2.4. Osasummien suurista poikkeamista

Olkoon satunnaiskulku $\{Y_n\}$ kuten lauseessa 2.1. Olkoon $a > \mathbb{E}(\xi)$. Johdetaan seuraavassa asymptoottinen esitys todennäköisyydelle

$$(2.12) \qquad \mathbb{P}(Y_n/n > a), \quad n \to \infty.$$

Oletetaan, että $c(s) < \infty$ eräälle $s > 0$ ja että

$$c'(s) = a \quad \text{eräälle} \quad s = s_a.$$

Lisäksi oletetaan, että $\xi - b$ ei ole aritmeettinen millään $b \in \mathbb{R}$.

Todennäköisyyden (2.12) arvioimisessa hyödynnetään seuraavaa tulosta.

Lemma 2.4. Edellä esitetyn lisäksi oletetaan, että $\mathbb{E}(\xi^3)$ on äärellisenä olemassa. Olkoon $\mu = \mathbb{E}(\xi)$, $\sigma^2 = \operatorname{Var} \xi$ ja

$$\gamma = \frac{\mathbb{E}((\xi-\mu)^3)}{\sigma^3} \qquad \text{(vinous)}.$$

Silloin

$$\mathbb{P}\left(\frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right) = \Phi(x) - \frac{\gamma(1-x^2)\Phi'(x)}{6\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n \to \infty,$$

tasaisesti alueessa $x \in \mathbb{R}$, missä Φ on standardi normaalijakauman kertymäfunktio.

Todistus on esitetty lähteessä Feller (1971): An introduction to probability theory and its applications, luku XVI.4. Luvussa XVI.5 on todistettu, että jos $\bar{Y}_n = (Y_n - n\mu)/(\sigma\sqrt{n})$, niin

$$\left| \mathbb{P}(\bar{Y}_n \leq x) - \Phi(x) \right| \leq \frac{3\rho}{\sigma^3\sqrt{n}}, \quad \forall x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},$$

missä $\rho = \mathbb{E}(|\xi - \mu|^3)$. Kyseessä on ns. Berry-Esseen -approksimaatio.

Lause 2.5 Lemman 2.4 oletuksin

$$\lim_{n\to\infty} J_n \, \mathbb{P}\left(\frac{Y_n}{n} > a \right) = 1,$$

missä

$$J_n = s_a \sqrt{c''(s_a)\, 2\pi n}\; e^{n c^*(a)}.$$

<u>Todistus.</u> Tehdään muuttujiin ξ_i konjugaattimuunnos parametrilla s_a riippumattomuus säilyttäen. Saadaan

$$\mathbb{P}(Y_n > na) = E_{s_a}\left[e^{-s_a Y_n + n c(s_a)} 1(Y_n > na)\right]$$

$$= e^{-n c^*(a)} \mathbb{E}_{s_a}\left[e^{-s_a Y_n + n s_a a} 1(Y_n > na)\right].$$

Olkoon

$$F_n(x) = \mathbb{P}_{s_a}\left(\frac{Y_n - na}{\sqrt{c''(s_a)n}} \leq x\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Silloin

$$\mathbb{E}_{s_a}\left[e^{-s_a Y_n + n s_a a} 1(Y_n > na)\right]$$

$$= \mathbb{E}_{s_a}\left[e^{-s_a\sqrt{c''(s_a)n}\left(\frac{Y_n - na}{\sqrt{c''(s_a)n}}\right)} 1\left(\frac{Y_n - na}{\sqrt{c''(s_a)n}} > 0\right)\right]$$

$$= \int_0^\infty e^{-s_a\sqrt{c''(s_a)n}\, x} dF_n(x).$$

Merkitään lyhyesti

$$\psi_n = s_a\sqrt{c''(s_a)n}.$$

Nyt

$$\int_0^\infty e^{-\Psi_n x}\, dF_n(x) = \Big/_0^\infty e^{-\Psi_n x} F_n(x) - \int_0^\infty F_n(x)\, d\left(e^{-\Psi_n x}\right)$$

$$= -F_n(0) + \int_0^\infty \Psi_n e^{-\Psi_n x} F_n(x)\, dx$$

$$= \int_0^\infty \Psi_n e^{-\Psi_n x} \left[F_n(x) - F_n(0) \right] dx.$$

Siis

$$J_n\, \mathbb{P}(Y_n > na) = \sqrt{2\pi} \int_0^\infty \Psi_n^2 e^{-\Psi_n x} \left[F_n(x) - F_n(0) \right] dx$$

$$= \sqrt{2\pi} \int_0^\infty \Psi_n e^{-x} \cdot \left[F_n\left(\tfrac{x}{\Psi_n}\right) - F_n(0) \right] dx.$$

Lemman 2.4 nojalla

$$J_n\, \mathbb{P}(Y_n > na)$$

$$= \sqrt{2\pi} \int_0^\infty \Psi_n e^{-x} \left[\phi\left(\tfrac{x}{\Psi_n}\right) - \frac{\gamma_{s_a}\left(1 - \left(\frac{x}{\Psi_n}\right)^2\right) \phi'\left(\frac{x}{\Psi_n}\right)}{6\sqrt{n}} - \phi(0) + \frac{\gamma_{s_a} \phi'(0)}{6\sqrt{n}} \right] dx + o(1),$$

missä

$$\gamma_{s_a} = \mathbb{E}_{s_a}\left(\frac{(\xi - a)^3}{c''(a)^{3/2}} \right)$$

on ξ:n vinous konjugaatin jakauman alaisuudessa. Integrandi on dominoitu, sillä väliarvolauseen nojalla

$$\left|\phi\left(\frac{x}{\psi_n}\right) - \phi(0)\right| \le \frac{x}{\sqrt{2\pi}\,\psi_n}$$

ja

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} |y^2 \phi'(y)| < \infty.$$ Lisäksi jokaisella kiinteällä $x \in \mathbb{R}$,

$$\phi\left(\frac{x}{\psi_n}\right) = \phi(0) + \frac{x}{\psi_n}\phi'(0)(1+o(1)), \quad n \to \infty,$$

ja

$$\phi'\left(\frac{x}{\psi_n}\right) = \phi'(0) + \phi''(0)\frac{x}{\psi_n}(1+o(1)), \quad n \to \infty,$$

joten

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n e^{-x}\left[\phi\left(\frac{x}{\psi_n}\right) - \frac{\gamma_{s_a}\left(1-\left(\frac{x}{\psi_n}\right)^2\right)\phi'\left(\frac{x}{\psi_n}\right)}{6\sqrt{n}} - \phi(0) + \frac{\gamma_{s_a}\phi'(0)}{6\sqrt{n}}\right]$$

$$= \phi'(0)\, x e^{-x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-x}.$$

Siispä dominoidun konvergenssin nojalla

$$\lim_{n\to\infty} J_n \, \mathbb{P}(Y_n > na) = \int_0^\infty x e^{-x}\,dx = 1. \quad \square$$