Reaalianalyysi I, kevät 2016
Hytönen / Tapiola
5. laskuharjoitukset (käsitellään pe 22.4.)

1. Osoita, että peruspeitelauseessa 3.3 voidaan vakio 5 korvata millä tahansa $3+\varepsilon$, missä $\varepsilon > 0$. Vihje: Korvaa $\mathcal{F}_j$:n määritelmässä luku 2 luvulla $1+\varepsilon$ ja tutki, kuinka tämä vaikuttaa todistuksen lopputulemaan.

2. Todista Lebesguen integraalille muuttujanvaihtokaava
$$\int_{\mathbb{R}^n} a^n f(ax)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x,$$
kun $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ja $a \in (0,\infty)$. Vihje: Etene vaiheittain: $f = \chi_E$, f yksinkertainen, f yleinen. Tapaus χ_E palautuu mitan määritelmään ja suorakulmioiden geometrisen mitan skaalautuvuuteen.

3. Monisteen sivulla 38 on määritelty maksimaalifunktiot Mf ja $\tilde{M}f$. Todista:
   (a) $\tilde{M}f(x) \leq Mf(x) \leq 2^n \tilde{M}f(x)$.
   (b) Myös $\tilde{M}f$ on mitallinen funktio. (Vihje: Samaan tapaan kuin Mf:n tapaus lemmassa 3.19, mutta nyt todistettava väite on ehkä hiukan hankalampi. Saatat tarvita esim. havaintoa, että mitta $m(B(x,r))$ on jatkuva r:n funktio.)

4. Todista lemma 3.15: Jos $f : X \to [0,\infty]$ on mitallinen ja $p \in (0,\infty)$, niin
$$\int_X f^p\,\mathrm{d}\mu = p\int_0^\infty t^{p-1}\mu(\{x : f(x) > t\})\,\mathrm{d}t. \qquad (*)$$
Monisteessa on annettu vihjeitä. (Lisäksi menneen talven Mitta ja integraali -kurssilla on ollut harjoituksena tapaus $p=1$ ja koetehtävänä tapaus $p=2$.)

5. Kaikilla $p \in (0,\infty)$, määritellään "heikko L^p-normi" (joskaan se ei ole edes seminormi)
$$\|f\|_{L^{p,\infty}(\mu)} := \sup_{t>0} t \cdot \mu(\{x : |f(x)| > t\})^{1/p}.$$
Olkoon $L^{p,\infty} := \{f \text{ mitallinen} : \|f\|_{L^{p,\infty}} < \infty\}$. Todista:
   (a) Aina pätee $\|f\|_{L^{p,\infty}} \leq \|f\|_{L^p}$, mutta voi olla $\|f\|_{L^{p,\infty}} < \infty$ vaikka $\|f\|_{L^p} = \infty$. (Vihje: Tutki $\mathbb{R}^n$:n funktioita $|x|^{-\alpha}$.)
   (b) Jos $0 < a < b < \infty$ ja $f \in L^{a,\infty} \cap L^{b,\infty}$, niin $f \in L^p$ kaikilla $p \in (a,b)$. (Esim. kaavasta $(*)$ voi olla iloa.)

6. Todista lause 3.25: Jos $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ja $p \in (1,\infty)$, niin $Mf \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ja lisäksi $\|Mf\|_p \leq c(n,p)\|f\|_p$. Vihje: Sovella kaavaa $(*)$ funktioon Mf. Integrandin arvioimiseksi tee kullakin t jako $f = g_t + h_t$, missä $h_t = \chi_{\{|f| \leq t/2\}} f$. Käytä M:n sublineaarisuutta ja hankkiudu h_t:stä eroon havaitsemalla, että $Mh_t \leq t/2$. Funktion g_t käsittelemiseksi sovella Hardyn ja Littlewoodin lausetta 3.22, kirjoita siinä esiintyvä L^1-normi auki integraalina ja käytä viimein Fubinin lausetta näin syntyvään kahden muuttujan (x,t) integraaliin.[1]

[1] Lisätieto: Saman tapaisella päättelyllä todistetaan yleisempi *Marcinkiewiczin interpolointilause*: Jos T on sublineaarinen operaattori, joka kuvaa $L^1 \to L^{1,\infty}$ ja $L^\infty \to L^\infty$ (kuten maksimaalioperaattori M tekee), niin se kuvaa $L^p \to L^p$ kaikilla $p \in (1,\infty)$. Yleisemmin, jos $T : L^a \to L^{a,\infty}$ ja $T : L^b \to L^{b,\infty}$, missä $0 < a < b \leq \infty$, niin $T : L^p \to L^p$ kaikilla $p \in (a,b)$. Tässä $L^{\infty,\infty} := L^\infty$.