Reaalianalyysi I, kevät 2016
Hytönen / Tapiola
1. laskuharjoitukset (käsitellään pe 18.3.)

Harjoitukset lähinnä kertaavat kurssin esitietoja (ennen kaikkea Mitta ja integraali -kurssia), mutta samalla johdattavat monisteen 1. luvun teemoihin, joten sen silmäilystä voi paikoin olla apua.

1. Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus, ts. X on perusjoukko eli "koko avaruus", Γ on mitallisten joukkojen σ-algebra, ja $\mu \colon \Gamma \to [0, \infty]$ on mitta.
   (a) Olkoon $f \colon X \to \dot{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ funktio, joka toteuttaa ehdon
   $$f^{-1}(a, \infty] := \{x \in X \colon f(x) \in (a, \infty]\} \in \Gamma \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$
   (Muistutus: Tällaista funktiota sanotaan *mitalliseksi*.) Osoita, että tällöin myös joukot $f^{-1}(\infty) := \{x \in X \colon f(x) = \infty\}$ ja $f^{-1}(-\infty)$ kuuluvat Γ:an.
   (b) Mitta-avaruutta (X, Γ, μ) sanotaan *σ-äärelliseksi*, jos on olemassa jono joukkoja $S_n \in \Gamma$, siten että $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ ja $\mu(S_n) < \infty$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$. Osoita, että kyseiset joukot S_n voidaan valita erillisiksi, ts. jos on olemassa jotkut joukot S_n, niin on olemassa myös erilliset joukos S'_n, jotka toteuttavat muuten samat ehdot.

2. Mittaa μ vastaava ulkomitta on $\mu^* \colon \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$, joka määritellään
   $$\mu^*(A) := \inf\{\mu(E) \colon E \in \Gamma, A \subset E\}.$$
   Ulkomitan μ^* mitallisten joukkojen luokka on
   $$\mathscr{M}_{\mu^*} := \{F \in \mathscr{P}(X) \colon \mu^*(A) \overset{(\star)}{=} \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap F^c) \;\; \forall A \in \mathscr{P}(X)\},$$
   missä $(\star)$ of ns. Carathéodoryn ehto.
   Osoita:
   (a) Ulkomitan määritelmässä esiintymä infimum saavutetaan miniminä. (Tarkastele jonoa, joka lähestyy infimumia, ja näiden joukkojen leikkausta.)
   (b) Jos $F \in \mathscr{M}_{\mu^*}$ ja $S \in \Gamma$ on äärellismittainen (ts. $\mu(S) < \infty$), niin on olemassa joukot $G, H \in \Gamma$, joilla
   $$G \subset S \cap F \subset H \subset S, \qquad \mu(G) = \mu(H) = \mu^*(S \cap F).$$
   (Vihje: Sovella a-kohtaa joukkoihin $S \cap F$ ja $S \cap F^c$.)
   (c) Jos $F \in \mathscr{M}_{\mu^*}$ ja (X, Γ, μ) on σ-äärellinen, niin on olemassa joukot $G, H \in \Gamma$, joilla
   $$G \subset F \subset H, \quad \mu(H \setminus G) = 0.$$
   (Vihje: Sovella b-kohtaa σ-äärellisyyden määritelmässä esiintyviin joukkoihin S_n.)

3. Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus ja $p \in [1, \infty)$. Määritellään funktioluokka
   $$L^p(X) := \left\{ f \colon X \to \dot{\mathbb{R}} \colon f \text{ mitallinen}, \int_X |f|^p \, d\mu < \infty \right\}.$$
   Olkoon $q \in (p, \infty)$. Tutki funktioita $x \mapsto \chi_{(0,1)}(x) \cdot x^{-\alpha}$ ja $x \mapsto x_{(1,\infty)}(x) \cdot x^{-\beta}$, ja anna esimerkki sellaisista funktioista f ja g, että
   (a) $f \in L^p(\mathbb{R}) \setminus L^q(\mathbb{R})$ ja
   (b) $g \in L^q(\mathbb{R}) \setminus L^p(\mathbb{R})$.

4. Olkoon $p \in (1, \infty)$. Anna vielä esimerkki sellaisista funktioista f ja g, että

   (a) $f \in L^p(\mathbb{R}) \setminus \bigcup_{\varepsilon>0} L^{p+\varepsilon}(\mathbb{R})$ ja

   (b) $g \in L^p(\mathbb{R}) \setminus \bigcup_{\varepsilon>0} L^{p-\varepsilon}(\mathbb{R})$.

   (Vihje: tutki edellisen tehtävän esimerkkejä kerrottuna sopivalla tekijällä $|\log x|^{\gamma}$.)

   (Huomaa ero edelliseen tehtävään: Siinä tutkittiin kahta kiinteää eksponenttia p ja q ja funktioiden kuulumista luokkiin L^p ja L^q, mutta ei otettu mitään kantaa siihen, kuuluvatko kyseiset funktiot joihinkin muihin luokkiin L^r, esim. arvolla $r = (p+q)/2$. Nyt sen sijaan ehtona on ääretön joukko luokkia L^r, joihin funktiot eivät saa kuulua.)

5. Olkoon $p := (p_1, p_2, \ldots)$ jono reaalilukuja, $p_i \in (0,1)$, ja tutkitaan ns. Cantorin joukkoa $E = E(p)$, joka muodostetaan seuraavasti: (vrt. Holopaisen monisteen kohta 1.16)

   - 1. askel: Aloitetaan suljetusta yksikkövälistä $I := [0,1]$, ja poistetaan sen keskeltä avoin väli, jonka pituus on $p_1|I|$. Jäljelle jää kahden suljetun välin erillinen yhdiste $E_1 \subset I$.
   - n:s askel: Jos $(n-1)$:n askeleen jälkeen jäljellä on joukko E_{n-1}, joka on eräiden suljettujen välien $J_{n-1,k}$ erillinen yhdiste, niin poistetaan jokaisen $J_{n-1,k}$ keskeltä avoin väli, jonka pituus on $p_n|J_{n-1,k}|$. Näden poistojen jälkeen jäljelle jäävä joukko on $E_n \subset E_{n-1}$, ja se on jälleen eräiden suljettujen välien erillinen yhdiste.
   - Kun tämä on tehty kaikilla $n = 1, 2, \ldots$, muodostetaan lopuksi joukko $E := \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$.

   Todista:

   (a) Joukko $E(p)$ on Legesguen-mitallinen.

   (b) Jos $p = (p_i)_{i=1}^{\infty}$ on vakiojono (ts. $p_1 = p_2 = \ldots$), niin $m(E(p)) = 0$.

   (c) Jos mikä tahansa $\alpha \in [0,1)$ on annettu, niin jono $p = (p_i)_{i=1}^{\infty}$ voidaan valita siten, että $m(E(p)) = \alpha$. (Vihje: Monisteen kohta 1.17)

6. Tarkastellaan ns. Cantorin $\frac{1}{3}$-joukkoa $E(\frac{1}{3})$, joka vastaan vakiojooa $p_1 = p_2 = \ldots = \frac{1}{3}$ edellä. Osoita, että

$$E(\tfrac{1}{3}) = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^k} : \alpha_k \in \{0,2\}\ \forall k = 1, 2, \ldots \right\},$$

   ts. $E(\frac{1}{3})$ koostuu niistä luvuista $\alpha \in [0,1]$, joilla on pelkästään nollista ja kakkosista koostuva kolmikantainen kehitelmä.