RISKITEORIAN JATKOKURSSI, KEVÄT 2016

Helsingin yliopisto
Harri Nyrhinen

1. Johdanto

Vakuutusyhtiön vakavaraisuus on ehkä eniten tutkittu kysymys riskiteoriassa. Tutkimus jatkuu edelleen vilkkaana. Kurssin tarkoitus on laajentaa riskiteorian peruskurssia tältä osin. Klassisen teorian laajennuksena esitetään ns. Cramér-Lundbergin approksimaatio äärettömän aikajänteen vararikkotodennäköisyydelle. Tuoreempana kehityssuuntina tarkastellaan paksuhäntäisiin jakaumiin liittyvää teoriaa sekä malleja, joissa sijoitustoiminta otetaan huomioon. Lisäksi tarkastellaan osasummiin liittyvien suurten poikkeamien asymptotiikkaa.

2. Cramér – Lundbergin approksimaatio

Olkoot $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia ja

$$Y_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n.$$

Olkoon $U_0 > 0$ alkupääoma ja

$$T = T(U_0) = \inf\{n \mid Y_n > U_0\}$$

($T = \infty$, jos $Y_n \le U_0, \forall n$). Siis Y_n kuvaa yhtiön kumulatiivista tappiota.

Olkoon c muuttujan ξ kumulantit generoiva funktio,

$$c(s) = \log \mathbb{E}(e^{s\xi}), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Merkitään

$$D = \{s \in \mathbb{R} \mid c(s) < \infty\}.$$

Olkoon R Lundbergin eksponentti,

$$R = \sup\{s \ge 0 \mid c(s) \le 0\}.$$

Muuttujan ξ jakauma on <u>aritmeettinen</u>, jos on olemassa sellainen $a \in \mathbb{R}$, että

(2.1) $$\mathbb{P}(\xi \in \{ka \mid k \in \mathbb{Z}\}) = 1.$$

Aritmeettisen jakauman <u>jänne</u> on maksimaalinen a, jolle (2.1) pätee.

<u>Lause 2.1.</u> (Cramér–Lundbergin approksimaatio). Oletetaan, että R on joukon $D \cap (0,\infty)$ sisäpiste. Jos ξ:n jakauma ei ole aritmeettinen, niin

$$(2.2) \qquad \lim_{u_0 \to \infty} e^{R u_0}\, \mathbb{P}(T(u_0) < \infty) = C$$

missä

$$C = \frac{\mathbb{P}(T(0) = \infty)}{R\, \mathbb{E}\left(Y_{T(0)} e^{R Y_{T(0)}} \mathbf{1}(T(0) < \infty)\right)}.$$

Selvästi C lauseessa 2.1 on positiivinen. Tuloksesta seuraa

$$(2.3) \qquad \lim_{u_0 \to \infty} u_0^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty) = -R.$$

Tulos (2.2) on tätä vahvempi.

Aritmeettisen jakauman tapauksessa pätee vastaava tulos. Rajankäynti (2.2):ssa on suoritettava kuitenkin jänteen monikertoina ja vakiolla C on erilainen esitys.