3.3. Ylärajatuloksia

Pyritään johtamaan ei-asymptoottisia ylärajoja todennäköisyyksille $\mathbb{P}(Y_n > na)$ ja $\mathbb{P}(T \le b U_0)$.

Lause 3.8. Oletetaan, että lauseen 3.3 ehdot on täytetty. Oletetaan lisäksi, että $\mathbb{P}(\xi \ge 0) = 1$ ja että $\varrho = \mathbb{E}(\xi^2) < \infty$. Olkoon $a > \mu$ ja

(3.20) $$\phi_a(n) = \inf_{\delta \in (0,1)} \{ n\bar{F}(n^{1-\delta}) + e^{-n^{\delta}((1-\delta)(a-\mu)\log n - \varrho)} \},$$

Silloin

(3.21) $$\mathbb{P}(Y_n > na) \le \phi_a(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Lisäksi

(3.22) $$\lim_{n\to\infty} (\log n)^{-1} \log \phi_a(n) = 1 - \alpha.$$

Raja-arvo (3.22) osoittaa, että lauseen yläraja on oikeaa suuruusluokkaa, kts. lause 3.3.

Todistus. Olkoon $h > 0$, $\delta \in (0,1)$ ja

$$\begin{cases} \xi_j' = \xi_j \mathbb{1}(\xi_j \le n^{1-\delta}), \\ Y_n' = \xi_1' + \dots + \xi_n' \end{cases}$$

kuten lemman 3.2 todistuksessa. Tällöin

$$\mathbb{P}(Y_n > na) \le \mathbb{P}(Y_n > na, Y_n = Y_n') + n\bar{F}(n^{1-\delta})$$

$$\le \mathbb{P}(Y_n' > na) + n\bar{F}(n^{1-\delta}).$$

Olkoon ξ' samoin jakautunut kuin ξ_1'. Tsebyshevin epäyhtälön nojalla

$$\mathbb{P}(Y_n' > na) \le e^{-nah}\, \mathbb{E}(e^{h\xi'})^n.$$

Lemman 3.1.1 nojalla

$$\mathbb{E}(e^{h\xi'}) \le \frac{e^{hn^{1-\delta}} - 1 - hn^{1-\delta}}{n^{2(1-\delta)}} \mathbb{E}((\xi')^2) + 1 + h\mathbb{E}(\xi')$$

$$\le \exp\left(\frac{e^{hn^{1-\delta}} - 1 - hn^{1-\delta}}{n^{2(1-\delta)}} \cdot \varsigma + h\mu \right).$$

Saadaan yläraja

$$\mathbb{P}(Y_n' > na) \le \exp\left(-n\left(h(a-\mu) - \frac{e^{hn^{1-\delta}} - 1 - hn^{1-\delta}}{n^{2(1-\delta)}}\,\varrho\right)\right)$$

$$\le \exp\left(-n\left(h(a-\mu) - \frac{e^{hn^{1-\delta}}\varrho}{n^{2(1-\delta)}}\right)\right).$$

Valitaan $h = \dfrac{(1-\delta)\log n}{n^{1-\delta}}$ ja saadaan

$$\mathbb{P}(Y_n' > na) \le \exp\left(-n^{\delta}\left((1-\delta)(a-\mu)\log n - \varrho\right)\right).$$

Yläraja (3.21) seuraa saaduista tuloksista. Raja-arvo (3.22) käsitellään harjoituksissa. $\square$

Tarkastellaan nyt todennäköisyyttä $\mathbb{P}(T \le bU_0)$.

<u>Lemma 3.9.</u> Oletetaan, että lauseen 3.3 ehdot on täytetty. Oletetaan lisäksi, että $\mathbb{P}(\xi \ge -p) = 1$ eräälle $p > 0$ ja että $\mu < 0$. Olkoon $y > 0$ ja

$$\Psi(h) = -hp + (\mu + p)\,\frac{e^{h(y+p)} - 1}{y+p}, \quad h > 0.$$

Silloin on olemassa yksikäsitteinen sellainen $h = h(y) > 0$, että $\Psi(h(y)) = 0$.

<u>Todistus.</u> Suoraviivainen.

Lause 3.10. Lemman 3.9 oletuksin ja merkinnöin

$$\mathbb{P}(T \le b U_0) \le \inf_{\delta \in (0,1)} \{ b U_0 \bar{F}(U_0^{1-\delta}) + e^{-h(U_0^{1-\delta}) U_0} \}.$$

Todistus. Olkoon $y = U_0^{1-\delta}$ ja

$$\xi' = \xi 1(\xi \le y), \qquad \xi_n' = \xi_n 1(\xi_n \le y), \; n = 1, 2, \dots,$$

ja $\xi'' = \xi' + P$. Tällöin $\xi'' \in [0, y+P]$. Lemman 3.1.1 nojalla

$$\mathbb{E}(e^{h\xi''}) \le e^{\frac{e^{h(y+P)}-1}{y+P} \mathbb{E}(\xi'')}.$$

Selvästi

$$\mathbb{E}(\xi'') = \mathbb{E}(\xi') + P \le \mu + P$$

ja

$$\mathbb{E}(e^{h\xi'}) \le e^{-hP + (\mu + P)\frac{e^{h(y+P)}-1}{y+P}}.$$

Olkoon

$$T' = \inf\{n \mid \xi_1' + \dots + \xi_n' > U_0\}$$

ja $h = h(U_0^{1-\delta})$ kuten lemmassa 3.9. Tehdään ξ'-muuttujiin konjugaattimuunnos parametrilla h. Saadaan

$$\mathbb{P}(T' \leq bU_0) = \mathbb{E}_h\left(e^{-h(\xi'_1 + \dots + \xi'_{T'}) + T'c(h)}\,\mathbb{1}(T' \leq bU_0)\right),$$

missä $c(h) = \log \mathbb{E}(e^{h\xi'})$. Alkuosan nojalla $c(h) \leq 0$, joten

$$\mathbb{P}(T' \leq bU_0) \leq e^{-hU_0}.$$

Selvästi

$$\mathbb{P}(T \leq bU_0) \leq bU_0\bar{F}(U_0^{1-\delta}) + \mathbb{P}(T' \leq bU_0),$$

josta lauseen tulos seuraa. $\square$

Esimerkki 3.1. Olkoon $\xi = X - p$, missä X on yhdistetty Poisson-muuttuja parametreilla (λ, S) ja p on vakio. Oletetaan, että $p > \mathbb{E}(X)$. Kirjoitetaan

$$X = Z_1 + \dots + Z_K,$$

missä siis K on Poisson-jakautunut ja $Z, Z_1, Z_2, \dots$ ovat riippumattomia S-jakautuneita satunnaismuuttujia. Oletetaan, että $\mathbb{P}(Z \geq 0) = 1$,

$$(3.26) \qquad \lim_{x \to \infty} (\log x)^{-1} \log \mathbb{P}(Z > x) = -\alpha,$$

missä $\alpha \in (1, \infty)$, ja että

$$(3.27) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0+} \limsup_{x \to \infty} \frac{\bar{S}(x(1-\varepsilon))}{\bar{S}(x)} = 1.$$

Olkoon $F(x) = \mathbb{P}(\xi \leq x)$ kuten aiemminkin. Osoitetaan, että

$$(3.28) \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{\bar{F}(x)}{\lambda \bar{S}(x)} = 1.$$

Nähdään, että

$$\lim_{x \to \infty} (\log x)^{-1} \log \bar{F}(x) = -\alpha$$

ja että (3.15) toteutuu.

Olkoon $N \in \mathbb{N}$ kiinteä. Selvästi

$$\mathbb{P}(\xi > x) \geq \sum_{n=1}^{N} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \mathbb{P}(Z_1 + \cdots + Z_n > x + p).$$

Nyt

$$\mathbb{P}(Z_1 + \cdots + Z_n > x + p)$$

$$\geq n\, \mathbb{P}(Z_1 > x + p,\ Z_2, \ldots, Z_n \leq x + p)$$

$$= (1 + o(1))\, n\, \bar{S}(x + p), \quad x \to \infty.$$

Siispä

$$\mathbb{P}(\xi > x) \geq (1 + o(1))\, \bar{S}(x + p) \sum_{n=1}^{N} n\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$= (1 + o(1))\, \bar{S}(x + p)\, \mathbb{E}(K\, \mathbb{1}(K \leq N)).$$

Saadaan

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{\mathbb{P}(\xi > x)}{\lambda \bar{S}(x)} \geq \liminf_{x \to \infty} \left(\frac{\bar{S}(x + p)}{\bar{S}(x)} \cdot \frac{\mathbb{E}(K\, \mathbb{1}(K \leq N))}{\lambda} \right)$$

$$= \frac{\mathbb{E}(K\, \mathbb{1}(K \leq N))}{\lambda}.$$

Koska N on mielivaltainen, niin

$$\text{(3.30)} \quad \liminf_{x \to \infty} \frac{\mathbb{P}(\xi > x)}{\lambda \bar{S}(x)} \geq 1.$$

Olkoon nyt $n \in \mathbb{N}$, $n \in [1, \log x]$, mielivaltainen.
Merkitään $S_n = Z_1 + \dots + Z_n$. Silloin

$$\mathbb{P}(S_n > x) \le n\, \mathbb{P}(S_n > x,\ Z_1 > \tfrac{x}{n})$$

$$\le n\, \mathbb{P}(S_n > x,\ Z_1 > \tfrac{x}{\log x}).$$

Olkoon $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$. Silloin

$$\mathbb{P}(S_n > x,\ Z_1 \in (\tfrac{x}{\log x}, (1-\varepsilon)x])$$

$$\le \bar{S}(\tfrac{x}{\log x}) \cdot n\, \bar{S}(\tfrac{\varepsilon x}{\log x})$$

$$\le (\log x)\, \bar{S}(\tfrac{\varepsilon x}{\log x})^2 = O(x^{-2\alpha+\delta}),\quad x \to \infty.$$

Nähdään, että

$$\mathbb{P}(S_n > x) \le n\, \bar{S}((1-\varepsilon)x) + n\, O(x^{-2\alpha+\delta})$$

tasaisesti alueessa $n \le \log x$. Saadaan

$$\mathbb{P}(\xi > x,\ K \le \log x)$$

$$\le \sum_{n \le \log x} n\, \bar{S}((1-\varepsilon)x) \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} + O((\log x)^2 x^{-2\alpha+\delta})$$

ja siis

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{\mathbb{P}(\xi > x,\ K \le \log x)}{\lambda\, \bar{S}(x)}$$

$$\le \limsup_{x \to \infty} \frac{\bar{S}((1-\varepsilon)x)\ \mathbb{E}(K\, 1(K \le \log x))}{\lambda\, \bar{S}(x)}$$

$$= \limsup_{x \to \infty} \frac{\bar{S}((1-\varepsilon)x)}{\bar{S}(x)}.$$

Oletuksen (3.27) nojalla

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{\mathbb{P}(\xi > x,\ K \le \log x)}{\lambda\, \bar{\xi}(x)} \le 1 .$$

Toisaalta kaikilla $s > 0$,

$$\mathbb{P}(K > \log x) \le e^{-s \log x}\, \mathbb{E}(e^{sK})$$

$$= e^{-s \log x + \lambda(e^s - 1)} .$$

Paras yläraja saadaan valitsemalla

$$s = \log \frac{\log x}{\lambda} ,$$

josta

$$\mathbb{P}(K > \log x) \le e^{-(\log x)(\log \log x) + (\log \lambda) \log x + \log x - \lambda}$$

$$= e^{-(\log x)(\log \log x)(1 + o(1))}$$

$$= O(x^{-2\alpha}) .$$

Raja-arvo (3.28) seuraa saaduista tuloksista.

Lauseen 3.5 tulos on

$$\mathbb{P}(Y_n > na) \sim n\lambda\, \bar{S}(n(a-\mu)), \quad n \to \infty,$$

ja lauseen 3.7

$$\mathbb{P}(T \le bU_0) \sim \lambda \int_0^{bU_0} \bar{S}(U_0 - \mu t)\, dt, \quad U_0 \to \infty.$$

4. Sijoitusriskeistä

Olkoon $\{Y_n\}$ satunnaisluku kuten aiemminkin,

$$Y_n = \xi_1 + \dots + \xi_n.$$

Tulkinnallisesti ξ_j kuvaa perusliikettä,

$$\xi_j = \text{vuoden } j \text{ korvaukset vähennettynä vuoden } j \text{ vakuutusmaksuilla.}$$

Oletetaan, että yhtiö sijoittaa varansa markkinoille. Olkoon U_0 alkupääoma ja U_n varallisuus vuoden n lopussa. Tarkastellaan mallia, jossa

$$(4.1) \qquad U_{n+1} = (1+r_{n+1})(U_n - \xi_{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Tällöin r_n on vuoden n sijoitustoiminnan tuottoaste, joka on stokastinen. Oletetaan jatkossa, että

$$(4.2) \qquad r_n > -1, \ \forall \omega, \qquad n = 1, 2, \dots$$

Mallissa on tehty yksinkertaistus, jossa kaikki perusliikkeen tapahtumat on tiivistetty vuoden alkuun. Vararikkohetki mallissa on

$$(4.3) \qquad T = \inf\{n \mid U_n < 0\}.$$

4.1. Yleisiä näkökohtia

Toistamalla rekursiota (4.1) saadaan

$$
\begin{aligned}
U_n = & (1+r_n)\cdots(1+r_1)U_0 \\
& -(1+r_n)\cdots(1+r_1)\xi_1 \\
& -(1+r_n)\cdots(1+r_2)\xi_2 \\
& \cdots \\
& -(1+r_n)\xi_n .
\end{aligned}
$$

Merkitään

$$d_n = \frac{1}{1+r_n}, \quad n=1,2,\ldots \qquad \text{(diskonttaustekijä)}.$$

Oletuksen (4.2) nojalla

$$U_n < 0 \iff \frac{U_n}{(1+r_1)\cdots(1+r_n)} < 0$$

$$\iff \xi_1 + d_1\xi_2 + \cdots + d_1\cdots d_{n-1}\xi_n > U_0 .$$

Merkitään

(4.4) $$Y'_n = \sum_{j=1}^{n} d_1\cdots d_{j-1}\,\xi_j .$$

Tällöin ilmeisesti

(4.5) $$T = \inf\{n \mid Y'_n > U_0\}$$

ja kaikilla $N \in \mathbb{N}$,

(4.5.1) $$\{T \le N\} = \{\max(Y'_1,\ldots,Y'_N) > U_0\}.$$

tuottoasteista $r_1, r_2, \ldots$ on luonnollista olettaa, että ne ovat keskimäärin positiivisia. Kuitenkin sallitaan myös sijoitustappiot eli tuottoasteet voivat olla negatiivisia. Oletetaan jatkossa, että

$$r, r_1, r_2, \ldots$$

ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita ja että ne ovat riippumattomia ξ-muuttujista. Olkoon vielä d samoin jakautunut kuin d_1 ja ξ samoin jakautunut kuin ξ_1. Triviaaliteettien välttämiseksi oletetaan, että

$$\mathbb{P}(\xi > 0) > 0.$$