Reaalianalyysi I, kevät 2016
Hytönen / Tapiola
3. laskuharjoitukset (käsitellään pe 8.4.)

Osa tehtävistä kertaa L^p-avaruuksien peruskäsitteitä seuraavan yleistyksen avulla:

Funktiota $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ kutsutaan *Youngin funktioksi*, jos ϕ on jatkuva, kasvava, konveksi, ja $\phi(0) = 0$. Konveksisuus tarkoittaa, että

$$\phi(tx + (1-t)y) \leq t\phi(x) + (1-t)\phi(y)$$

kaikilla $x, y \in [0,\infty)$ ja $t \in [0,1]$.

Olkoon ϕ Youngin funktio. Määritellään avaruus

$$L_\phi = L_\phi(X, \Gamma, \mu) := \Big\{ f : X \to \mathbb{R} \text{ mitallinen} : \exists \lambda \in (0,\infty) : \int_X \phi\Big(\frac{|f|}{\lambda}\Big)\,\mathrm{d}\mu < \infty \Big\}.$$

1. Osoita, että jos $f \in L_\phi$, niin on olemassa sellainen $\lambda \in (0,\infty)$, että $\int_X \phi\Big(\frac{|f|}{\lambda}\Big)\,\mathrm{d}\mu \leq 1$. (Vihje: Mitä tapahtuu, kun $\lambda \to \infty$? Muista suppenemislauseet.)

2. Määritellään
$$\|f\|_{L_\phi} := \inf\Big\{\lambda \in (0,\infty) : \int_X \phi\Big(\frac{|f|}{\lambda}\Big)\,\mathrm{d}\mu \leq 1\Big\}.$$
Osoita, että $\| \ \|_{L_\phi}$ on avaruuden L_ϕ seminormi, ts. toteuttaa
$$\|f\|_{L_\phi} \in [0,\infty), \qquad \|\alpha f\|_{L_\phi} = |\alpha|\|f\|_{L_\phi}, \qquad \|f+g\|_{L_\phi} \leq \|f\|_{L_\phi} + \|g\|_{L_\phi}$$
kaikilla $f, g \in L_\phi$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$. (Vihje: $\frac{|f+g|}{\lambda+\nu} \leq \frac{\lambda}{\lambda+\nu}\frac{|f|}{\lambda} + \frac{\nu}{\lambda+\nu}\frac{|g|}{\nu}$.)

3. Oletetaan lisäksi, että ϕ ei ole identtisesti nolla. Osoita, että tällöin $\|f\|_{L_\phi} = 0$ jos ja vain jos $f = 0$ melkein kaikkialla. (Vihje: Osoita, ensin että $\phi(t) \to \infty$ kun $t \to \infty$.)

4. Lukuja $p, q \in [1,\infty]$ sanotaan toistensa konjugaattieksponenteiksi, jos $1/p + 1/q = 1$, missä $1/\infty := 0$. Tällöin merkitään $q = p'$. Olkoon $f \in L^p$, $p \in [1,\infty)$. Osoita, että on olemassa sellainen funktio $g \in L^{p'}$, että $\|g\|_{p'} = 1$ ja $\|f\|_p = \int_X fg\,\mathrm{d}\mu$. (Vihje: Kirjoita $|f|^p = fh$ ja tutki funktion h normia avaruudessa $L^{p'}$. Kerro h:ta sopivalla vakiolla lopullisen funktion g löytämiseksi. Tapaus $p = 1$ vaatinee erillisen tarkastelun.)

5. Olkoon taas $p \in [1,\infty)$. Osoita, että yksinkertaiset funktiot ovat *tiheässä* avaruudessa L^p, ts. annetulla $f \in L^p$ ja $\varepsilon > 0$ on olemassa yksinkertainen funktio s, jolla $\|f - s\|_p < \varepsilon$. (Vihje: Palauta mieleen, että mitallista funktiota $f : X \to [0,\infty]$ kohti löytyy kasvava jono yksinkertaisia $s_n : X \to [0,\infty)$, jotka lähestyvät f:ää pisteittäin. Sovella tätä esim. erikseen f:n positiiviseen ja negatiiviseen osaaan ja käytä sopivaa suppenemislausetta.)

6. Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus, jossa $\mu(X) < \infty$. Olkoon $f \in L^\infty$. Osoita, että $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$, kun $p \to \infty$. (Vihje: Osoita, että $\limsup_{p\to\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$ ja $\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty - \varepsilon$ kaikilla $\varepsilon > 0$.)