3. Paksuhäntäisen satunnaiskulun vararikkoteoriaa

Olkoon $\{Y_n\}$ ja T kuten kohdassa 2. Oletetaan nyt, että $\mu = \mathbb{E}(\xi) \in (-\infty, 0)$ ja että on olemassa raja-arvo

$$(3.1) \quad \lim_{x \to \infty} (\log x)^{-1} \log \mathbb{P}(\xi > x) = -\alpha,$$

missä $\alpha \in (1, \infty)$. Epätäsmällisesti, pätee

$$\mathbb{P}(\xi > x) \approx x^{-\alpha}, \quad x \text{ suuri}.$$

Täsmällisemmin, jos $\varepsilon > 0$ on annettu, niin

$$x^{-(\alpha+\varepsilon)} \le \mathbb{P}(\xi > x) \le x^{-(\alpha-\varepsilon)},$$

kun x on suuri. Olkoon $s > 0$ ja $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa sellainen $x_\varepsilon > 0$, että

$$\mathbb{E}(e^{s\xi}) \ge \mathbb{E}(e^{s\xi} 1(\xi \ge x)) \ge e^{sx} \mathbb{P}(\xi \ge x)$$

$$\ge e^{sx} x^{-(\alpha-\varepsilon)} \ge \frac{(sx)^n}{n!} x^{-(\alpha+\varepsilon)}, \quad \forall n, \ x > x_\varepsilon$$

Valitsemalla $n > \alpha + \varepsilon$ nähdään, että

$$\mathbb{E}(e^{s\xi}) = \infty, \quad \forall s > 0.$$

Kohdan 2 teoriaa ei ole käytettävissä, sillä nyt $R = 0$. Esimerkiksi konjugaattijakaumaan perustuva todistustekniikka ei ole hyödyllinen eikä lauseen 2.1 tulos myöskään päde.

Merkitään $F(x) = \mathbb{P}(\xi \le x)$ ja

$$\bar{F}(x) = \mathbb{P}(\xi > x), \quad x \in \mathbb{R},$$

sekä

$$M_n = \max(\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Lause 3.1 Olkoon $b > 0$. Edellä esitetyin oletuksin

$$(3.1.1) \quad \lim_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T \le bU_0) = 1 - \alpha$$

ja

$$(3.1.2) \quad \lim_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty) = 1 - \alpha.$$

Olkoon $c > 0$ kiinteä. On helppo nähdä, että

$$\lim_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(M_{\lfloor bU_0 \rfloor} > cU_0) = 1 - \alpha.$$

Tämä viittaa siihen, että vararikon tulokseesa (3.1.1) aiheuttaa yksi suuri ξ_j, $j \le bU_0$.

Esitetään muutama lemma ennen lauseen todistamista.

<u>Lemma 3.1.1.</u> Olkoon $a>0$, $\mathbb{P}(\eta\in[0,a])=1$ ja $\mathbb{P}(\eta>0)>0$ sekä $h>0$. Silloin

$$(3.2)\qquad \mathbb{E}(e^{h\eta}) \le \frac{e^{ha}-1}{a}\,\mathbb{E}(\eta)+1$$

ja

$$(3.2.1)\qquad \mathbb{E}(e^{h\eta}) \le \frac{e^{ha}-1-ha}{a^2}\,\mathbb{E}(\eta^2)+1+h\,\mathbb{E}(\eta).$$

<u>Todistus.</u> Eksponenttifunktion sarjakehitelmän nojalla

$$x \mapsto \frac{e^{hx}-1}{x}$$

ja

$$x \mapsto \frac{e^{hx}-1-hx}{x^2}$$

määrittelevät kasvavat funktiot alueessa $x\in(0,\infty)$. Siispä

$$\mathbb{E}(e^{h\eta}) = \mathbb{E}\left(\frac{e^{h\eta}-1}{\eta}\,\eta\,1(\eta>0)\right)+1$$
$$\le \frac{e^{ha}-1}{a}\,\mathbb{E}(\eta)+1$$

ja

$$\mathbb{E}(e^{h\eta}) = \mathbb{E}\left(\frac{e^{h\eta}-1-h\eta}{\eta^2}\,\eta^2 1(\eta>0)\right)+1+h\,\mathbb{E}(\eta)$$
$$\le \frac{e^{ha}-1-ha}{a^2}\,\mathbb{E}(\eta^2)+1+h\,\mathbb{E}(\eta). \quad \square$$

<u>Lemma 3.1.2.</u> Olkoot $f_1, f_2 : (0,\infty) \to (0,\infty)$ mielivaltaisia, ja

$$\beta_j = \limsup_{x\to\infty} (\log x)^{-1} \log f_j(x) \in [-\infty, \infty], \quad j = 1, 2.$$

Silloin

$$\limsup_{x\to\infty} (\log x)^{-1} \log (f_1(x) + f_2(x))$$

$$= \limsup_{x\to\infty} (\log x)^{-1} \log (\max (f_1(x), f_2(x)))$$

$$= \max (\beta_1, \beta_2).$$

<u>Todistus.</u> Tulokset seuraavat suoraviivaisesti epäyhtälöistä

$$\max (f_1(x), f_2(x)) \le f_1(x) + f_2(x) \le 2 \max (f_1(x), f_2(x)), \quad x > 0. \qquad \square$$

Lemma 3.2. Olkoon $\delta > 0$. Silloin lauseen 3.1 oletuksin

$$(3.3) \qquad \lim_{n\to\infty} (\log n)^{-1} \log \mathbb{P}(Y_n > 0,\ M_n \le n^{1-\delta}) = -\infty$$

ja

$$(3.4) \qquad \lim_{U_0\to\infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T \le bU_0,\ M_{\lfloor bU_0 \rfloor} \le U_0^{1-\delta}) = -\infty.$$

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$, $h = h_n = n^{-1+\delta/2}$ ja

$$\xi' = \xi\, \mathbb{1}(\xi \le n^{1-\delta}).$$

Osoitetaan aluksi, että voidaan määrätä sellainen $\varepsilon' > 0$, että

$$(3.5) \qquad \mathbb{E}(e^{h\xi'}) \le e^{-h\varepsilon'},$$

kun n on riittävän suuri.

Olkoon $\varepsilon'' > 0$. Koska $\mu < \infty$, voidaan määrätä sellainen $c > 0$, että

$$\mathbb{E}(\max(\xi, -c)) < \mu + \varepsilon''.$$

Olkoon

$$\xi'' = \max(\xi', -c) + c.$$

Tällöin $\mathbb{P}(\xi'' \in [0, n^{1-\delta} + c]) = 1$. Merkitään $\mu'' = \mathbb{E}(\xi'')$. Lemman 3.1.1 nojalla

$$\mathbb{E}(e^{h\xi''}) \le \frac{e^{h(n^{1-\delta}+c)}-1}{n^{1-\delta}+c}\,\mu'' + 1.$$

Koska $h(n^{1-\delta}+c) \to 0$, kun $n \to \infty$, ja

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1,$$

niin

$$\mathbb{E}(e^{h\xi''}) \le (1+\varepsilon)h\mu''+1 \le e^{(1+\varepsilon)h\mu''},$$

kun n on suuri. Nähdään, että

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{h\xi'}) &\le \mathbb{E}(e^{h\xi''})\,e^{-hc} \\ &\le e^{(1+\varepsilon)h(\mu+\varepsilon''+c)-hc} \\ &= e^{h((1+\varepsilon)\mu+(1+\varepsilon)\varepsilon''+\varepsilon c)}.\end{aligned}$$

Yläraja (3.5) saadaan valitsemalla ensin ε'' pieneksi (mikä kiinnittää c:n) ja sen jälkeen ε riittävän pieneksi, sillä $\mu<0$.

Todistetaan (3.3). Olkoon

$$\xi_j' = \xi_j 1(\xi_j \le n^{1-\delta}), \quad j = 1, 2, \dots,$$

ja

$$Y_n' = \xi_1' + \dots + \xi_n'.$$

Tsebyshevin epäyhtälön nojalla

$$\mathbb{E}(e^{hY_n'}) \ge \mathbb{E}(e^{hY_n'} 1(Y_n' > 0)) \ge \mathbb{P}(Y_n' > 0).$$

Arvion (3.5) nojalla

$$\mathbb{P}(Y_n' > 0) \le (e^{-h\varepsilon'})^n = e^{-n^{\delta/2}\varepsilon'}.$$

Saadaan

$$\limsup_{n\to\infty} (\log n)^{-1} \log \mathbb{P}(Y_n' > 0) = -\infty.$$

Väite seuraa tästä, sillä

$$\mathbb{P}(Y_n > 0, M_n \le n^{1-\delta}) \le \mathbb{P}(Y_n' > 0).$$

Todistetaan (3.4). Selvästi

$$\mathbb{P}(T \le bU_0, M_{\lfloor bU_0 \rfloor} \le U_0^{1-\delta})$$

$$\le \sum_{n \le bU_0} \mathbb{P}(Y_n > U_0, M_n \le U_0^{1-\delta})$$

$$\le \sum_{n \le bU_0} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i 1(\xi_i \le U_0^{1-\delta}) > U_0\right).$$

$\mathbb{E}$ päyhtälön (3.5) nojalla

$$\mathbb{E}\left(e^{h'\xi}\, 1(\xi \leq U_0^{1-\delta}) \right) \leq e^{-h'\varepsilon'},$$

missä $h' = h'(U_0) = U_0^{-1+\delta/2}$ ja U_0 on suuri.

Tsebyshevin epäyhtälön nojalla

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\, 1(\xi_i \leq U_0^{1-\delta}) > U_0 \right)$$

$$\leq e^{-h'U_0} \left(e^{-h'\varepsilon'}\right)^n \leq e^{-h'U_0} = e^{-U_0^{\delta/2}}.$$

Saadaan siis

$$\mathbb{P}(T \leq bU_0, M_{\lfloor bU_0 \rfloor} \leq U_0^{1-\delta}) \leq bU_0 e^{-U_0^{\delta/2}},$$

josta (3.4) seuraa. $\square$

<u>Lauseen 3.1 todistus</u>. Ilmeisesti

$$\mathbb{P}(T \le bU_0) \le \mathbb{P}(T \le bU_0,\, M_{\lfloor bU_0 \rfloor} \le U_0^{1-\delta}) + \mathbb{P}(M_{\lfloor bU_0 \rfloor} > U_0^{1-\delta}).$$

Nyt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M_{\lfloor bU_0 \rfloor} > U_0^{1-\delta}) &= 1 - \mathbb{P}(M_{\lfloor bU_0 \rfloor} \le U_0^{1-\delta}) \\
&= 1 - (1 - \bar{F}(U_0^{1-\delta}))^{\lfloor bU_0 \rfloor} \\
&\le 1 - e^{bU_0 \log(1 - \bar{F}(U_0^{1-\delta}))}.
\end{aligned}$$

Koska

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1-x)}{x} = -1,$$

niin

$$\log(1 - \bar{F}(U_0^{1-\delta})) \ge -(1+\delta)\bar{F}(U_0^{1-\delta}),$$

kun U_0 on suuri. Valitsemalla δ pieneksi saadaan

$$\begin{aligned}
(3.6) \quad \mathbb{P}(M_{\lfloor bU_0 \rfloor} > U_0^{1-\delta}) &\le 1 - e^{-bU_0(1+\delta)\bar{F}(U_0^{1-\delta})} \\
&= 1 - (1 - bU_0(1+\delta)\bar{F}(U_0^{1-\delta})(1+o(1))) \\
&= (1+o(1))\, bU_0 (1+\delta) \bar{F}(U_0^{1-\delta}).
\end{aligned}$$

Raja-arvon (3.1) nojalla

$$\begin{aligned}
&\limsup_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(M_{\lfloor bU_0 \rfloor} > U_0^{1-\delta}) \\
&\le 1 + \limsup_{U_0 \to \infty} (1-\delta)(\log U_0^{1-\delta})^{-1} \log \bar{F}(U_0^{1-\delta}) \\
&= 1 - (1-\delta)\alpha.
\end{aligned}$$

Nyt $\mathbb{P}(T \le bU_0,\, M_{\lfloor bU_0 \rfloor} \le U_0^{1-\delta})$ on erittäin pieni lemman 3.2 nojalla.

Antamalla δ:n mennä kohti nollaa saadaan

$$(3.7)\quad \limsup_{U_0\to\infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T \le b U_0) \le 1-\alpha.$$

Johdetaan ylärajoja todennäköisyydelle $\mathbb{P}(T \in (U_0, \infty))$, olkoon $\delta > 0$. Mielivaltaiselle $y \ge 1$ pätee

$$(3.8)\quad \mathbb{P}(T \in [U_0^y, U_0^{y+\delta}])$$

$$\le \mathbb{P}(Y_n > 0 \text{ jollain } n \in [U_0^y, U_0^{y+\delta}],\ M_{\lfloor U_0^{y+\delta}\rfloor} \le U_0^{y(1-\delta)})$$

$$+ \mathbb{P}(Y_n > 0 \text{ jollain } n \in [U_0^y, U_0^{y+\delta}],\ M_{\lfloor U_0^{y+\delta}\rfloor} > U_0^{y(1-\delta)}).$$

Olkoon $Q_1(U_0,y)$ ensimmäinen ja $Q_2(U_0,y)$ toinen (3.8):n oikean puolen todennäköisyyksistä. Olkoon $\beta > \alpha$. Lemman 3.2 nojalla

$$Q_1(U_0,y) \le \sum_{n\in[U_0^y, U_0^{y+\delta}]} \mathbb{P}(Y_n > 0,\ M_n \le n^{1-\delta})$$

$$(3.9)\quad \le U_0^{y+\delta}\, U_0^{-y\beta} \le U_0^{\delta + y(1-\beta)},$$ kun U_0 on suuri.

Arvio on tasainen alueessa $y \ge 1$ (ts. voidaan valita $\bar{U}$ siten, että epäyhtälö pätee kaikilla $y \ge 1$, kunhan $U_0 \ge \bar{U}$). Edelleen

$$Q_2(U_0,y) \le \mathbb{P}(M_{\lfloor U_0^{y+\delta}\rfloor} > U_0^{y(1-\delta)})$$

$$\le \mathbb{P}\left(M_{\lfloor U_0^{y+\delta}\rfloor} > \lfloor U_0^{y+\delta}\rfloor^{\frac{y(1-\delta)}{y+\delta}}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(M_{\lfloor U_0^{y+\delta}\rfloor} > \lfloor U_0^{y+\delta}\rfloor^{1-\delta-\frac{\delta(1-\delta)}{y+\delta}}\right)$$

$$\le \mathbb{P}\left(M_{\lfloor U_0^{y+\delta}\rfloor} > \lfloor U_0^{y+\delta}\rfloor^{1-\delta'}\right)$$

missä $\delta' = \delta + \frac{\delta(1-\delta)}{1+\delta}$. Kuten (3.6):ssa nähdään, että annetulle $\varepsilon > 0$ voidaan määrätä δ siten, että

$$Q_2(U_0, y) \le U_0^{-y(\alpha-1-\varepsilon)}, \quad \forall y \ge 1,$$

kun $U_0 > \bar{U}$ ($\bar{U}$ ei riipu y:stä). Yhdistämällä tulokset saadaan

$$\mathbb{P}(T \in (U_0, \infty)) \le \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(T \in [U_0^{1+j\delta}, U_0^{1+(j+1)\delta}])$$

$$\le U_0^{1+\delta-\beta} \sum_{j=0}^{\infty} U_0^{j\delta(1-\beta)} + U_0^{1-\alpha+\varepsilon} \sum_{j=0}^{\infty} U_0^{-j\delta(\alpha-1-\varepsilon)}.$$

Molemmat sarjat suppenevat, kun ε on pieni ja siis

$$\mathbb{P}(T \in (U_0, \infty)) \le K U_0^{1-\alpha+\varepsilon},$$

kun U_0 on suuri, missä K on vakio. Yhdistämällä tämä arvioon (3.2) ja antamalla $\varepsilon \to 0+$ saadaan lemmasta 3.1.2

(3.10) $$\limsup_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty) \le 1 - \alpha.$$

Olkoon $b \in (0,1)$ mielivaltainen. Lauseen molemmat väitteet tulevat todistetuksi, jos tällöin

(3.10.1) $$\liminf_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T \le bU_0) \ge 1 - \alpha,$$

kun U_0 on suuri; pätee annetulle $\varepsilon > 0$,

(3.11) $$\mathbb{P}(T \le bU_0) \ge \mathbb{P}(Y_{\lfloor bU_0 \rfloor} > U_0)$$

$$\ge \lfloor bU_0 \rfloor \mathbb{P}(\xi_1 > U_0^{1+\varepsilon}, \xi_i \le U_0^{1+\varepsilon}, i = 2, \dots, \lfloor bU_0 \rfloor, Y_{\lfloor bU_0 \rfloor} - \xi_1 \ge \lfloor bU_0 \rfloor(\mu - \varepsilon))$$

$$= \lfloor bU_0 \rfloor \bar{F}(U_0^{1+\varepsilon}) \mathbb{P}(\xi_i \le U_0^{1+\varepsilon}, i = 2, \dots, \lfloor bU_0 \rfloor, Y_{\lfloor bU_0 \rfloor} - \xi_1 \ge \lfloor bU_0 \rfloor(\mu - \varepsilon)).$$

Kuten (3.6):ssa nähdään, että

$$\mathbb{P}(\xi_i \le U_0^{1+\varepsilon},\ i=2,\dots,\lfloor bU_0\rfloor) \ge \exp\left(-bU_0\bar{F}(U_0^{1+\varepsilon})(1+\varepsilon)\right),$$

kun U_0 on suuri. Koska $\alpha > 1$, niin

$$\lim_{U_0\to\infty} \mathbb{P}(\xi_i \le U_0^{1+\varepsilon},\ i=2,\dots,\lfloor bU_0\rfloor) = 1.$$

Suurten lukujen lain nojalla

$$\lim_{U_0\to\infty} \mathbb{P}(Y_{\lfloor bU_0\rfloor} - \xi_1 \ge \lfloor bU_0\rfloor(\mu-\varepsilon)) = 1.$$

Arvion (3.11) nojalla

$$\liminf_{U_0\to\infty} (\log U_0)^{-1}\log \mathbb{P}(T \le bU_0)$$

$$\ge \liminf_{U_0\to\infty} (\log U_0)^{-1}\log\left(\lfloor bU_0\rfloor \bar{F}(U_0^{1+\varepsilon})\right) = 1-(1+\varepsilon)\alpha.$$

Alaraja (3.10.1) seuraa tästä. $\square$

3.1. Osasummien suurista poikkeamista

Olkoon satunnaisjakso $\{Y_n\}$ kuten kohdan 3 alussa. Oletetaan, kuitenkin nyt vain, että $\mu \in \mathbb{R}$. Lisäksi oletetaan, että (3.1) pätee ja että $\alpha \in (1, \infty)$.

<u>Lause 3.3.</u> Olkoon $a > \mu$ kiinteä. Edellä esitetyin oletuksin

$$\lim_{n\to\infty} (\log n)^{-1} \log \mathbb{P}(Y_n > na) = 1-\alpha.$$

Todistetaan ensin hieman yleisempi versio lemman 3.2 ensimmäisestä tuloksesta.

<u>Lemma 3.4.</u> Olkoon $\delta > 0$. Silloin lauseen 3.3 oletuksin

$$\lim_{n\to\infty} (\log n)^{-1} \log \mathbb{P}(Y_n > na,\ M_n \le n^{1-\delta}) = -\infty.$$

<u>Todistus.</u> Selvästi

$$\mathbb{P}(Y_n > na,\ M_n \le n^{1-\delta})$$

$$= \mathbb{P}((\xi_1 - a) + \dots + (\xi_n - a) > 0,\ \max(\xi_1 - a, \dots, \xi_n - a) \le n^{1-\delta} - a)$$

$$\le \mathbb{P}((\xi_1 - a) + \dots + (\xi_n - a) > 0,\ \max(\xi_1 - a, \dots, \xi_n - a) \le n^{1-\delta/2}),$$

kun n on suuri. Väite seuraa lemmasta 3.2. $\square$

Lauseen 3.3 todistus. Lemman 3.4 nojalla

$$\mathbb{P}(Y_n > na) \le n\bar{F}(n^{1-\delta}) + n^{-\beta},$$

kun n on suuri, missä $\beta > 0$ on kiinteä (mutta suuri). Nähdään, että

$$\limsup_{n\to\infty} (\log n)^{-1} \log \mathbb{P}(Y_n > na) \le 1 - (1-\delta)\alpha.$$

Toisaalta annetulle $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(Y_n > na) \ge n\,\mathbb{P}(\xi_1 > n^{1+\varepsilon},\ \xi_i \le n^{1+\varepsilon},\ i=2,\dots,n,\ Y_n - \xi_1 > n(\mu-\varepsilon))$$

$$= n\bar{F}(n^{1+\varepsilon})\,\mathbb{P}(\xi_i \le n^{1+\varepsilon},\ i=2,\dots,n,\ Y_n - \xi_1 > n(\mu-\varepsilon)).$$

Viimeinen todennäköisyys suppenee kohti ykköstä, joten

$$\liminf_{n\to\infty} (\log n)^{-1} \log \mathbb{P}(Y_n > na) \ge 1 - (1+\varepsilon)\alpha.$$

Lemman väite seuraa saaduista tuloksista. $\square$