Reaalianalyysi I, kevät 2016
Hytönen / Tapiola
6. laskuharjoitukset (käsitellään pe 29.4.)

Osa tehtävistä pohjustaa kurssin loppuosassa tutkittavia *rajoitetusti heilahtelevien* ja *absoluttiisesti jatkuvien* funktioiden käsitteitä; katso monisteen määritelmät 3.56 ja 3.70.

1. Tarkista, että lauseen 3.43 todistuksessa määritellyt välit $J_k = [u_k, v_k]$ ja $I_j = [y_j, z_j]$ toteuttavat todistuksen 5:nneksi viimeisellä rivillä tarvittavan inkluusion
$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}}]f(u_k), f(v_k)[\subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}}]f(y_j), f(z_j)[.$$
(Vihje: Tämä ei loppujen lopuksi ole kovin hankala, vaatii lähinnä huolellisen kertauksen, miten eri välit todistuksessa määriteltiin.)

2. (Esimerkki 3.57/2) Määritellään funktio $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ kaavalla $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, kun $x > 0$, ja $f(0) = 0$. Osoita, että f on jatkuva, mutta ei rajoitetusti heilahteleva.

3. Olkoon $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Osoita, että melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ pätee jompi kumpi seuraavista vaihtoehdoista:
   (a) On olemassa säde $r > 0$, jolla $f = 0$ melkein kaikkialla kuulassa $B(x, r)$, tai
   (b) pätee raja-arvo
$$\lim_{r\to 0} \frac{\left|\int_{B(x,r)} f(y)\,\mathrm{d}y\right|}{\int_{B(x,r)} |f(y)|\,\mathrm{d}y} = 1.$$

4. Tutustu monisteen lauseeseen 3.62, jonka mukaan $V_F(a, b) = \|f\|_1$, kun $F = \int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y$. (Merkintä V_F on määritelmästä 3.56). Monisteessa on yhtälön suunta "$\geq$" todistettu arvioimalla ensin f:ää jatkuvalla funktiolla L^1-normissa.

   Anna nyt suora todistus käyttämättä jatkuvia funktioita. Vihje: Olkoon $E \subset [a, b]$ niiden pisteiden x joukko, joissa edellisen tehtävän johtopäätös on voimassa. Totea, että sellaiset välit I, joissa $\int_I |f| \leq (1 + \varepsilon)|\int_I f|$, muodostavat E:n Vitalin peitteen.

5. (Lause 3.73/2) Osoita että absoluuttisesti jatkuva funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on rajoitetusti heilahteleva.

6. (vrt. lisätietoja sivulla 61) Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ absoluuttisesti jatkuva ja kasvava[1] funktio. Osoita, että tällöin f kuvaa nollamittaiset joukot nollamittaisiksi, ts.
$$E \subset [a, b],\ m(E) = 0 \ \Rightarrow\ m(f(E)) = m(\{f(x) : x \in E\}) = 0.$$
   Vihje: Kirjoita nollamittaisuus välipeitteiden avulla, ja huomaa, että numeroituvan sarjan arvioimiseksi riittää arvioida tasaisesti sen kaikkia äärellisiä osasummia. Huomaa, että absoluuttisen jatkuvuuden määritelmässä puhutaan erillisistä väleistä, mutta äärellinen määrä mahdollisesti päällekkäisiä välejä voidaan aina pilkkoa äärellisen moneksi erilliseksi väliksi.

[1] Todistettava väite pätee myös ilman kasvavuusoletusta (vrt. moniste), mutta tässä saat olettaa kasvavuuden tarkastelun helpottamiseksi.