2.1. Teoreettisia apuvälineitä

Lauseen 2.1 todistus perustetaan uusiutumisteoriaan. Tarkastellaan ensin tätä tarpeellisin osin.

Olkoot $\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia ja

$$S_n = \eta_1 + \ldots + \eta_n \quad , n = 1, 2, \ldots$$

sekä $S_0 = 0$. Olkoon F muuttujan η kertymäfunktio. Oletetaan, että $F(0) = 0$ t.s. η on positiivinen m.v. Tällöin $\{S_n\}$ on <u>uusiutumisprosessi</u>. Olkoon $\mu = \mathbb{E}(\eta) \in (0, \infty]$

Olkoon

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n \le x), \quad x \ge 0,$$

ja $U(x) = 0$, kun $x < 0$. Tätä kutsutaan usein <u>uusiutumismitaksi</u> (tällöin U laajennetaan tietyksi mitaksi $([0,\infty), \mathcal{B})$:lle, välin $(a,b]$ mitta on $U(b) - U(a)$). Koska $S_0 = 0$, on $U(0) = 1$. Lisäksi $U(x)$ kuvaa 'osumia' välille $[0, x]$ odotusarvomielessä. Olkoon nimittäin

$$N = N_x = \#\{n \ge 0 \mid S_n \le x\}.$$

Silloin

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N) &= \sum_{n=0}^{\infty} n\,\mathbb{P}(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N = n) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(N = n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N \ge k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_{k-1} \le x) = U(x).
\end{aligned}$$

Lemma 2.2. $U(x) < \infty$, $\forall x$. Olkoon $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rajoitettu mitallinen funktio ja $z(x) = 0$, $\forall x < 0$. Silloin

$$(2.5) \quad Z(x) = \int_{0-}^{x} z(x-y)\, dU(y)$$

toteuttaa uusiutumisyhtälön

$$(2.6) \quad Z(x) = z(x) + \int_{0}^{x} Z(x-y)\, dF(y).$$

Lisäksi (2.6):lla ei ole muita sellaisia ratkaisuja, jotka ovat rajoitettuja äärellisillä väleillä ja häviävät alueessa $x < 0$.

Huomautus 2.2. Integrointi U:n suhteen (2.5):ssä voidaan ajatella odotusarvoista muodostuvana sarjana:

$$\int_{0-}^{x} f(y)\, dU(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{0-}^{x} f(y)\, dF^{n*}(y)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\big(f(S_n) 1(S_n \le x)\big).$$

<u>Lemman 2.2. todistus.</u> Olkoon

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{n} F^{k*}(x).$$ Valitaan $\alpha, \beta > 0$ siten, että

$$1 - F(\alpha) > \beta.$$

Ilmeisesti kaikilla $x > 0$

$$\int_{0-}^{x} (1 - F(x-y))\, dU_n(y) = 1 - F^{(n+1)*}(x) \leq 1.$$

Erityisesti jos $x \geq \alpha$, niin

$$\int_{x-\alpha}^{x} (1 - F(x-y))\, dU_n(y) \leq 1.$$

Lisäksi

$$\int_{x-\alpha}^{x} (1 - F(x-y))\, dU_n(y) > \beta\big(U_n(x) - U_n(x-\alpha)\big),$$

joten

$$U_n(x) - U_n(x-\alpha) \leq \frac{1}{\beta}.$$

Nähdään, että $U(x) \leq U(x-\alpha) + \frac{1}{\beta}$, $\forall x \geq \alpha$. Siispä

$$U(\alpha) \leq U(0) + \frac{1}{\beta} = 1 + \frac{1}{\beta}.$$

Jos $x > 0$ on annettu, on $U(x) \leq \frac{k}{\beta} + 1$, kun k valitaan siten, että $k\alpha \geq x$.

On osoitettava vielä uusiutumisyhtälön (2.6) ratkaisua koskevat tulokset. Ensinnäkin $U(x) < \infty$ ja z on rajoitettu, joten $Z(x) < \infty$. Nyt

$$\int_0^x \left[\int_{0-}^{x-y} z(x-y-v)\, dU(v) \right] dF(y)$$

$$= \int_0^x \left[\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{x-y} z(x-y-v)\, dF^{k*}(v) \right] dF(y)$$

MKL

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x \left[\int_0^{x-y} z(x-y-v)\, dF^{k*}(v) \right] dF(y)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x z(x-y)\, dF^{k*}(y) = \int_{0-}^x z(x-y)\, dU(y) - z(x).$$

Nähdään, että (2.5) on (2.6):n ratkaisu.

Jos Z_1 ja Z_2 ovat (2.6):n ratkaisuja, niin

$$Z_1(x) - Z_2(x) = \int_0^x \left(Z_1(x-y) - Z_2(x-y) \right) dF(y), \quad \forall x.$$

Nähdään, että

$$Z_1(x) - Z_2(x) = \int_0^x \left(Z_1(x-y) - Z_2(x-y) \right) dF^{n*}(y), \quad \forall n.$$

Koska $F^{n*}(x) = \mathbb{P}(S_n \le x) \xrightarrow{SLL} 0$, kun $n \to \infty$,

on välttämättä $Z_1(x) - Z_2(x) = 0$, $\forall x$. $\square$

Funktiota $z : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ sanotaan <u>olennaisesti</u> (Riemann-) <u>integroituvaksi</u>, jos

$$\lim_{h \to 0+} h \sum_{k=1}^{\infty} \underline{m}_k(h) = \lim_{h \to 0+} h \sum_{k=1}^{\infty} \overline{m}_k(h) < \infty,$$

missä

$$(2.7) \quad \underline{m}_k(h) = \inf \{ z(x) \mid (k-1)h \le x < kh \}$$

ja

$$(2.8) \quad \overline{m}_k(h) = \sup \{ z(x) \mid (k-1)h \le x < kh \}.$$

<u>Lause 2.3.</u> Olkoon $z : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ olennaisesti integroituva ja Z uusiutumisyhtälön (2.6) ratkaisu (2.5). Jos F ei ole aritmeettinen, niin

$$\lim_{x \to \infty} Z(x) = \mu^{-1} \int_0^{\infty} z(y)\, dy,$$

missä $\mu = \mathbb{E}(\eta)$. Jos F on aritmeettinen jänteenä a, niin

$$\lim_{n \to \infty} Z(x + na) = \frac{a}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} z(x + ka)$$

kaikilla $x \ge 0$.

Todistus on esitetty lähteessä Feller (1971). An introduction to probability theory and its applications, luku XI. Second edition. Wiley.

Lausetta 2.3 kutsutaan <u>uusiutumislauseeksi</u>.

<u>Esimerkki 2.1</u> Oletetaan, että $z \geq 0$ on Riemann-integroituva jokaisella välillä $[0, a]$ ja että

$$\sum_{k=1}^{\infty} \overline{m}_k(h_0) < \infty$$

eräälle $h_0 > 0$. Tällöin z on oleellisesti integroituva. Olkoon nimittäin $\varepsilon > 0$ ja k_0 sellainen, että

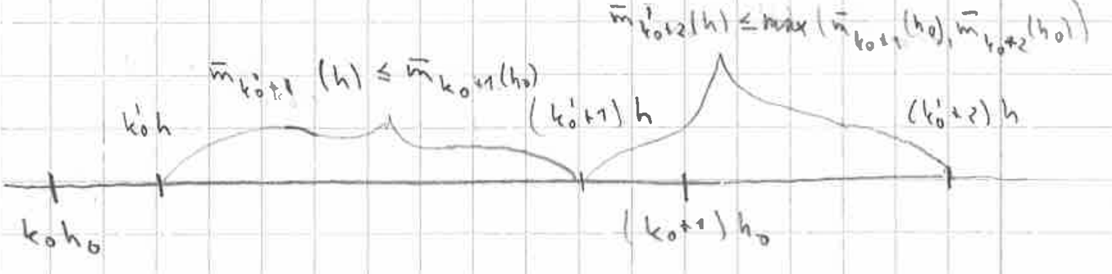
$$h_0 \sum_{k=k_0}^{\infty} \overline{m}_k(h_0) < \varepsilon .$$

Olkoon $h < h_0$ ja $r = \left[\frac{h_0}{h}\right] + 1$. Ilmeisesti

$$h \sum_{k=k_0'}^{\infty} \overline{m}_k(h) \leq r h \sum_{k=k_0}^{\infty} \overline{m}_k(h_0)$$

$$\leq (h_0 + 2h) \sum_{k=k_0}^{\infty} \overline{m}_k(h_0) < 3\varepsilon ,$$

missä k_0' on pienin sellainen kokonaisluku, että $k_0' h \geq k_0 h_0$.



Valitsemalla $a = (k_0+1) h_0$, saadaan

$$\left| h \sum_{k,\, kh \leq a} \overline{m}_k(h) - h \sum_{k,\, kh \leq a} \underline{m}_k(h) \right| < \varepsilon ,$$

Riemann integroituvuuden nojalla, kun h on pieni. Alussa olevan nojalla sama saadaan summille alueessa $k,\ kh > a$, josta väite seuraa.

2.2. Päätuloksen todistus

Lauseen 2.1 todistus. Käsitellään vain tapausta, jossa ξ:n jakauma ei ole aritmeettinen. Siirtymällä konjugaattijakaumaan parametrilla R saadaan esitys

$$(2.9) \quad \mathbb{P}(T<\infty) = \mathbb{E}_R\left(e^{-RY_T}\, 1(T<\infty)\right)$$
$$= e^{-RU_0}\, \mathbb{E}_R\left(e^{-R(Y_T-U_0)}\right).$$

Ks. Riskiteoria 2013. Riittää siis todistaa, että viimeinen odotusarvo suppenee kohti positiivista vakiota. Tätä varten osoitetaan ensin, että $Y_T - U_0$ suppenee jakaumaltaan.

Olkoon $\tau_0 = 0$ ja $Y_0 = 0$. Määritellään

$$\tau_{k+1} = \inf\{n > \tau_k \mid Y_n > Y_{\tau_k}\}, \quad k = 0,1,2,\dots$$

ja merkitään

$$\eta_k = Y_{\tau_k} - Y_{\tau_{k-1}}, \quad k = 1,2,\dots .$$

Koska $\mathbb{E}_R(\xi) = c'(R) > 0$, ovat sekä τ_k että η_k aitoja satunnaismuuttujia (esim. $\mathbb{P}(\tau_k < \infty) = 1,\ \forall k$). Ilmeisesti $\tau_1, \tau_2-\tau_1, \tau_3-\tau_2, \dots$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita, samoin $\eta_1, \eta_2, \dots$. Lisäksi η-muuttujat ovat positiivisia, joten $\{S_n\}$,

$$S_n = \eta_1 + \dots + \eta_n,$$

on uusiutumisprosessi. Suoraviivaisesti nähdään, että η-muuttujat eivät ole aritmeettisia.

(Nimitys: $\tau_1, \tau_2, \dots$ ovat tikasindeksejä, $\eta_1, \eta_2, \dots$ tikaskorkeuksia.)

Olkoon

$$T' = \inf\{n \mid S_n > U_0\}.$$

Ilmeisesti $S_{T'} = Y_T$. Olkoon $x \ge 0$ kiinteä ja

$$G_{U_0}(x) = \mathbb{P}_R(S_{T'} - U_0 \le x).$$

Silloin (F_R on η_1:n kertymäfunktio kunj. jakaumassa)

$$G_{U_0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_R(S_n \le U_0, S_n + \eta_{n+1} \in (U_0, U_0 + x])$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{0-}^{U_0} \mathbb{P}_R(\eta_1 \in (U_0 - y, U_0 - y + x])\, dF_R^{n*}(y).$$

Olkoon $z(U_0) = \mathbb{P}_R(\eta_1 \le U_0 + x) - \mathbb{P}_R(\eta_1 \le U_0)$.
Tällöin

$$G_{U_0}(x) = \int_{0-}^{U_0} z(U_0 - y)\, dU(y), \quad U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_R^{n*}(x).$$

Lemman 2.2 nojalla $Z(U_0) = G_{U_0}(x)$ toteuttaa uusiutumisyhtälön

$$Z(U_0) = z(U_0) + \int_0^{U_0} Z(U_0 - y)\, dF_R(y).$$

Selvästi

$$z(U_0) \le \mathbb{P}_R(\eta_1 \le (n+2)x) - \mathbb{P}_R(\eta_1 \le nx)$$

kun $nx \le U_0 \le (n+1)x$. Koska

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathbb{P}_R(\eta_1 \le (n+2)x) - \mathbb{P}_R(\eta_1 \le nx) \right) \le 2,$$

on z suoraan... [illegible] suoraan integroituva esimerkin 2.1 nojalla.

Uusiutumislauseen nojalla ($\mu_R = \mathbb{E}_R(\eta_1)$)

$$\lim_{U_0\to\infty} G_{U_0}(x) = \mu_R^{-1} \int_0^\infty [\mathbb{P}_R(\eta_1 \le y+x) - \mathbb{P}_R(\eta_1 \le y)]\,dy$$

$$= \mu_R^{-1} \int_0^\infty [\mathbb{P}_R(\eta_1 > y) - \mathbb{P}_R(\eta_1 > y+x)]\,dy$$

$$= \mu_R^{-1} \left[\int_0^x \mathbb{P}_R(\eta_1 > y)\,dy + \int_x^\infty \mathbb{P}_R(\eta_1 > y)\,dy - \int_0^\infty \mathbb{P}_R(\eta_1 > y+x)\,dy \right]$$

$$= \mu_R^{-1} \int_0^x \mathbb{P}_R(\eta_1 > y)\,dy .$$

Nähdään, että $Y_T - U_0$ suppenee jakaumaltaan kohti satunnaismuuttujaa, jonka kertymäfunktio on J,

$$J(x) = \mu_R^{-1} \int_0^x \mathbb{P}_R(\eta_1 > y)\,dy, \quad x \ge 0.$$

Koska kuvaus $x \mapsto e^{-R\bar{x}}\,1(x\ge 0)$ on jatkuva ja rajoitettu alueessa $x \ge 0$, on

$$\lim_{U_0\to\infty} \mathbb{E}_R\left(e^{-R(Y_T-U_0)}\right) = \int_0^\infty e^{-Rx}\,dJ(x).$$

Selvästi raja-arvo on positiivinen ja siis lauseen vakio C.
Nyt

$$\mu_R = \mathbb{E}_R(Y_{\tau_1}) = \mathbb{E}\left(e^{RY_{\tau_1}} Y_{\tau_1}\, 1(\tau_1 < \infty)\right).$$

Osittaisintegroinnilla saadaan

$$\int_0^\infty e^{-Rx}\,d\underline{J(x)}$$

$$= \Big/_0^\infty e^{-Rx} J(x) - \int_0^\infty J(x)\,d(e^{-Rx})$$

$$= R\int_0^\infty J(x) e^{-Rx}\,dx.$$

Edelleen

$$\mu_R \int_0^\infty J(x)\, e^{+Rx}\, dx = \int_0^\infty \left[\mathbb{P}_R(\eta_1 > y) \int_y^\infty e^{-Rx} dx \right] dy$$

$$= \frac{1}{R} \int_0^\infty \mathbb{P}_R(\eta_1 > y)\, e^{-Ry}\, dy$$

$$= -\frac{1}{R^2} \int_0^\infty \mathbb{P}_R(\eta_1 > y)\, d(e^{-Ry})$$

$$= -\frac{1}{R^2} \left[\Big/_0^\infty \mathbb{P}_R(\eta_1 > y)\, e^{-Ry} - \int_0^\infty e^{-Ry}\, d(\mathbb{P}_R(\eta_1 > y)) \right]$$

$$= -\frac{1}{R^2} \left[-1 + \int_0^\infty e^{-Ry}\, d(\mathbb{P}_R(\eta_1 \le y)) \right]$$

$$= -\frac{1}{R^2} \left[-1 + \mathbb{E}_R(e^{-R\eta_1}) \right]$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\tau_1 = \infty)}{R^2}.$$

Siis

$$\int_0^\infty e^{-Rx}\, d J(x) = \frac{\mathbb{P}(\tau_1 = \infty)}{R\, \mu_R}. \quad \square$$

2.3. Jatkuva vararikkotestaus

Edellä vararikko voi tapahtua vain hetkinä 1, 2, ... Perustellumpaa on vaatia vahvemmin, että yhtiön vakavaraisuuden tulee olla aina positiivinen. Lähelle tätä päästään valitsemalla aikayksikkö pieneksi, mutta asiaa voidaan lähestyä myös tarkasti.

Tarkastellaan asiaa Sparre-Andersenin mallissa, joka muodostuu seuraavista osista

1) Vahinkojen summat $Z, Z_1, Z_2, \ldots$

2) Vahinkojen sattumisvälit $V, V_1, V_2, \ldots$

3) Vakuutusmaksuintensiteetti P.

Oletetaan, että jonot $\{Z_n\}$ ja $\{V_n\}$ ovat molemmat i.i.d. ja että $\{Z_n\}$ ja $\{V_n\}$ ovat toisistaan riippumattomia. Olkoon U_0 alkupääoma kuten aiemminkin. Yhtiön hetkeen t mennessä kertynyt tappio $Y^c(t)$ on mallissa

$$Y^c(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Z_k - Pt,$$

missä

$$N(t) = \sup\{m \mid V_1 + \dots + V_m \le t\}.$$

Oletetaan seuraavassa, että $P(Z \ge 0) = 1$ ja $P > 0$.

Vararikkohetki määritellään ehdosta

$$T^c = \begin{cases} \inf\{t \ge 0 \mid Y^c(t) > U_0\} \\ +\infty, & \text{jos } Y^c(t) \le U_0,\ \forall t \ge 0. \end{cases}$$

Olkoon

$$\xi_j = Z_j - PV_j, \quad j = 1, 2, \ldots$$

ja

$$Y_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n .$$

Tällöin $\{Y_n\}$ on satunnaiskulku. Jos

$$T = \inf\{n \mid Y_n > U_0\}$$

ja T^c kuten edellä, niin ilmeisesti

$$\{T^c < \infty\} = \{T < \infty\}.$$

Näin ollen

$$\mathbb{P}(T^c < \infty) \sim C e^{-RU_0}, \quad U_0 \to \infty,$$

missä C ja R ovat Lauseen 2.1 mukaiset liittyen muuttujaan

$$\xi = Z - PV.$$

Erityisesti $R > 0$, jos $\mathbb{E}(\xi) < 0$ eli

$$P > \frac{\mathbb{E}(Z)}{\mathbb{E}(V)}.$$

Esimerkki 2.2. Olkoon Z eksponentiaalisesti jakautunut parametrina δ ja V sellainen, että $\xi = Z - PV$ toteuttaa lauseen 2.1 ehdot. Siis

$$\mathbb{P}(Z > z) = e^{-\delta z}, \quad \forall z \geq 0.$$

Määrätään lauseen 2.1 vakio C.

Ilmeisesti

$$\mathbb{P}(T(0) < \infty) = \mathbb{E}_R\left(e^{-R Y_{T(0)}} \mathbb{1}(T(0) < \infty)\right).$$

Selvää on, että $\mathbb{P}_R(T(0) < \infty) = 1$. Osoitetaan, että $Y_{T(0)}$ on eksponentiaalisesti jakautunut parametrina $\delta - R$, kun ξ:llä on konjugaattijakauma parametrina R. Selvästi

$$\mathbb{E}_R(e^{s\xi}) = \frac{\mathbb{E}(e^{(s+R)\xi})}{\mathbb{E}(e^{R\xi})}$$

$$= \frac{\mathbb{E}(e^{(s+R)Z})}{\mathbb{E}(e^{RZ})} \cdot \frac{\mathbb{E}(e^{-(s+R)PV})}{\mathbb{E}(e^{-RPV})}.$$

Nähdään, että konjugaattijakauman alaisuudessa ξ on muotoa

$$\xi = Z' - PV',$$

missä $Z' \perp\!\!\!\perp V'$, Z':lla on Z:n konjugaattijakauma parametrilla R ja V':lla on V:n konjugaattijakauma parametrilla $-PR$. Siis Z' on eksponenttijakautunut parametrina $\delta - R$.

Nyt kaikilla $y \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}_R(Y_{T(0)} > y,\ T(0) = n)$$

$$= \mathbb{P}_R((\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in B_n,\ \xi_n > y - (\xi_1 + \dots + \xi_{n-1})),$$

missä

$$B_n = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1};\ x_1 \leq 0,\ x_1 + x_2 \leq 0, \dots,\ x_1 + \dots + x_{n-1} \leq 0\}.$$

Olkoon $H(x) = \mathbb{P}_R(\xi \leq x)$ ja $K(x) = \mathbb{P}_{-R\rho}(V \leq x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\mathbb{P}_R(Y_{T(0)} > y,\ T(0) = n)$$

$$= \int_{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in B_n} \int_{v \in \mathbb{R}} e^{-(\delta - R)(y + \rho v - x_1 - \dots - x_{n-1})}\, dH(x_1) \cdots dH(x_{n-1})\, dK(v)$$

$$= e^{-(\delta - R)y}\ \mathbb{P}_R(T(0) = n).$$

Siis $\mathbb{P}_R(Y_{T(0)} > y) = e^{-(\delta - R)y}$ ja

$$\mathbb{P}(T(0) < \infty) = \frac{\delta - R}{\delta}.$$

Lisäksi

$$\mathbb{E}(Y_{T(0)}\, e^{R Y_{T(0)}}\, 1(T(0) < \infty))$$

$$= \mathbb{E}_R(Y_{T(0)}\, 1(T(0) < \infty)) = \frac{1}{\delta - R}$$

ja

$$C = \frac{\delta - R}{\delta}.$$

Itse asiassa tässä tapauksessa

$$\mathbb{P}(T(U_0)<\infty) = C_1 e^{-RU_0}, \quad \forall U_0 > 0.$$

Tämä nähdään esityksestä (2.9) toteamalla, että myös $Y_{T(U_0)} - U_0$ on eksponenttijakautunut parametrilla $\beta - R$. Edellä esitetty laskelma menee läpi pienin muutoksin. Siispä

$$\mathbb{P}(T(U_0)<\infty) = e^{-RU_0} \int_0^\infty e^{-Rx}(\beta-R)e^{-(\beta-R)x}\,dx$$

$$= \frac{\beta-R}{\beta} e^{-RU_0} = C_1 e^{-RU_0}.$$