3.2. Tarkennetut estimaatit

Edellä esitetyt tulokset antavat lähinnä harvinaisiin tapahtumiin liittyviä (polynomiaalisia) häviämisvauhteja. Pyritään nyt selvittämään todennäköisyyksien tarkka asymptoottinen muoto. Tähän tarvitaan uusi oletus:

$$(3.15) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0+} \limsup_{x \to \infty} \frac{\bar{F}(x(1-\varepsilon))}{\bar{F}(x)} = 1.$$

<u>Lause 3.5.</u> Olkoon $\{Y_n\}$ satunnaiskulku, joka toteuttaa lauseen 3.3 ehdot ja ehdon (3.15). Silloin

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mathbb{P}(Y_n > na)}{n\bar{F}(n(a-\mu))} = 1.$$

Esitetään ensin lemma, joka 'estää' monta suurta lisäystä suuren poikkeaman tapahtuessa.

<u>Lemma 3.6.</u> Lemman 3.4 oletuksin

$$\limsup_{n\to\infty} (\log n)^{-1} \log \mathbb{P}(Y_n > na,\ \xi_i > n^{1-\delta},\ \xi_j > n^{1-\delta} \text{ jollain } i \neq j,\ i,j \leq n)$$
$$\leq 2(1-\alpha+\delta\alpha)$$

<u>Todistus.</u> Triviaalisti

$$\mathbb{P}(Y_n > na,\ \xi_i > n^{1-\delta},\ \xi_j > n^{1-\delta} \text{ jollain } i \neq j,\ i,j \leq n)$$
$$\leq \mathbb{P}(\xi_i > n^{1-\delta},\ \xi_j > n^{1-\delta} \text{ jollain } i \neq j,\ i,j \leq n)$$
$$\leq n^2 \bar{F}(n^{1-\delta})^2.$$ Väite seuraa oletuksesta 3.1. $\square$

<u>Lauseen 3.5 todistus.</u> Lemmojen 3.4 ja 3.6 nojalla

$$\mathbb{P}(Y_n > na) \leq \mathbb{P}(Y_n > na,\ \xi_j > n^{1-\delta} \text{ tasan yhdellä } j \leq n) + o(1) n^{1-\alpha-\varepsilon'}$$

eräälle $\varepsilon' > 0$, kunhan $\delta > 0$ on riittävän pieni. Nyt, $\forall \varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(Y_n > na,\ \xi_1 > n^{1-\delta},\ \xi_j \leq n^{1-\delta},\ j = 2,\dots,n)$$
$$\leq \mathbb{P}(Y_n > na,\ \xi_1 \in (n^{1-\delta}, n(a-\mu-\varepsilon)],\ \xi_j \leq n^{1-\delta},\ j = 2,\dots,n)$$
$$+ \mathbb{P}(Y_n > na,\ \xi_1 > n(a-\mu-\varepsilon))$$
$$\leq \mathbb{P}(Y_{n-1} > n(\mu+\varepsilon),\ \xi_j \leq n^{1-\delta},\ j = 1,\dots,n-1) + \bar{F}(n(a-\mu-\varepsilon)).$$

Lemman 3.4 ja symmetrian nojalla

$$\mathbb{P}(Y_n > na) \le n\bar{F}(n(a-\mu-\varepsilon)) + o(1)n^{1-\alpha-\varepsilon'}$$
$$= (1+o(1))\, n\bar{F}(n(a-\mu-\varepsilon)).$$

Siispä

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\mathbb{P}(Y_n > na)}{n\bar{F}(n(a-\mu))}$$
$$= \limsup_{n\to\infty} \frac{\mathbb{P}(Y_n > na)}{n\bar{F}(n(a-\mu-\varepsilon))} \cdot \frac{\bar{F}(n(a-\mu-\varepsilon))}{\bar{F}(n(a-\mu))}$$
$$\le \limsup_{n\to\infty} \frac{\bar{F}(n(a-\mu-\varepsilon))}{\bar{F}(n(a-\mu))}.$$

Oletuksen (3.15) nojalla

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\mathbb{P}(Y_n > na)}{n\bar{F}(n(a-\mu))} \le 1.$$

Toisaalta

$$\mathbb{P}(Y_n > na) \ge n\mathbb{P}(\xi_1 > n(a-\mu+\varepsilon),\ \xi_j \le n(a-\mu+\varepsilon),\ j=2,\dots,n,$$
$$Y_n - \xi_1 > n(\mu-\varepsilon)).$$

Nähdään kuten lauseen 3.1 loppuosassa, että

$$\mathbb{P}(Y_n > na) \ge n\bar{F}(n(a-\mu-\varepsilon))(1+o(1)).$$

Oletuksesta (3.15) seuraa, että

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\mathbb{P}(Y_n > na)}{n\bar{F}(n(a-\mu))} \ge 1. \quad \square$$

Lause 3.7. Olkoon $b > 0$ kiinteä ja

$$v(x, U_0) = \int_0^{xU_0} \bar{F}(U_0 - \mu t)\, dt, \quad x \geq 0.$$

Lauseen 3.5 oletuksin

$$\lim_{U_0 \to \infty} \frac{\mathbb{P}(T \leq bU_0)}{v(b, U_0)} = 1$$

Todistus. Tarkastellaan ensin alarajoja. Olkoon $\delta > 0$ pieni. Jos $n \in [\delta U_0, bU_0]$ ja $\varepsilon > 0$ on pieni, niin

$$\mathbb{P}(T = n) \geq \mathbb{P}(\xi_n > U_0 - n\mu + n\varepsilon,\ Y_{n-1} > n(\mu - \varepsilon),\ T > n-1)$$

$$= \mathbb{P}(\xi_n > U_0 - n\mu + n\varepsilon,\ Y_{n-1} > n(\mu - \varepsilon))$$

$$- \mathbb{P}(\xi_n > U_0 - n\mu + n\varepsilon,\ Y_{n-1} > n(\mu - \varepsilon),\ T \leq n-1)$$

$$\geq \bar{F}(U_0 - n\mu + n\varepsilon)\, \mathbb{P}(Y_{n-1} > n(\mu - \varepsilon))$$

$$- \bar{F}(U_0 - n\mu + n\varepsilon)\, \mathbb{P}(T \leq bU_0).$$

Nyt

$$\mathbb{P}(Y_{n-1} > n(\mu - \varepsilon)) = 1 + o(1)$$

tasaisesti joukossa $n \geq \delta U_0$, kun $U_0 \to \infty$. Lauseen 3.1 nojalla

$$\mathbb{P}(T \le bU_0) \ge (1+o(1)) \sum_{n \in [\delta U_0, bU_0]} \bar{F}(U_0 - n\mu + n\varepsilon)$$

$$\ge (1+o(1)) \sum_{n \in [\delta U_0, bU_0]} \int_n^{n+1} \bar{F}(U_0 - t(\mu-\varepsilon))\,dt$$

$$= (1+o(1)) \int_{\lceil \delta U_0 \rceil}^{\lfloor bU_0 \rfloor} \bar{F}(U_0 - t(\mu-\varepsilon))\,dt.$$

Sijoituksella $v = t - \frac{\varepsilon t}{\mu}$ saadaan

$$\mathbb{P}(T \le bU_0) \ge (1+o(1)) \frac{\mu}{\mu-\varepsilon} \int_{\lceil \delta' U_0 \rceil}^{\lfloor b' U_0 \rfloor} \bar{F}(U_0 - \mu t)\,dt,$$

missä

$$\delta' = \frac{\delta(\mu-\varepsilon)}{\mu} \quad \text{ja} \quad b' = \frac{b(\mu-\varepsilon)}{\mu}.$$

Jos $c > 1$ ja $k \in \mathbb{N}$ ovat kiinteitä, niin

$$\bar{F}(cU_0) = \frac{\bar{F}(cU_0)}{\bar{F}((1-\varepsilon)cU_0)} \cdot \frac{\bar{F}((1-\varepsilon)cU_0)}{\bar{F}((1-\varepsilon)^2 cU_0)} \cdots \frac{\bar{F}((1-\varepsilon)^{k-1} cU_0)}{\bar{F}((1-\varepsilon)^k cU_0)} \cdot \bar{F}((1-\varepsilon)^k c U_0).$$

Oletuksen (3.15) nojalla on olemassa vakio $\mu > 0$, jolle

$$\bar{F}(cU_0) \geq \mu \bar{F}(U_0),$$

kun U_0 on suuri. Siispä

$$(3.18) \quad \int_{[\delta' U_0]}^{bU_0} \bar{F}(U_0 - t\mu)\,dt \geq (bU_0 - \delta' U_0)\,\mu \bar{F}(U_0),$$

kun μ on sopiva ja U_0 suuri. Toisaalta

$$\int_0^{[\delta' U_0]} \bar{F}(U_0 - t\mu)\,dt \leq [\delta' U_0]\,\bar{F}(U_0).$$

Koska $b' > b$, niin

$$\mathbb{P}(T \leq bU_0) \geq (1+o(1))\,\frac{\mu}{\mu - \varepsilon} \int_0^{bU_0} \bar{F}(U_0 - t\mu)\,dt$$

$$- (1+o(1))\,[\delta' U_0]\bar{F}(U_0).$$

Arvion (3.18) nojalla δ voidaan valita siten, että

$$[\delta' U_0]\bar{F}(U_0) \leq \varepsilon \int_0^{bU_0} \bar{F}(U_0 - t\mu)\,dt,$$

kun U_0 on suuri. Nähdään, että

$$\liminf_{U_0 \to \infty} \frac{\mathbb{P}(T \leq bU_0)}{V(b, U_0)} \geq 1.$$

Tarkastellaan nyt ylärajoja. Selvästi, $\forall \delta \in (0,1)$,

$$\mathbb{P}(\xi_i > U_0^{1-\delta},\ \xi_j > U_0^{1-\delta} \text{ jollain } i \neq j,\ i,j \leq bU_0)$$

$$\leq b^2 U_0^2 \bar{F}(U_0^{1-\delta})^2.$$

Jos $\delta, \varepsilon > 0$ ovat pieniä, tämä on korkeintaan

$$U_0^{1-\alpha-\varepsilon},$$

kun U_0 on suuri. Lauseen 3.1 ja Lemman 3.2 nojalla

$$\mathbb{P}(T \leq bU_0)$$

$$= \mathbb{P}(T \leq bU_0,\ \xi_j > U_0^{1-\delta} \text{ tasan yhdellä } j \leq bU_0)$$

$$+ O(U_0^{1-\alpha-\varepsilon}).$$

Jos toisaalta $\varepsilon' \in (0,1)$, niin

$$\mathbb{P}(T \leq bU_0,\ \xi_j \in (U_0^{1-\delta}, \varepsilon' U_0] \text{ tasan yhdellä } j \leq bU_0)$$

$$\leq bU_0\, \mathbb{P}(T((1-\varepsilon')U_0) \leq bU_0 - 1,\ \xi_j \leq U_0^{1-\delta},\ \forall j \leq bU_0 - 1).$$

Lemman 3.2 nojalla

$$\mathbb{P}(T \leq bU_0)$$

$$= \mathbb{P}(T \leq bU_0,\ \xi_j > \varepsilon' U_0 \text{ tasan yhdellä } j \leq bU_0)$$

$$+ O(U_0^{1-\alpha-\varepsilon})$$

$$\leq \sum_{n \leq bU_0} \mathbb{P}(T \leq bU_0,\ \xi_n > \varepsilon' U_0) + O(U_0^{1-\alpha-\varepsilon}).$$

Selvästi

$$\mathbb{P}(T < n-1, \xi_n > \varepsilon' U_0) \leq \mathbb{P}(T \leq bU_0)\bar{F}(\varepsilon' U_0),$$

Olkoon ε' niin pieni, että $\mu + \varepsilon' < 0$. Silloin

$$\mathbb{P}(T \in [n, bU_0], \xi_n \in (\varepsilon' U_0, (1-\varepsilon')U_0 - n(\mu+\varepsilon')])$$

$$\leq \mathbb{P}(Y_{n-1} > \frac{\varepsilon' U_0}{2} + n(\mu+\varepsilon'), \xi_n > \varepsilon' U_0)$$

$$+ \mathbb{P}(\sup_{m \in (n, bU_0]} (Y_m - Y_n) > \frac{\varepsilon' U_0}{2}, \xi_n > \varepsilon' U_0)$$

$$\leq \mathbb{P}(Y_{n-1} > \frac{\varepsilon' U_0}{2} + n(\mu+\varepsilon'))\bar{F}(\varepsilon' U_0)$$

$$+ \mathbb{P}(T(\frac{\varepsilon' U_0}{2}) \leq bU_0)\bar{F}(\varepsilon' U_0).$$

Lauseista 3.1 ja 3.3 seuraa, että

$$\mathbb{P}(T \leq bU_0, \xi_n > \varepsilon' U_0)$$

$$\leq F((1-\varepsilon')U_0 - n(\mu+\varepsilon')) + O(U_0^{1-2\alpha+\varepsilon/2})$$

tasaisesti alueessa $n \leq bU_0$.

Samaan tapaan kuin alarajan todistuksessa nähdään, että

$$\mathbb{P}(T \le bU_0) \le \frac{\mu}{\mu+\varepsilon'} \int_{-\delta' U_0}^{b' U_0} \bar{F}(U_0 - t\mu)\,dt + O\left(U_0^{2-2\alpha+\varepsilon/2}\right),$$

missä $b' \to b$ ja $\delta' \to 0$, kun $\varepsilon' \to 0$. Vaadittu yläraja seuraa tästä. $\square$