Reaalianalyysi I, kevät 2016
Hytönen / Tapiola
4. laskuharjoitukset (käsitellään pe 15.4.)

1. (Monisteen huomautus 2.15(3)) Osoita, että Lusinin lauseessa 2.14 voidaan oletus $m(A) < \infty$ jättää pois, jos samalla johtopäätös "$\exists$ kompakti $F \subset A$ s.e. ..." lievennetään muotoon "$\exists$ suljettu $F \subset A$ s.e. ..." . (Vihje: Jäljittele monisteen todistusta. Oleellinen kohta on havaita, että funktio $\sum_{i=1}^k a_i \chi_{F_i}$ on jatkuva yhdisteellä $\bigcup_{i=1}^k F_i$, kunhan joukot F_i ovat *suljettuja* ja erillisiä. Todista tämä jatkuvuuden määritelmästä.)

2. (Tämä ja seuraava tehtävä liittyvät konvoluutiolauseen 2.17 todistuksessa olleisiin tarkasteluihin.) Jos $E \subset \mathbb{R}^n$, merkitään

$$\tilde{E} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : x - y \in E\}.$$

Todista:

(a) Jos $E \in \operatorname{Bor} \mathbb{R}^n$, niin $\tilde{E} \in \operatorname{Bor} \mathbb{R}^{2n}$.

(b) Jos lisäksi $m_n(E) = 0$, niin $m_{2n}(\tilde{E}) = 0$. (Käytä Fubinia funktioon $\chi_{\tilde{E}}$.)

3. (Jatkoa edelliselle tehtävälle, samat merkinnät.) Todista:

(a) Jos $E \in \operatorname{Leb} \mathbb{R}^n$, niin $\tilde{E} \in \operatorname{Leb} \mathbb{R}^{2n}$. (Vihje: $E \in \operatorname{Leb} \mathbb{R}^n$ jos ja vain jos on olemassa $F, G \in \operatorname{Bor} \mathbb{R}^n$, joilla $F \subset E \subset G$ ja $m_n(G \setminus F) = 0$. Hyödynnä edellistä tehtävää.)

(b) Jos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on mitallinen, niin $(x, y) \mapsto f(x - y)$ on mitallinen $\mathbb{R}^{2n}$:llä. (Mitallisuuden määritelmä ja edellinen kohta.)

4. Olkoon $f(x, y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to [0, \infty]$ mitallinen ja $p \in [1, \infty)$. Todista *Minkowskin integraaliepäyhtälö*

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^n} \Big[\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) \, \mathrm{d}y \Big]^p \mathrm{d}x \Big)^{1/p} \le \int_{\mathbb{R}^m} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y)^p \, \mathrm{d}x \Big)^{1/p} \mathrm{d}y.$$

Vihje: Jäljittele monisteessa olevaa Minkowskin epäyhtälön todistusta ja osoita, että $VP^p \le OP \cdot VP^{p-1}$, missä VP = vasen puoli, OP = oikea puoli. Tästä väite seuraa, jos $VP < \infty$, mikä pätee (perustele, miksi) esim. jos f ensin korvataan funktiolla

$$f_k(x, y) := \min(f(x, y), k) \cdot \chi_{B(0,k)}(x) \chi_{B(0,k)}(y).$$

Merkitse $F(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) \, \mathrm{d}y$ ja sovella Fubinia funktioon $F(x)^{p-1} f(x, y)$ ja sen jälkeen Hölderiä sopivan muuttujan suhteen. Suhde monisteen todistukseen selviää parhaiten, jos kirjoitat siellä olevan kahden funktion summan muodossa $\sum_{y=1}^2$ ja ajattelet tätä summaa ja yllä olevaa y-integraalia analogisina.

5. Avaruus L^p ja lauseke $\|f\|_p$ voidaan määritellä samalla tavalla silloinkin, kun $p \in (0, 1)$. Osoita, että L^p on näilläkin eksponenteilla vektoriavaruus, ts. L^p-funktioiden lineaarikombinaatiot kuuluvat samaan avaruuteen, mutta $\| \, \|_p$ ei ole edes seminormi, eli voi olla $\|f + g\|_p > \|f\|_p + \|g\|_p$. (Vihje: Vastaesimerkin ei tarvitse olla kovin monimutkainen.)

6. Olkoon $E \in \operatorname{Leb} \mathbb{R}^n$ ja $m(E) < \infty$. Olkoon $p \in [1, \infty)$ ja $\varepsilon > 0$. Osoita, että on olemassa funktio $\phi \in C_0(\mathbb{R}^n)$, jolla pätee $\|\chi_E - \phi\|_p < \varepsilon$. (Vihje: Valitse apujoukot $F \subset E \subset G$ kuten lemmassa 2.12. Osoita, että

$$\delta := \operatorname{dist}(F, G^c) := \inf\{|x - y| : x \in F, y \in G^c\} > 0.$$

Tarkastele funktiota $\phi(x) := (1 - \operatorname{dist}(x, F)/\delta)_+$, missä $\operatorname{dist}(x, F) = \inf\{|x - z| : z \in F\}$ ja $z_+ := \max(z, 0)$.)