(\bar{Y}' > e^{u - \log d})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(\bar{Y}' > e^{u-x})\, dG(x),$$

missä

$$G(x) = \mathbb{P}(\log d \le x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Merkitään

$$Z(u) = \mathbb{P}(T(e^u) < \infty)$$

ja

$$z(u) = \mathbb{P}(\bar{Y}' > e^u) - \mathbb{P}(\bar{Y}' \cdot \xi_1 > e^u).$$

Edellä esitetyn nojalla Z toteuttaa uusiutumisyhtälön

$$Z(u) = z(u) + \int_{-\infty}^{\infty} Z(u-x)\, dG(x).$$

Aiemmin esitettyä uusiutumislausetta ei voida soveltaa suoraan, koska $\log d$ ei ole positiivinen satunnaismuuttuja. Ongelmia aiheuttaa myös se, että z ei ole tunnettu funktio.

Formaalisti Cramér-Lundbergin approksimaation todistusta mukaillen kirjoitetaan ensin

$$e^{R'u} Z(u) = e^{R'u} z(u) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{R'(u-x)} Z(u-x)\, d G_{R'}(x),$$

missä $G_{R'}$ on G:n konjugaattijakauma parametrilla R'. Olkoon

$$Z'(u) = e^{R'u} Z(u).$$

Nähdään, että $Z'(u)$ toteuttaa erään uusiutumisyhtälön. Tehty muuttujanvaihto voisi johtaa ei-degeneroituneeseen raja-arvoon,

$$\lim_{u \to \infty} e^{R'u} Z(u) = C',$$

missä C' on positiivinen vakio. Tällöin

$$\mathbb{P}(T(U_0) < \infty) = Z(\log U_0)$$

$$\sim C' e^{-R' \log U_0} = C' U_0^{-R'}.$$

Tulos on todistettu lauseen 4.3 oletuksin, kts.

Goldie, C. M. (1991) Implicit renewal theory and tails of random equations. Ann. Appl. Prob. 1, 126-166.

Vastaava tulos pätee raja-arvolle Y'_∞. Ainoastaan vakio C' muuttuu.

Sisällysluettelo