Reaalianalyysi I, kevät 2016
Hytönen / Tapiola
2. laskuharjoitukset (käsitellään pe 1.4.)

Ensimmäiset kaksi tehtävää liittyvät luennoilla jo käsiteltyyn asiaan; loput pohjustavat seuraavaksi tulevaa L^p-avaruuksien teoriaa.

1. Olkoon $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_j \supset I_{j+1} \supset \ldots$ vähenevä jono suljettuja välejä $I_j \subset \mathbb{R}$, joiden pituus $|I_j| \to 0$. Luennolla perusteltiin kompaktisuustarkastelulla, että $\bigcap_{j=1}^{\infty} I_j \neq \varnothing$. Täydennä seuraava vaihtoehtoinen todistus: valitse $x_j \in I_j$ kaikilla j, ja osoita, että tällä jonolla on raja-arvo, joka kuuluu mainittuun leikkausjoukkoon.

2. Olkoon ϕ Borelin funktio ja f (Lebesguen-)mitallinen funktio. Osoita, että yhdistetyistä funktioista $\phi \circ f$ ja $f \circ \phi$ vain toinen on aina mitallinen (kunhan määrittely- ja arvojoukot ovat sellaiset, että yhdiste on mielekäs), ts. todista toisen mitallisuus ja anna vastaesimerkki toiselle. (Vihje vastaesimerkille: Tutki tilannetta, jossa toisen funktion arvojoukko ja toisen määrittelyjoukko on nollamittainen.)

3. (vrt. moniste 1.28) Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus ja $f : X \to \dot{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ mitallinen. Tarkastellaan joukkoa

$$S := \Big\{\alpha \in [0, \infty) : \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) = 0\Big\}.$$

Osoita, että S on joko tyhjä joukko $\varnothing$ tai suljettu puolisuora $[\alpha_0, \infty)$.

4. Youngin epäyhtälön mukaan kaikilla reaaliluvuilla $a, b \geq 0$ ja $\alpha, \beta > 0$, joilla $\alpha + \beta = 1$, pätee

$$a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b.$$

Monisteessa (Lemma 1.34) tämä on todistettu konveksisuustarkastelulla. Anna vaihtoehtoinen todistus "lukioanalyysillä". (Siirrä kaikki termit samalle puolelle, tarkastele lauseketta esim. a:n funktiona ja derivoi.)

5. Tarkastellaan jonoavaruuksia

$$\ell^p = \Big\{x = (x_k)_{k=1}^{\infty} : x_k \in \mathbb{R} : \|x\|_p = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\Big)^{1/p} < \infty\Big\},$$

missä $p \in [1, \infty)$. Olkoon $1 \leq p < q < \infty$. Osoita, että $\ell^p \subset \ell^q$ ja $\|x\|_q \leq \|x\|_p$.

Vihje: Perustele ensin, että yleinen tapaus seuraa tapauksesta $\|x\|_p = 1$. Havaitse, että jokainen komponentti toteuttaa $|x_k| \leq 1$ ja mieti, miten ykköstä pienempien lukujen potenssit käyttäytyvät.

6. (Moniste 1.33) Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus, jolla $\mu(X) < \infty$. Olkoon $1 \leq p < q < \infty$. Osoita, että $L^q(X) \subset L^p(X)$ (päinvastainen suunta, kuin edellisessä tehtävässä!).

Huom: Edellisissä harjoituksissa havaittiin, että avaruudet $L^p(\mathbb{R})$ ja $L^q(\mathbb{R})$ eivät sisälly toisiinsa kumpaankaan suuntaan, kun $p \neq q$. Kaksi viimeistä tehtävää antavat tärkeimmät esimerkit mitta-avaruuksista, joissa jompikumpi sisältyminen on voimassa.