# Reaalianalyysi I [1]

Ilkka Holopainen[2]

May 3, 2012

[1]Perustuvat pääosin luentomonisteisiin Martio: Reaalianalyysi I (1999), Rickman: Reaalianalyysi (1996) ja Tylli: Reaalianalyysi I (2000)

[2]Ilmoita painovirheistä esim. sähköpostitse osoitteeseen `ilkka.holopainen@helsinki.fi`

# 1 $L^p$-avaruudet

## 1.1 Mitta-avaruus

**Määritelmä 1.2.** Olkoon $X$ mikä tahansa joukko ja $\mathcal{P}(X) = \{A \colon A \subset X\}$ $X$:n potenssijoukko. Perhe $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$ on $X$:n *$\sigma$-algebra* ("sigma-alg."), jos

(1) $\emptyset \in \Gamma$;

(2) $A \in \Gamma \;\Rightarrow\; X \setminus A \in \Gamma$; (merk. $A^c = X \setminus A$)

(3) $A_i \in \Gamma,\ i \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Gamma$.

**Määritelmä 1.3.** Olkoon $\Gamma$ $X$:n $\sigma$-algebra. Funktio $\mu \colon \Gamma \to [0, +\infty]$ on (positiivinen) *mitta* $X$:ssä (tai $\sigma$-algebrassa $\Gamma$), jos

(a) $\mu(\emptyset) = 0$;

(b) $A_i \in \Gamma,\ i \in \mathbb{N}$, erillisiä $\Rightarrow\; \mu\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$. "täysadditiivisuus"

Kolmikko $(X, \Gamma, \mu)$ on *mitta-avaruus* (ja $\Gamma$ on $\mu$-mitallisten joukkojen perhe) .

**Esimerkki 1.4.**

1. $X = \mathbb{R}^n$, $\Gamma = \operatorname{Leb} \mathbb{R}^n$ = Lebesgue-mitallisten joukkojen perhe ja $\mu = m_n$ = Lebesguen mitta.
2. $X = \mathbb{R}^n$, $\Gamma = \operatorname{Bor} \mathbb{R}^n$ = Borel-joukkojen perhe ja $\mu = m_n | \operatorname{Bor} \mathbb{R}^n$ = Lebesguen mitan rajoittuma Borel-joukkojen perheeseen. (Muistutus: $\operatorname{Bor} \mathbb{R}^n$ = pienin $\mathbb{R}^n$:n $\sigma$-algebra, joka sisältää ($\mathbb{R}^n$:n) suljetut joukot.)
3. Olkoon $X \neq \emptyset$ mikä tahansa joukko. Kiinnitetään $x \in X$ ja asetetaan kaikilla $A \subset X$
$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in A; \\ 0, & \text{jos } x \notin A. \end{cases}$$
Silloin $\mu \colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ on mitta (ns. *Dirac mitta* alkiossa $x \in X$). Usein merkitään $\mu = \delta_x$.

## 1.5 Täydelliset mitat

Olkoon $(X, \Gamma, \mu)$ mitta-avaruus ja $F \in \Gamma$. Olkoon $P$ $\big(= P(x)\big)$ jokin ominaisuus, joka riippuu pisteestä $x \in X$.

Sanomme: *$P$ pätee $\mu$-m.k. $F$:ssä* (m.k. = melkein kaikkialla), jos $\exists E \in \Gamma$ s.e. $\mu(E) = 0$, $E \subset F$, ja $P$ pätee $F \setminus E$:ssä.

Haluaisimme sanoa tarkemmin: "$P$ pätee lukuunottamatta 0-mittaista joukkoa". Ongelmana on tapaus:

$$\underbrace{\{x \in F \colon P(x) \text{ ei päde}\}}_{=A} \notin \Gamma\,,$$

vaikka $A \subset E$ ja $\mu(E) = 0$. <u>Huom:</u> Yleisen mitan $\mu$ tapauksessa on mahdollista:

$$A \subset E,\ \mu(E) = 0,\ \textit{mutta } A \notin \Gamma$$

(ts. $A$ *ei* ole $\mu$-mitallinen).

**Esimerkki 1.6.** Tarkastellaan mitta-avaruutta $(\mathbb{R}^n, \operatorname{Bor}\mathbb{R}^n, \mu)$, $\mu = m_n|\operatorname{Bor}\mathbb{R}^n$. Silloin $\exists\ B \in \operatorname{Bor}\mathbb{R}^n$, $\mu(B) = 0$, ja $A \subset B$ s.e. $A \notin \operatorname{Bor}\mathbb{R}^n$.

Todistetaan tapaus $n \geq 2$: ($n = 1$ myöhemmin). Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ ei-Lebesgue-mitallinen (ks. [Ho, Lause 1.68][1]) ja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = (x, 0, \dots, 0)\,.$$

Tällöin $f$ jatkuva ja

$$\begin{aligned} m_n^*(fA) &\leq m_n^*\big(\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_i = 0\ \forall i = 2, \dots, n\}\big) = 0 \\ &\Rightarrow\ fA \in \operatorname{Leb}\mathbb{R}^n\,. \end{aligned}$$

<u>Väite:</u> $fA \notin \operatorname{Bor}\mathbb{R}^n$.
<u>VO:</u> $fA$ Borel-joukko. Silloin sen alkukuva $f^{-1}(fA) = A$ on Borel, sillä $f$ on jatkuva [ks. (1.8)]. <u>RR</u>, sillä $A$ ei ole edes Lebesgue-mitallinen.

Olkoon $G \in \operatorname{Bor}\mathbb{R}^n$. Sanomme, että kuvaus $g\colon G \to \mathbb{R}^m$ on *Borel-kuvaus* (lyh. Borel), jos

$$U \subset R^m \text{ avoin } \ \Rightarrow\ g^{-1}U \in \operatorname{Bor}\mathbb{R}^n.$$

Erityisesti, jokainen jatkuva kuvaus $g\colon G \to \mathbb{R}^m$, $G \in \operatorname{Bor}\mathbb{R}^n$, on Borel, koska silloin $g^{-1}U$ on avoin $G$:ssä $\forall$ avoimilla $U \subset \mathbb{R}^m$. Ts. $g^{-1}U = G \cap V$, missä $V \subset \mathbb{R}^n$ on avoin, joten $g^{-1}U \in \operatorname{Bor}\mathbb{R}^n$.

**Lemma 1.7.** (vrt. [Ho, Lause 2.6]) *Olkoon $G \subset \mathbb{R}^n$ Borel-joukko ja $g\colon G \to \mathbb{R}^m$ Borel-kuvaus. Silloin*

$$A \in \operatorname{Bor}\mathbb{R}^m \ \Rightarrow\ g^{-1}A \in \operatorname{Bor}\mathbb{R}^n\,. \tag{1.8}$$

**Tod.** Merkitään $\Gamma = \{V \subset \mathbb{R}^m \colon g^{-1}V \in \operatorname{Bor}\mathbb{R}^n\}$. Silloin $\Gamma$ on $\sigma$-algebra, sillä

(1) $g^{-1}\emptyset = \emptyset \in \operatorname{Bor}\mathbb{R}^n \ \Rightarrow\ \emptyset \in \Gamma$;

(2) $V \in \Gamma \ \Rightarrow\ g^{-1}V^c = \underbrace{G}_{\in \operatorname{Bor}\mathbb{R}^n} \setminus \underbrace{g^{-1}V}_{\in \operatorname{Bor}\mathbb{R}^n} \in \operatorname{Bor}\mathbb{R}^n \Rightarrow\ V^c \in \Gamma$;

(3) $V_i \in \Gamma,\ i \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ g^{-1}\big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_i\big) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \underbrace{g^{-1}V_i}_{\in \operatorname{Bor}\mathbb{R}^n} \in \operatorname{Bor}\mathbb{R}^n. \Rightarrow\ \bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_i \in \Gamma.$

Lisäksi $\Gamma$ sisältää $\mathbb{R}^m$:n avoimet joukot, sillä

$$U \subset \mathbb{R}^m \text{ avoin } \Rightarrow\ g^{-1}U \in \operatorname{Bor}\mathbb{R}^n \ \Rightarrow\ U \in \Gamma\,.$$

Siis $\Gamma \supset \operatorname{Bor}\mathbb{R}^m$ (= pienin $\sigma$-alg., joka sisältää avoimet joukot). □

Esimerkin 1.6 kaltaista tilannetta (ts. $A \subset E$, $\mu(E) = 0$, $A \notin \Gamma$) ei synny, jos $\mu$ on ns. täydellinen mitta.

**Määritelmä 1.9.** Olkoon $(X, \Gamma, \mu)$ mitta-avaruus. Mitta $\mu$ on *täydellinen*, jos

$$E \in \Gamma,\ \mu(E) = 0,\ F \subset E \ \Rightarrow\ F \in \Gamma\,.$$

**Huomautus 1.10.** $\mu$ monotoninen $\ \Rightarrow\ \mu(F) = 0$.
Täydellisyys = "0-mittaisten joukkojen osajoukot ovat mitallisia ja 0-mittaisia".

[1] Mitta ja integraali, 2002.

**Esimerkki 1.11.** 1. $(\mathbb{R}^n, \operatorname{Leb}\mathbb{R}^n, m_n)$, Lebesguen mitta $m_n$ on täydellinen.

2. $(\mathbb{R}^n, \operatorname{Bor}\mathbb{R}^n, \mu)$, $\mu = m_n | \operatorname{Bor}\mathbb{R}^n$ ei ole täydellinen.

Tilanne *ei* aiheuta hankaluuksia, sillä jos mitta $\mu$ ei ole täydellinen, niin siitä voidaan aina tehdä täydellinen:

**Lause 1.12.** *Olkoon $(X, \Gamma, \mu)$ mitta-avaruus. Määritellään $\bar{\Gamma} \subset \mathcal{P}(X)$ asettamalla*

$$\bar{\Gamma} = \{A \cup F \colon A \in \Gamma \textit{ ja } F \subset E \textit{ jollakin } E \in \Gamma,\ \mu(E) = 0\}.$$

*ja määritellään $\bar{\mu} \colon \bar{\Gamma} \to [0, +\infty]$,*

$$\bar{\mu}(A \cup F) = \mu(A),$$

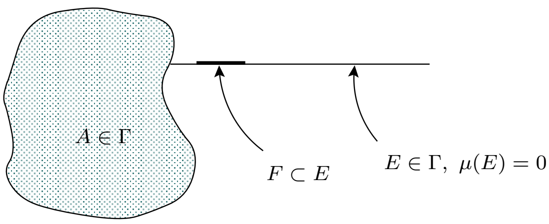
*missä $A$ ja $F$ kuten yllä. Tällöin*

*(1) $\bar{\Gamma}$ on $\sigma$-algebra $X$:ssä;*

*(2) $\bar{\mu}$ on täydellinen mitta;*

*(3) $\mu = \bar{\mu}|\Gamma$.*

*$\bar{\mu}$ on nimeltään $\mu$:n* täydellistymä *(ja vastaavasti $(X, \bar{\Gamma}, \bar{\mu})$ on mitta-avaruuden $(X, \Gamma, \mu)$ täydellistymä).*



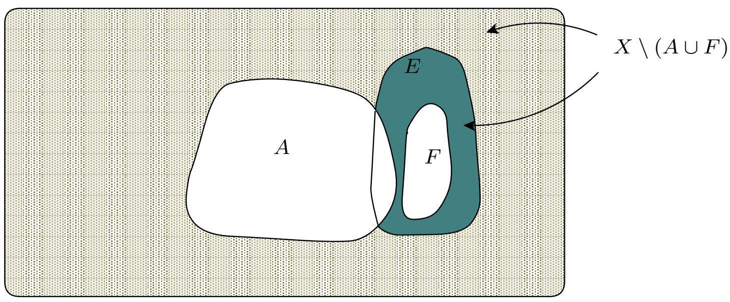

**Tod.** Todistetaan hankalimmat, muut (HT).

$\boxed{(1)}$ (i): $\emptyset \in \bar{\Gamma}$.

(ii): Olkoon $B \in \bar{\Gamma}$, $B = A \cup F$, missä $A \in \Gamma$, $F \subset E \in \Gamma$ ja $\mu(E) = 0$. <u>Väite:</u> $X \setminus B \in \bar{\Gamma}$. <u>Tod:</u> Koska

$$X \setminus B = X \setminus (A \cup F) = \big(\underbrace{X \setminus (A \cup E)}_{\in \Gamma}\big) \cup \big(\underbrace{E \setminus (A \cup F)}_{\subset E}\big)$$

on $X \setminus B$ vaadittua muotoa eli $X \setminus B \in \bar{\Gamma}$.



(iii): Jos $B_i \in \bar{\Gamma}$, $i \in \mathbb{N}$, niin selvästi $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i \in \bar{\Gamma}$ (HT).

$\boxed{(2)}$ (i): $\bar{\mu}$ hyvin määritelty: Olkoon $B = A_1 \cup F_1 = A_2 \cup F_2$, missä $A_i \in \Gamma$, $F_i \subset E_i$, $\mu(E_i) = 0$, $i = 1, 2$. Silloin

$$A_1 \subset A_1 \cup F_1 = A_2 \cup F_2 \subset A_2 \cup E_2$$

$$\Rightarrow \mu(A_1) \leq \mu(A_2) + \underbrace{\mu(E_2)}_{=0} = \mu(A_2)\,.$$

Samoin

$$\mu(A_2) \leq \mu(A_1)\,,$$

joten $\mu(A_1) = \mu(A_2) = \bar{\mu}(B)$.

(ii): $\bar{\mu}$ mitta. (HT)

(iii): $\bar{\mu}$ täydellinen. (HT)

$\boxed{(3)}$ (HT) □

**Esimerkki 1.13.** $(\mathbb{R}^n, \Gamma, \mu)$, $\Gamma = \operatorname{Bor}\mathbb{R}^n$, $\mu = m_n|\operatorname{Bor}\mathbb{R}^n$.
Väite: $\bar{\Gamma} = \operatorname{Leb}\mathbb{R}^n$, $\bar{\mu} = m_n$. (HT)

**Esimerkki 1.14.** Olkoot $f_j\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, *Borel-funktioita*, ts.

$$U \subset \mathbb{R} \text{ avoin } \quad \Rightarrow \quad f_j^{-1}U \in \operatorname{Bor}\mathbb{R}^n\,,$$

$\mu = m|\operatorname{Bor}\mathbb{R}^n$ ja oletetaan, että $f_j \to f$ $\mu$-m.k., ts.

$$\{x \in \mathbb{R}^n\colon f_j(x) \not\to f(x)\} \subset E \in \operatorname{Bor}\mathbb{R}^n\,,\ \mu(E) = 0\,.$$

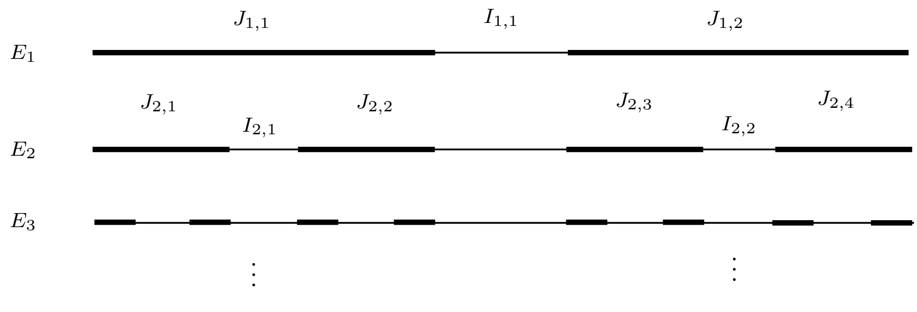
Tällöin *ei* voida päätellä, että $f$ on Borel-funktio. Sen sijaan voidaan päätellä, että $f$ on Lebesgue-mitallinen funktio (ks. [Ho, L. 2.23 ja 2.27]). (Syy: $m$ täydellinen.)

**Huomautus 1.15.** Jos mitta $\mu$ on täydellinen, on mielekästä puhua sellaisten funktioiden mitallisuudesta, jotka ovat määriteltyjä $\mu$-m.k.

## 1.16 Cantorin joukko $\mathbb{R}$:ssä

Olkoon $I = [0, 1]$ ja $p = (p_1, p_2, \ldots)$ jono reaalilukuja $0 < p_i < 1$. Poistetaan $I$:n keskeltä avoin väli $I_{1,1}$, jonka pituus on $p_1$.

$$I = J_{1,1} \cup I_{1,1} \cup J_{1,2}\,, \quad \text{missä } J_{1,1} \text{ ja } J_{1,2} \text{ suljettuja välejä, joiden pituus on } \frac{1-p_1}{2}\,.$$



Poistetaan $J_{1,k}$:n keskeltä avoin väli $I_{2,k}$, jonka pituus $= p_2\ell(J_{1,k}) = \frac{p_2(1-p_1)}{2}$.

Jäljelle jää

$$\begin{aligned} I \setminus (I_{1,1} \cup I_{2,1} \cup I_{2,2}) &= J_{2,1} \cup J_{2,2} \cup J_{2,3} \cup J_{2,4} \\ J_{2,k}\text{:n pituus} &= \frac{1-p_2}{2} \cdot \frac{1-p_1}{2} \quad (< \frac{1}{2^2})\,. \\ J_{2,k}\text{:iden yht.lask. pituus} &= (1-p_1)(1-p_2)\,. \end{aligned}$$

Jatketaan prosessia ...:

Jäljelle jää joukko:

$$E = I \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{j-1}} I_{j,k} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^j} J_{j,k} \quad \text{eli}$$

$$E = \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\,, \quad \text{missä } E_j = \bigcup_{k=1}^{2^j} J_{j,k} \text{ on kompakti}\,.$$

$E = E(p) =$ *jonon $p$ määräämä Cantorin joukko.*

$$\begin{aligned} E_1 \supset E_2 \supset \cdots, \quad m(E_1) < \infty &\overset{[\text{Ho, L. 1.60}]}{\Longrightarrow} \\ m(E) = \lim_{j\to\infty} m(E_j) &= \lim_{j\to\infty} (1-p_1)(1-p_2)\cdots(1-p_j) \\ &= \prod_{j=1}^{\infty} (1-p_j)\,. \end{aligned}$$

Kun $p_j = 1/3\ \forall j$, $E$ on ns. *Cantorin $\frac{1}{3}$-joukko*, jolloin

$$m(E) = \lim_{j\to\infty} (\frac{2}{3})^j = 0.$$

**Huomautus 1.17.** Luvut $p_j$ voidaan valita niin, että $m(E)$ saa minkä tahansa (ennalta annetun) arvon välillä $[0,1[$. (HT) [Ohje: Ota log $m(E)$:n antavasta tulosta, jolloin syntyy päättymätön sarja. Valitse sitten luvut $p_j$ niin, että saat geometrisen sarjan (joiden summat osataan laskea). Tai yksinkertaisemmin: Olkoon $a = m(E) \in ]0,1[$. Valitaan $0 < p_1 < 1$ s.e. $a < 1-p_1 < a+1$, $p_2 \in ]0,1[$ s.e. $a < (1-p_1)(1-p_2) < a+1/2$ jne.]

**Lause 1.18.** *Cantorin joukolle $E = E(p)$ pätee:*

*(a)* *$E$ on kompakti ja $E$ ei sisällä yhtään väliä.*

*(b)* *Jos $E(p)$ ja $E(q)$ ovat jonojen $p$ ja $q$ määräämät Cantorin joukot, niin $\exists$ homeomorfismi $f\colon E(p) \to E(q)$.*

*(c)* *$E$ on ylinumeroituva.*

**Huomautus 1.19.** (i) $E$ on suljettu eikä sisällä yhtään avointa joukkoa $\Rightarrow$ $E$ on *ei missään tiheä*. [Määr. $A \subset \mathbb{R}^n$ on ei missään tiheä, jos int $\bar{A} = \emptyset$.]

(ii) $\exists$ aidosti kasvava jatkuva bijektio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s.e. $f(E_p) = E_q$.

(iii) Muistutus: $f\colon A \to B$ homeomorfismi, jos $f$ on jatkuva bijektio ja $f^{-1}$ myös jatkuva.

**Tod.** (a):

$$\left.\begin{array}{c} E_j \text{ suljettu } \Rightarrow \ E \text{ suljettu.} \\ E \subset I,\ I \text{ kompakti} \end{array}\right\} \Rightarrow \ E \text{ kompakti}$$

Konstruktio $\Rightarrow$ $E$ ei sisällä välejä.

(b): Jos $x \in E$, niin $\exists$ 1-käsitt. jono $J_{1,k_1} \supset J_{2,k_2} \supset \cdots$ s.e.

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} J_{j,k_j} = \{x\}\,.$$

Kääntäen: Jos $J_{1,k_1} \supset J_{2,k_2} \supset \cdots$ on jokin jono, niin

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} J_{j,k_j} \quad \text{on yksiö, ts. sisältää täsmälleen yhden pisteen,}$$

koska $m\big(J_{j,k_j}\big) \xrightarrow{j\to\infty} 0$.

Määritellään $f\colon E(p) \to E(q)$ seuraavasti:

$$\text{jos } \ \{x\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} J_{j,k_j}(p)\,, \quad \text{niin } \ \{f(x)\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} J_{j,k_j}(q)\,.$$

<u>Huom.</u> $x$:ää ja $f(x)$:ää vastaavissa jonoissa *samat* indeksit $j, k_j$.

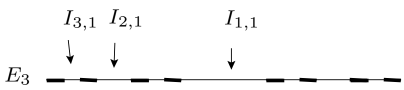
Konstruktio $\Rightarrow$ $f$ bijektio.

Osoitetaan, että $f$ on jatkuva:

Merkitään

$$\delta_j(p) = \min\{m\big(I_{i,k}(p)\big) : i \le j\}\,, \quad \text{jolloin}$$

$$\delta_j(p) \xrightarrow{j\to\infty} 0\,.$$




Jos $x, y \in E(p)$ ja $|x-y| < \delta_j(p)$, niin $x$ ja $y$ kuuluvat samaan väliin $J_{j,k}(p)$, joten

$$\begin{aligned} & f(x), f(y) \in J_{j,k}(q) \quad \text{(samat indeksit)} \\ \Rightarrow\ & |f(x) - f(y)| \le m\big(J_{j,k}(q)\big) < \frac{1}{2^j} \quad \text{(erill. välejä } J_{j,k} \text{ on } 2^j \text{ kpl)} \\ \Rightarrow\ & f \quad \text{jatkuva.} \end{aligned}$$

Samanlainen päättely $\Rightarrow$ $f^{-1}$ jatkuva (tai: $f$ jatkuva bijektio ja $E(p)$ kompakti $\Rightarrow$ $f$ homeo).

(c): Jos $m(E) > 0$, niin $E$:n on oltava ylinumeroitu. Olkoon $E = E(p)$ s.e. $m(E) = 0$. Valitaan jono $q$ s.e. $m\big(E(q)\big) > 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{(b)} \ \Rightarrow \ \exists \ \text{homeo } f\colon E(p) \to E(q) \\ \qquad E(q) \ \text{ylinumeroituva} \end{array}\right\} \Rightarrow \ E(p) \ \text{ylinumeroituva.}$$

$\square$

**Esimerkki 1.20.** Todistetaan Esimerkki 1.6:n väite tapauksessa $n = 1$. Ts. $\exists$ Lebesgue-mitallinen joukko $\mathbb{R}$:ssä, joka ei ole Borel. [2]

Tod. Valitaan Cantorin joukot $E$ ja $E'$ s.e. $m(E) > 0$ ja $m(E') = 0$. Muokkaamalla hieman Mitta ja integraalin Lauseen 1.68 todistusta löydetään ei-Lebesgue-mitallinen joukko $F \subset E$.

$$\text{L. } 1.18 \;\Rightarrow\; \exists \text{ homeo } f\colon E \to E'$$
$$fF \subset E' \;\Rightarrow\; m^*(fF) = 0 \;\Rightarrow\; fF \in \operatorname{Leb}\mathbb{R}$$

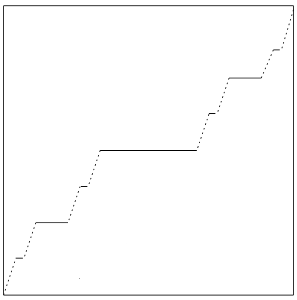
Oletetaan, että $fF$ on Borel-joukko.

$$\left.\begin{array}{c} E \in \operatorname{Bor}\mathbb{R} \\ f\colon E \to \mathbb{R} \text{ jatkuva} \\ fF \in \operatorname{Bor}\mathbb{R} \end{array}\right\} \overset{\text{L. 1.7}}{\Longrightarrow} f^{-1}(fF) = F \in \operatorname{Bor}\mathbb{R}\,.$$

Ristiriita, sillä $F \notin \operatorname{Leb}\mathbb{R}$. Siis $fF$ on Lebesgue-mitallinen, muttei Borel. $\square$

**Esimerkki 1.21.** Olkoon $E$ Cantorin 1/3-joukko. Määritellään $f\colon I \to I,\ I = [0,1]$, asettamalla

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\,, \quad \forall x \in I_{1,1}, \\ f(x) &= \frac{1}{4}\,, \quad \forall x \in I_{2,1}, \\ f(x) &= 1 - \frac{1}{4}\,, \quad \forall x \in I_{2,2}, \\ &\vdots \\ f(x) &= \frac{1 + 2(k-1)}{2^j}\,, \quad \forall x \in I_{j,k}, \\ &\vdots \end{aligned}$$



Nyt

$$f\colon \underbrace{\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{j-1}} I_{j,k}}_{=A} \to I$$

[2] *Lisätieto*: $\operatorname{Bor}\mathbb{R} \subsetneq \operatorname{Leb}\mathbb{R}$ saadaan myös "mahtavuustarkastelulla": $\mathbb{R}$:n topologialla on numeroituva kanta (= välit, joiden pituus ja keskipiste ovat rationaalilukuja), ja tämä kanta generoi kaikki $\mathbb{R}$:n Borel-joukot. Siten $\operatorname{Bor}\mathbb{R}$:n mahtavuus on $\mathfrak{c}$ (= "kontinuumin mahtavuus" eli sama kuin reaaliluvuilla). Toisaalta Cantorin 1/3-joukon $E$ mitta on $m(E) = 0$, joten kaikki sen osajoukot ovat mitallisia, ts. $\mathcal{P}(E) \subset \operatorname{Leb}\mathbb{R}$ ($m$ täydellinen mitta). Koska $\mathcal{P}(E)$:n mahtavuus on $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$, niin "useimmat" $E$:n osajoukoista eivät ole Borel-joukkoja.

on kasvava ja $\forall y \in ]0,1[$:

$$\lim_{\substack{x \to y+ \\ x \in A}} f(x) = \lim_{\substack{x \to y- \\ x \in A}} f(x)\,.$$

Määritellään $f(y)$ yo. raja-arvona pisteissä $y \in E \setminus \{0,1\}$ ja tois-puoleisena raja-arvona pisteissä $y \in \{0,1\}$. Saadaan $f\colon I \to I$, jolle pätee:

(a) $f$ on jatkuva ja kasvava surjektio;

(b) $f'(x) = 0$ m.k. $x \in I$ (koska $f'(x) = 0\ \forall x \in I_{j,k}$ ja $m(E) = 0$);

(c) $fE = I$ (koska $f$:llä on vakioarvo jokaisella välillä $I_{j,k}$ ja niiden päätepisteet kuuluvat $E$:hen).

Funktiota $f$ kutsutaan *Cantorin* 1/3-*funktioiksi* ("pirun portaat"). Tähän palataan myöhemmin.

## 1.22 Avaruus $L^1$

Olkoon $(X, \Gamma, \mu)$ täydellinen mitta-avaruus, ts. $\mu$ on täydellinen. "Mitta ja integraalissa" kehitetty mitallisten funktioiden teoria ja integrointiteoria toimivat sellaisenaan ja samoin todistuksin tässä yleisessä tapauksessa. Kun $\mu$ on täydellinen, ei tule ongelmia m.k. käsitteen kanssa. Myös konvergenssilauseet ovat samat todistuksineen. Sen sijaan Fubinin lause vaatii eri todistuksen yleisessä tulomitan $\mu \times \nu$ ($X \times Y$:ssä) tapauksessa (ks. esim. [Ru, s. 136-142]).

**Huomautus 1.23.** Käsitteet "avoin joukko, jatkuva funktio, jne." vaativat topologisen avaruuden $X$, samoin $\operatorname{Bor} X$ (= pienin $\sigma$-algebra $X$:ssä, joka sisältää $X$:n suljetut joukot).

Olkoon $A \subset X$ $\mu$-mitallinen (lyh. mitallinen), ts. $A \in \Gamma$. Huom. $\mu$-mitallisuus on $\sigma$-algebrasta $\Gamma$ riippuva ominaisuus, ei mitasta $\mu\colon \Gamma \to [0, +\infty]$. Funktio $f\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$ on *mitallinen* (tai *$\mu$-mitallinen, $\Gamma$-mitallinen*), jos

$$f^{-1}(-\infty) \in \Gamma,\ f^{-1}(+\infty) \in \Gamma, \quad \text{ja } f^{-1}U \in \Gamma \quad \forall U \subset \mathbb{R} \text{ avoin.}$$

Merkitään

$$L^1(A) = \{f\colon A \to \dot{\mathbb{R}} \mid f \text{ mitall. ja } \int_A |f| d\mu < \infty\}\,.$$

Merkitään myös $L^1(A,\mu)$ ja $L^1 = L^1(\mu) = L^1(X)$.

**Huomautus 1.24.** Jos $A \subset X$ on mitallinen ja $\Gamma_A = \{B \cap A\colon B \in \Gamma\}$, niin $(A, \Gamma_A, \mu|\Gamma_A)$ on myös täydellinen mitta-avaruus. Siksi riittää (yleensä) tutkia "koko" mitta-avaruutta $(X, \Gamma, \mu)$.

Muistutus: Mitallinen funktio $f\colon X \to \dot{\mathbb{R}}$ on integroituva ($X$:ssa), jos

$$\int_X f^+ d\mu < \infty \quad \text{ja} \quad \int_X f^- d\mu < \infty\,.$$

Silloin

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \quad \text{ja} \quad \int_X |f| d\mu = \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu\,.$$

Siis: $f \in L^1 \iff f\colon X \to \dot{\mathbb{R}}$ on integroituva.

**Huomautus 1.25.** Jos $f\colon X \to \dot{\mathbb{R}}$ on integroituva, niin $f(x) \in \mathbb{R}$ $\mu$-m.k. Määritellään $f^*\colon X \to \mathbb{R}$,

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{jos } f(x) \in \mathbb{R}\,, \\ 0, & \text{jos } f(x) \in \{-\infty, +\infty\}\,. \end{cases}$$

Tällöin $f^*$ on integroituva ja

$$\int_X f^* d\mu = \int_X f d\mu\,.$$

Tästä syystä voimme (usein) rajoittua reaaliarvoisiin funktioihin.

Jos $f, g \in L^1$, $a, b \in \mathbb{R}$, niin $af + bg \in L^1$. Siis $L^1$ on ($\mathbb{R}$-kertoiminen) vektoriavaruus. Merkitään

$$\|f\|_1 = \|f\|_{1,X} = \int_X |f| d\mu = \int |f| d\mu\,.$$

**Lause 1.26.** $\|\cdot\|$ *toteuttaa:*

*(1)* $\|f\|_1 \geq 0$,

*(2)* $\|\lambda f\|_1 = |\lambda| \|f\|_1$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

*(3)* $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$,

*(4)* $\|f\|_1 = 0 \iff f = 0$ *m.k.*

**Tod.** Selvä. □

Lause 1.26 $\Rightarrow$ $f \mapsto \|f\|_1$ on *seminormi*. Ei ole normi, sillä: $\|f\|_1 = 0 \not\Rightarrow f = 0$.

Esim.

$$X = \mathbb{R},\ \mu = m,\ f = \chi_{\mathbb{Q}},\ \Rightarrow\ \|f\|_1 = 0, \quad \text{mutta} \quad f \neq 0\,.$$

**Määritelmä 1.27.** $f, g \in L^1$ ovat *ekvivalentit*, merkitään $f \sim g$, jos $f = g$ m.k.

Merkitään

$$[f] = \tilde{f} = \{g \in L^1\colon g \sim f\} = f\text{:n ekvivalenssiluokka}$$
$$\tilde{L}^1 = \{\tilde{f}\colon f \in L^1\}\,.$$

$\tilde{L}^1$ on vektoriavaruus:

$$[af + bg] = a[f] + b[g]\,.$$

Asetetaan

$$\|\tilde{f}\|_1 = \|f\|_1 \quad (\text{hyvin määritelty eli ei riipu edustajasta } f)\,.$$

$\tilde{L}^1$ on normiavaruus, sillä L. 1.26:n kohtien (1)–(3) lisäksi pätee:

(4') $\|\tilde{f}\|_1 = 0 \iff \tilde{f} = 0$,

missä $0 = \tilde{0} = \{f \in L^1\colon f = 0 \text{ m.k.}\}$. Jatkossa luovumme merkinnästä $\tilde{L}^1$ ja sanomme: *normiavaruus* $L^1$. Samoin puhumme ($L^1$-)funktioista eikä ekvivalenssiluokista, ts. samaistamme funktiot, jotka yhtyvät m.k.

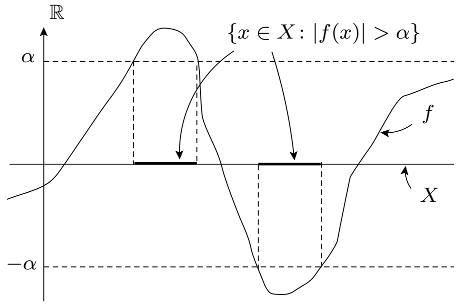
### 1.28 Avaruus $L^\infty$

Olkoon $(X,\Gamma,\mu)$ täydellinen mitta-avaruus, ja $f\colon X\to\dot{\mathbb{R}}$ mitallinen.

Merkitään

$$\|f\|_\infty = \inf \underbrace{\{\alpha \ge 0\colon \mu\big(\{x\in X\colon |f(x)|>\alpha\}\big)=0\}}_{\text{merk. } =S}.$$

Jos $S=\emptyset$, asetetaan $\|f\|_\infty=\infty$.




Jos $\|f\|_\infty<\infty$ eli $S\ne\emptyset$, niin pätee:

$$\{x\in X\colon |f(x)|>\|f\|_\infty\}\subset\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\{x\in X\colon |f(x)|>\|f\|_\infty+1/j\}$$

$$\Rightarrow\ \mu\big(\{x\in X\colon |f(x)|>\|f\|_\infty\}\big)\le\sum_{j\in\mathbb{N}}\underbrace{\mu\big(\{x\in X\colon |f(x)|>\|f\|_\infty+1/j\}\big)}_{=0}=0$$

$$\Rightarrow\ \|f\|_\infty\in S\quad\text{ja siten } |f|\le\|f\|_\infty\ \text{ m.k.}$$

Siksi merkitään usein $\|f\|_\infty=\operatorname{ess\,sup}|f|$ ("oleellinen supremum" [engl. essential supremum]). Merkitään

$$L^\infty(X)=L^\infty=L^\infty(\mu)=\{f\colon X\to\dot{\mathbb{R}}\mid f\text{ mitall. ja }\|f\|_\infty<\infty\}.$$

Samaistetaan $f,g\in L^\infty$, jos $f=g$ m.k. Ei eroteta merkinnällä: $L^\infty$ = ekvivalenssiluokkien joukko, puhumme kuitenkin funktiosta.

**Lause 1.29.** *$L^\infty$ on normiavaruus normina $\|\cdot\|_\infty$.*

**Tod.** Selvästi:

(i) $L^\infty$ on vektoriavaruus (ks. (iv)-kohta).

(ii) $\|f\|_\infty\ge 0$ ja $\|f\|_\infty=0 \iff f=0$ m.k. (huom. ekvivalenssiluokka).

(iii) $\|\lambda f\|_\infty=|\lambda|\|f\|_\infty\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$.

Lisäksi:

(iv) Kolmioepäyhtälö:

$$\left.\begin{array}{l}|f|\le\|f\|_\infty\ \text{ m.k.}\\ |g|\le\|g\|_\infty\ \text{ m.k.}\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ |f+g|\le|f|+|g|\le\|f\|_\infty+\|g\|_\infty\ \text{ m.k.}$$

Siis

$$\mu\big(\{x\in X\colon |f(x)+g(x)|>\|f\|_\infty+\|g\|_\infty\}\big)=0,$$

joten $\|f+g\|_\infty\le\|f\|_\infty+\|g\|_\infty$ ja näin ollen $f+g\in L^\infty$. □

**Esimerkki 1.30.** Olkoon $X = \mathbb{R}$, $\mu = m$ ja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jatkuva.*
Väite: $f \in L^\infty \iff f$ rajoitettu.
Tod. $\boxed{\Leftarrow}$ selvä.
$\boxed{\Rightarrow}$:
VO: $f$ ei ole rajoitettu, jolloin $\forall M > 0\ \exists\ x_0 \in \mathbb{R}$ s.e. $|f(x_0)| > M$.
Koska $f$ jatkuva, niin $|f(x)| > M\ \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ = J$ jollakin $\delta > 0$.
$m(J) > 0 \Rightarrow \|f\|_\infty \geq M$.
$M > 0$ mv. $\Rightarrow \|f\|_\infty = \infty$. RR ∎

## 1.31 Avaruus $L^p$, $1 \leq p < \infty$

Olkoon $(X, \Gamma, \mu)$ mitta-avaruus, $\mu$ täydellinen ja $1 \leq p < \infty$. Määritellään

$$L^p(X) = L^p = L^p(\mu) = \{f\colon X \to \dot{\mathbb{R}} \mid f \text{ mitallinen ja } \int_X |f|^p d\mu < \infty\}.$$

Merkitään

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}.$$

Samaistukset kuten aiemmin. Eksponentti $p$ *vaikuttaa* suuresti siihen, mitkä funktiot kuuluvat $L^p$:hen.

**Esimerkki 1.32.** Olkoon $X = ]0,1[$, $\mu = m|]0,1[$ Lebesguen mitta. Jos $f$ on mitallinen ja rajoitettu, niin $f \in L^p\ \forall p \geq 1$. (Syy: $|f|^p$ mitallinen ja rajoitettu, $\mu(X) < \infty \Rightarrow |f|^p$ integroituva eli $f \in L^p$).

Olkoon

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Silloin

$$\int_X |f|^p d\mu = \lim_{a \to 0+} \int_a^1 x^{-p/2} dx = \begin{cases} \lim\limits_{a \to 0+} \dfrac{1}{1 - \frac{p}{2}} \Big/_a^1 x^{1-p/2} = \dfrac{1}{1 - \frac{p}{2}} < \infty, & \text{jos } p < 2, \\ \lim\limits_{a \to 0+} \dfrac{1}{1 - \frac{p}{2}} \Big/_a^1 x^{1-p/2} = \infty, & \text{jos } p > 2, \\ \lim\limits_{a \to 0+} \Big/_a^1 \log x = \infty, & \text{jos } p = 2. \end{cases}$$

Siis

$$f \in L^p \iff 1 \leq p < 2.$$

**Lause 1.33.** *Jos $\mu(X) < \infty$ ja $1 \leq q \leq p$, niin $L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$.*

**Tod.** (HT) ∎
Osoitamme seuraavaksi: $L^p$ on normiavaruus. Tarvitaan "työkaluja".

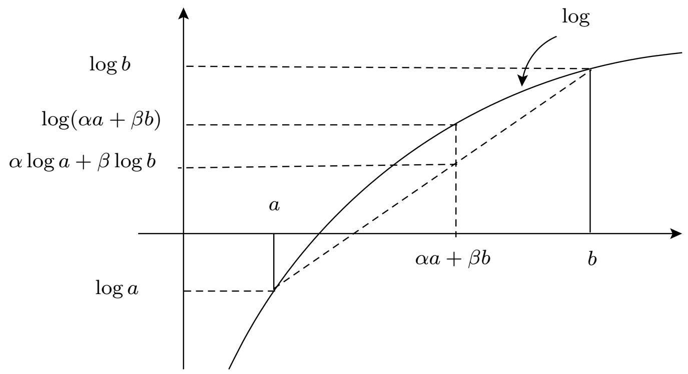
**Lemma 1.34** (Youngin epäyhtälö)**.** *Jos $a, b \geq 0$, $\alpha, \beta > 0$ ja $\alpha + \beta = 1$, niin*

$$a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b.$$

**Tod.** Tapaus $a = 0$ tai $b = 0$ selvä. Voidaan siis olettaa $a, b > 0$.
$x \mapsto \log x,\ x > 0$, ylöspäin kupera $\Rightarrow$

$$\log\big(a^\alpha b^\beta\big) = \alpha \log a + \beta \log b \le \log(\alpha a + \beta b)\,.$$

log kasvava $\Rightarrow$ väite.




$\square$

Seuraavaksi *tärkeä* epäyhtälö.

**Lause 1.35** (Hölderin epäyhtälö)**.** *Jos* $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p$, $g \in L^q$, *niin*

$$fg \in L^1 \quad \textit{ja} \quad \|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q\,, \quad \textit{ts.}$$

$$\int_X |fg|\,d\mu \le \Big(\int_X |f|^p d\mu\Big)^{1/p} \Big(\int_X |g|^q d\mu\Big)^{1/q}\,.$$

**Tod.** Jos $\|f\|_p = 0$, niin $f = 0$ m.k., joten $\|fg\|_1 = 0$ ja asia selvä. Samoin, jos $\|g\|_q = 0$. Voidaan siis olettaa, että

$$\|f\|_p,\ \|g\|_q > 0\,.$$

Samoin voidaan olettaa, että $f(x), g(x) \in \mathbb{R}\ \forall x$ (ks. Huom. 1.25). Sovelletaan Youngin epäyhtälöä tapaukseen

$$a = \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p}\,,\ b = \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}\,,\ \alpha = \frac{1}{p}\,,\ \beta = \frac{1}{q}\,,$$

jolloin saadaan ($a^\alpha b^\beta \le \alpha a + \beta b$)

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \le \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}\,.$$

Integroidaan yli $X$:n (esiintyvät funktiot mitallisia) $\Rightarrow$

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_q} \le \frac{1}{p} \frac{\|f\|_p^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{\|g\|_q^q}{\|g\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,. \quad \square$$

**Huomautus 1.36.** Lukuja $p, q > 1$, joille $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ sanotaan (toistensa) Hölder konjugaateiksi. Usein merkitään $q = p' = \frac{p}{p-1}$. Vain luku 2 konjugaatti itselleen.

**Seuraus 1.37** (Schwarzin epäyhtälö)**.**

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_2 \|g\|_2 \,.$$

**Esimerkki 1.38.** Olkoon $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty[$, $\mu(A) = \operatorname{card} A = A$:n alkioiden lukumäärä ($\mu =$ lukumäärä mitta). Jos $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ja $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n \in \mathbb{R}$, niin

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \le \left( \sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^{n} |b_i|^q \right)^{1/q} .$$

<u>Tod.</u> Valitaan

$$f = \sum_i a_i \chi_{\{i\}} \,, \qquad g = \sum_i b_i \chi_{\{i\}} \,.$$

Yleisemmin:

$$X = \{x_i \colon i = 1, 2, \ldots\} \,, \ \Gamma = \mathcal{P}(X) \,, \ \text{ja } \mu(A) = \operatorname{card} A \,.$$

Jos $f\colon X \to \mathbb{R}$, niin

$$\|f\|_p = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} = \left( \sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i)|^p \right)^{1/p} .$$

(<u>Huom.</u> jokainen $f$ mitallinen.) Merkitään

$$L^p(X) = \ell^p(X) \,.$$

Jos $f \in \ell^p(X)$, $g \in \ell^q(X)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, ja $a_i = f(x_i)$, $b_i = g(x_i)$, niin Hölder-ey. saa muodon

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i b_i| \le \left( \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^q \right)^{1/q} .$$

**Lause 1.39** (Minkowskin epäyhtälö)**.** *Jos $f, g \in L^p$, niin $f + g \in L^p$ ja*

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p \,.$$

**Tod.** Tapaus $p = 1$ jo edellä. Olkoon $p > 1$ ja $q = \frac{p}{p-1}$, jolloin $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (Hölder konjugaatteja). Jos $a, b \ge 0$, niin

$$(a + b)^p \le \big(2 \max(a, b)\big)^p = 2^p \big(\max(a, b)\big)^p \le 2^p (a^p + b^p) \,.$$

Voidaan olettaa, että $f(x), g(x) \in \mathbb{R}\ \forall x$ (Huom. 1.25), jolloin

$$|f + g|^p \le (|f| + |g|)^p \le 2^p \big(|f|^p + |g|^p\big) \quad \Rightarrow \ f + g \in L^p \,.$$

Toisaalta

$$|f + g|^p = |f + g| |f + g|^{p-1} \le |f| |f + g|^{p-1} + |g| |f + g|^{p-1}$$

ja

$$\big(|f + g|^{p-1}\big)^q = |f + g|^p \overset{f+g \in L^p}{\Longrightarrow} |f + g|^{p-1} \in L^q \,.$$

Hölderin ey. $\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p = \int |f+g|^p &\le \int \underbrace{|f|}_{\in L^p}\underbrace{|f+g|^{p-1}}_{\in L^q} + \int \underbrace{|g|}_{\in L^p}\underbrace{|f+g|^{p-1}}_{\in L^q} \\
&\le \|f\|_p \left(\int \left(|f+g|^{p-1}\right)^q\right)^{1/q} + \|g\|_p \left(\int \left(|f+g|^{p-1}\right)^q\right)^{1/q} \\
&= \|f\|_p \left(\int |f+g|^p\right)^{1/q} + \|g\|_p \left(\int |f+g|^p\right)^{1/q} \\
&= \big(\|f\|_p + \|g\|_p\big)\|f+g\|_p^{p/q}
\end{aligned}
$$

$$\overset{p/q=p-1}{\Longrightarrow} \|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p\,. \quad \square$$

Olemme todistaneet:

**Lause 1.40.** *$L^p$ on normiavaruus normina $\|\cdot\|_p$.*

**Esimerkki 1.41.** 1. Kun $\mu(X)=\infty$, voi olla $L^p \not\subset L^q$, $q<p$: Valitaan $X=\mathbb{R}$, $\mu=m$.

$$f(x)=\frac{1}{1+|x|} \qquad f\in L^p,\ \text{kun } p>1\,, \qquad f\notin L^1.$$

2. Yleensä $L^p \not\subset L^q$, $p\neq q$. Yllä tapaus $q<p$. Aiemmin: $X=]0,1[\,$, $\mu=m$ ja

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}} \\
f &\in L^p, \quad \text{kun } 1\le p<2 \\
f &\notin L^q, \quad \text{kun } q\ge 2\,.
\end{aligned}
$$

## 1.42 $L^p$:n täydellisyys

Tässä luvussa todistamme, että normiavaruudet $L^p$, $1\le p\le\infty$, ovat *Banach-avaruuksia*, ts. täydellisiä normiavaruuksia.

Terminologiaa: Olkoon $(Y,d)$ metrinen avaruus. Sanomme, että jono $(x_j)$, $x_j\in Y$, on *Cauchy-jono* $Y$:ssä, jos $\forall\varepsilon>0$ kohti on olemassa $i_\varepsilon\in\mathbb{N}$ s.e. $d(x_i,x_j)<\varepsilon$ kaikilla $i,j\ge i_\varepsilon$.
Metrinen avaruus $(Y,d)$ on *täydellinen*, jos sen jokainen Cauchy-jono suppenee kohti $Y$:n alkiota. Jono $(x_j)$ suppenee kohti pist. $x\in Y$, jos $d(x_j,x)\to 0$, kun $i\to\infty$.

Olkoon $(V,\|\cdot\|)$ normiavaruus. Se on samalla myös metrinen avaruus, metriikkana

$$d(x,y)=\|x-y\|\,.$$

Siis $(V,\|\cdot\|)$ on Banach-avaruus, jos jokaiselle $V$:n Cauchy-jonolle $(x_j)$ on olemassa $x\in V$ s.e.

$$\|x_j-x\| \xrightarrow{j\to\infty} 0\,.$$

Olkoon $(X,\Gamma,\mu)$ täydellinen mitta-avaruus.
Sanomme: $f_j\to f$ $L^p$:ssä, jos $f_j,f\in L^p$ ja $\|f_j-f\|_p\to 0$, kun $j\to\infty$.

**Lause 1.43.** *Jos* $(f_j)$ *on Cauchy-jono* $L^p$*:ssä,* $1 \le p < \infty$, *niin on olemassa osajono* $(f_{j_k})$, *joka suppenee m.k.*

**Tod.** Jokaisella $k \in \mathbb{N}$ valitaan $j_k$ s.e.

(1) $\|f_i - f_j\|_p < \frac{1}{2^k}$, kun $i, j \ge j_k$,

(2) $j_1 < j_2 < \cdots$ .

Huom. 1.25 $\Rightarrow$ voidaan olettaa, että kaikki esiintyvät funktiot ovat reaaliarvoisia. Määritellään

$$g_k = |f_{j_1}| + |f_{j_2} - f_{j_1}| + \cdots + |f_{j_{k+1}} - f_{j_k}| \, .$$

$$(g_k) \;\text{ kasvava jono } \quad \Rightarrow \; \exists \; g = \lim_{k\to\infty} g_k \, .$$

Minkowskin ey. $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\|g_k\|_p &= \Big\| \, |f_{j_1}| + \sum_{\nu=1}^{k} |f_{j_{\nu+1}} - f_{j_\nu}| \, \Big\|_p \\
&\overset{\text{Minkowski}}{\le} \|f_{j_1}\|_p + \sum_{\nu=1}^{k} \|f_{j_{\nu+1}} - f_{j_\nu}\|_p \\
&\le \|f_{j_1}\|_p + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{1}{2^\nu} \le \|f_{j_1}\|_p + 1 \quad \forall k
\end{aligned}$$

MKL $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\int g^p &\overset{\text{MKL}}{=} \lim_{k\to\infty} \int g_k^p = \lim_{k\to\infty} \|g_k\|_p^p \le \big(\|f_{j_1}\|_p + 1\big)^p < \infty \\
&\Rightarrow g(x) < \infty \;\text{ m.k.}
\end{aligned}$$

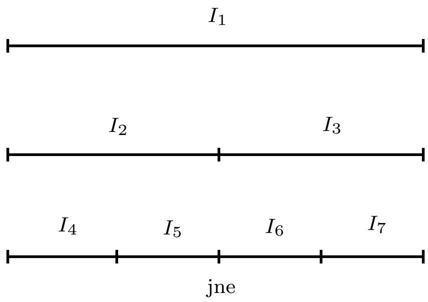
$\Rightarrow$ sarja

$$f_{j_1}(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \big(f_{j_{\nu+1}}(x) - f_{j_\nu}(x)\big)$$

suppenee m.k. $x$. Merkitään summaa $f(x)$:llä. Saatiin

$$f_{j_{k+1}} = f_{j_1} + \sum_{\nu=1}^{k} \big(f_{j_{\nu+1}} - f_{j_\nu}\big) \to f \text{ m.k.} \quad \square$$

**Huomautus 1.44.** Ehdosta $f_j \to f$ $L^p$:ssä *ei* välttämättä seuraa, että $f_j \to f$ m.k. (koko jonolle). <u>Esim.</u> Olkoon $I_k$ suljettu välin $I = [0, 1]$ osaväli kuten kuvassa.




Olkoon $f_k = \chi_{I_k} \colon I \to \mathbb{R}$. Silloin $f_k \in L^p$, $\forall p \in [1, \infty)$ ja

$$\|f_k - 0\|_p = \left( \int_I \chi_{I_k} dm \right)^{1/p} = m(I_k)^{1/p} \xrightarrow{k \to \infty} 0 \,.$$

Siis $f_k \to 0$ $L^p$:ssä.
Väite: $f_k(x) \not\to 0$ kun $k \to \infty$ *millään* $x \in I$.
Tod. Olkoon $x \in I$ ja $k_0 \in \mathbb{N}$ mielivaltaisia.

$$\bigcup_{k > k_0} I_k = I \ \Rightarrow \ \exists\, k_1 > k_0 \ \text{ s.e. } \ x \in I_{k_1} \text{ ja } f_{k_1}(x) = 1 \,. \quad \square$$

**Lause 1.45.** *$L^p$ on Banach avaruus, kun $1 \leq p \leq \infty$.*

**Huomautus 1.46.** Tapaus $1 \leq p < \infty$ on ns. *Riesz-Fischerin lause* (v. 1906).

**Tod.** $\boxed{\text{(a)}}$ $1 \leq p < \infty$: Olkoon $(f_j)$ Cauchy-jono $L^p$:ssä. L. 1.43 $\Rightarrow$ $\exists$ osajono $(f_{j_k})$, s.e. $f_{j_k} \to f$ m.k.
Väite: $f \in L^p$.
Tod. Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin $\exists\, j_0 \in \mathbb{N}$ s.e.

$$\|f_i - f_j\|_p < \varepsilon \,, \quad \text{kun } i, j \geq j_0 \,.$$

Jos $j \geq j_0$, niin

$$\begin{aligned} \int |f_j - f|^p d\mu &= \int \lim_{k \to \infty} |f_j - f_{j_k}|^p d\mu \overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{k \to \infty} \int |f_j - f_{j_k}|^p d\mu \\ &= \liminf_{k \to \infty} \|f_j - f_{j_k}\|_p^p \leq \varepsilon^p \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_j - f \in L^p \\ \\ \|f_j - f\|_p \xrightarrow{j \to \infty} 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f = f_j - (f_j - f) \in L^p \\ \\ f_j \to f \ L^p\text{:ssä} \end{cases} \qquad \square$$

$\boxed{\text{(b)}}$ $p = \infty$: Olkoon $(f_j)$ Cauchy-jono $L^\infty$:ssä. Merkitään

$$\begin{aligned} A_j &= \{x \colon |f_j(x)| > \|f_j\|_\infty\} \\ A_{j,k} &= \{x \colon |f_j(x) - f_k(x)| > \|f_j - f_k\|_\infty\} \,. \end{aligned}$$

Silloin $\mu(A_j) = 0 = \mu(A_{j,k})$ (seuraa $\|\cdot\|_\infty$:n määritelmästä). Merkitään

$$A = \bigcup_j A_j \cup \bigcup_{j,k} A_{j,k}\,, \quad \text{jolloin} \quad \mu(A) = 0\,.$$

Jos $x \in A^c$, niin

$$|f_j(x) - f_k(x)| \le \|f_j - f_k\|_\infty\,. \tag{1.47}$$

Siis $\big(f_j(x)\big)$ on Cauchy-jono $\mathbb{R}$:ssä, joten jono $\big(f_j(x)\big)$ suppenee (Diff I). Merkitään

$$f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x)\,.$$

Cauchyn kriterio tasaiselle suppenemiselle ja (1.47) $\Rightarrow$

$$f_j \to f \quad \text{tasaisesti } A^c\text{:ssä.}$$

Kun $x \in A$, asetetaan $f(x) = 0$. [Ho, L. 2.29] $\Rightarrow$ $f$ mitallinen.
Väite: $f \in L^\infty$ ja $\|f_j - f\|_\infty \to 0$.
Tod. Olkoon $j_0$ s.e.

$$\|f_j - f_k\|_\infty < 1\,, \quad \text{kun } j,k \ge j_0\,.$$

Koska $\|\cdot\|_\infty$ on normi, niin pätee

$$\|f_j\|_\infty \le \|f_{j_0}\|_\infty + \|f_j - f_{j_0}\|_\infty \le \|f_{j_0}\|_\infty + 1 \overset{\text{merk.}}{=} M\,,$$

kun $j \ge j_0$. Jos $x \in A^c$, niin

$$\begin{aligned} |f_j(x)| &\le \|f_j\|_\infty\,, \quad \text{joten} \\ |f(x)| &= \lim_{j\to\infty} |f_j(x)| \le M \\ &\Rightarrow \|f\|_\infty \le M\,, \quad \text{sillä } \mu(A) = 0\,. \\ &\Rightarrow f \in L^\infty\,. \end{aligned}$$

(Itse asiassa $|f(x)| \le M$ $\forall x$.)
Koska $f_j \to f$ tasaisesti $A^c$:ssä ja $\mu(A) = 0$, niin $\|f_j - f\|_\infty \to 0$. □

**Huomautus 1.48.** $L^p$-teoria yleistyy kuvauksille $f\colon X \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$. Normina

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}\,,$$

missä $|f(x)| = \big(f_1(x)^2 + \cdots + f_m(x)^2\big)^{1/2}$ on euklidinen normi. Samoin funktioille $f\colon X \to \mathbb{C}$.

## 1.49 Lisätietoja avaruudesta $L^p$

[Huom. Tämä on suora kopio luentomonisteesta [Mar] (Martio: Reaalianalyysi I (1999), luku 1.7.)]

Jos $(X, \|\cdot\|)$ on (reaalikertoiminen) normiavaruus, niin tähän avaruuteen liittyy aina sen duaaliavaruus $X^*$, joka koostuu kaikista jatkuvista lineaarikuvauksista $L\colon X \to \mathbb{R}$ (jatkuvuus lineaarikuvauksen $L$ tapauksessa voidaan pelkistää ehtoon $\sup\{|L(x)|\colon \|x\| \le 1,\ x \in X\} < \infty$).

Tarkastellaan normiavaruutta $L^p$, $1 \le p \le \infty$. Jos $g \in L^q$, missä $q$ on $p$:n konjugoitu eksponentti ($q = 1$, jos $p = \infty$ ja $q = \infty$, jos $p = 1$), niin kuvaus

$$f \mapsto \int_X gf d\mu$$

määrittelee Hölderin epäyhtälön nojalla jatkuvan lineaarikuvauksen $L\colon L^p \to \mathbb{R}$, sillä $L$ on selvästi lineaarinen ja

$$|L(f)| = \Big| \int_X gf d\mu \Big| \le \int_X |gf| d\mu \le \|g\|_q \|f\|_p \le \|g\|_q < \infty \,,$$

jos $\|f\|_p \le 1$. Osoittautuu, että kun $1 \le p < \infty$, niin kaikki jatkuvat lineaarikuvaukset saadaan tällä tavoin (tämä on kuuluisa Rieszin esityslause, joka merkitsi modernin funktionaalianalyysin alkua). Sen sijaan tämä ei yleensä päde $L^\infty$:ssä. Todistus ei ole kovin vaikea, ks. [Ru], [HS].[3]

Käyttäen hyväksi duaaliavaruutta $L^q$ voidaan avaruudessa $L^p$ määritellä ns. heikko konvergenssi: Sanotaan, että jono funktioita $u_i \in L^p$, $1 < p < \infty$, suppenee heikosti kohti funktiota $u \in L^p$, jos jokaisella $g \in L^q$ pätee

$$\int_X gu_i d\mu \to \int_X gu d\mu \,.$$

Osoittautuu, että $u$ on yksikäsitteisesti määrätty ja että

$$\|u\|_p \le \liminf_{i\to\infty} \|u_i\|_p \,.$$

Heikko konvergenssi on todella heikkoa: Siitä ei seuraa, että $\|u_i - u\|_p \to 0$, tai että $u_i \to u$ m.k. (ei edes osajonoon siirtymällä). Sen sijaan pätee tärkeä "kompaktisuuskriteerio": Jos $(u_i)$ on rajoitettu jono $L^p$:ssä, $1 < p < \infty$, so. $\|u_i\|_p \le M$, niin on olemassa osajono $(u_{i_j})$ ja $u \in L^p$ s.e. $u_{i_j} \to u$ heikosti $L^p$:ssä. Viitteestä [HS] löytyy näiden tulosten tarkempi analyysi.

# 2 Approksimointi $L^p$:ssä

## 2.1 Mittojen absoluuttinen jatkuvuus

Olkoon $(X, \Gamma, \mu)$ mitta-avaruus ja $\sigma\colon \Gamma \to [0, +\infty]$ toinen mitta.

**Määritelmä 2.2.** Mitta $\sigma$ on *absoluuttisesti jatkuva* $\mu$:n suhteen (merk. $\sigma \ll \mu$), jos $\sigma(E) = 0$ aina kun $E \in \Gamma$ ja $\mu(E) = 0$.

**Esimerkki 2.3.**

1. Olkoon $f\colon X \to [0, +\infty]$ $\Gamma$-mitallinen. Asetetaan

   $$\sigma(A) = \int_A f d\mu \,, \quad A \in \Gamma \,.$$

   Integraalin ominaisuudet ([Ho, Lause 3.32]) $\Rightarrow$ $\sigma$ on mitta ja

   $$\mu(A) = 0 \;\Rightarrow\; \sigma(A) = 0 \,,$$

   siis $\sigma \ll \mu$. (Käänteinen suunta: Ks. seuraava Huomautus.)

2. Olkoon $X = \mathbb{R}$ ja $\sigma\colon \operatorname{Leb}\mathbb{R} \to [0, +\infty]$ lukumäärämitta. Silloin Lebesguen mitta $m(\{0\}) = 0$, mutta $\sigma(\{0\}) = 1$, joten $\sigma \not\ll m$.

[3] [Ru] Rudin: Real and complex analysis; [HS] Hewitt, Stromberg: Real and abstract analysis.

3. Olkoon $X = \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, ja $\delta_x \colon \operatorname{Leb}\mathbb{R} \to [0,+\infty]$ Diracin mitta pisteessä $x$ (tai, itse asiassa, Diracin mitan rajoittuma $\operatorname{Leb}\mathbb{R}$:ään). Silloin $m(\{x\}) = 0$, mutta $\delta(\{x\}) = 1$, joten $\delta \not\ll m$.

**Huomautus 2.4.** Olkoon $(X, \Gamma, \mu)$ mitta-avaruus ja $\varphi \colon \Gamma \to \dot{\mathbb{R}}$. Sanomme, että:

(a) $\varphi$ on *täysadditiivinen,* jos

(i) $\varphi(\emptyset) = 0$,

(ii) jos $A_1, A_2, \ldots \in \Gamma$ ovat erillisiä, niin $\sum_i \varphi(A_i)$ on määritelty ja

$$\sum_i \varphi(A_i) = \varphi\big(\cup_i A_i\big).$$

(b) $\varphi$ on *absoluuttisesti jatkuva $\mu$:n suhteen*, jos $\mu(A) = 0 \Rightarrow \varphi(A) = 0$. Tällöin merkitään $\varphi \ll \mu$.

(c) $\varphi$ on *$\sigma$-äärellinen*, jos

$$X = \cup_j A_j, \ A_j \in \Gamma, \ |\varphi(A_j)| < \infty.$$

Valitettavasti emme todista seuraavaa *Radon-Nikodymin lausetta* tällä kurssilla: Jos $(X, \Gamma, \mu)$ on $\sigma$-äärellinen mitta-avaruus ja jos $\varphi \colon \Gamma \to \dot{\mathbb{R}}$ on täysadditiivinen, $\sigma$-äärellinen ja $\varphi \ll \mu$, niin on olemassa mitallinen funktio $f \colon X \to \mathbb{R}$ s.e.

$$\varphi(E) = \int_E f \, d\mu, \quad \forall E \in \Gamma$$

Jos lisäksi $g$ on toinen funktio, jolle yo. yhtälö pätee, niin $f = g$ m.k.

**Lause 2.5.** *Olkoon $(X, \Gamma, \mu)$ mitta-avaruus ja $\sigma \colon \Gamma \to [0, +\infty)$ mitta s.e. $\sigma(X) < \infty$. Tällöin*

$$\sigma \ll \mu \iff$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ \textit{s.e.} \ \mu(A) < \delta \ \Rightarrow \ \sigma(A) < \varepsilon\,. \tag{2.6}$$

**Tod.** $\boxed{\Rightarrow}$ Oletetaan $\sigma \ll \mu$.
<u>VO</u>: $\exists \ \varepsilon > 0$ ja jono $E_1, E_2, \ldots \in \Gamma$ s.e.

$$\sigma(E_i) \geq \varepsilon \quad \text{ja} \quad \mu(E_i) < 2^{-i}\,.$$

Merkitään

$$A_k = \bigcup_{i \geq k} E_i\,, \quad A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\,.$$

$$A_k \supset E_k \ \Rightarrow \ \sigma(A_k) \geq \sigma(E_k) \geq \varepsilon \quad \forall k\,.$$

$$\left.\begin{array}{c} A_1 \supset A_2 \supset \cdots \\ \sigma(A_1) \leq \sigma(X) < \infty \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ \sigma(A) = \lim_{k \to \infty} \sigma(A_k) \geq \varepsilon\,.$$

$$\mu(A) \leq \mu(A_k) \leq \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{k-1}} \quad \forall k$$

$$\Rightarrow \ \mu(A) = 0 \ \overset{\sigma \ll \mu}{\Longrightarrow} \ \sigma(A) = 0\,. \ \underline{\text{RR}}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Jos ehto (2.6) pätee, niin $\sigma \ll \mu$ triviaalisti ($\mu(A) = 0 \ \Rightarrow \ \sigma(A) < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \sigma(A) = 0$). $\square$

**Seuraus 2.7.** Olkoon $f \in L^1$. Tällöin $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta > 0$ s.e.

$$\mu(E) < \delta \;\Rightarrow\; \int_E |f| d\mu < \varepsilon \,.$$

**Tod.** Sovelletaan Lausetta 2.5 mittaan

$$\sigma(E) = \int_E |f| d\mu \quad E \in \Gamma \,,$$

jolloin $\sigma \ll \mu$ ja $\sigma(X) < \infty$ (koska $f \in L^1$). □

## 2.8 Egorovin ja Lusinin lauseet

Olkoon $(X, \Gamma, \mu)$ mitta-avaruus. "Mitta ja integraali"-kurssilla todistettiin ([Ho, Lause 3.14]):

**Lause 2.9.** *Jos* $f\colon X \to [0, \infty]$ *on mitallinen, niin* $\exists$ *kasvava jono 1-kertaisia funktioita* $0 \le f_1 \le f_2 \le \cdots$ *s.e.*

$$f = \lim_{j\to\infty} f_j \,.$$

**Huomautus 2.10.**

1. $g\colon X \to [0, \infty)$ on yksinkertainen, jos

$$g = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i} \,, \;\; a_i \ge 0, \;\; A_i \in \Gamma \text{ erillisiä.}$$

2. Lauseen 2.9 todistus sama kuin $(\mathbb{R}^n, \operatorname{Leb}\mathbb{R}^n, m)$:n tapauksessa.

3. Jos Lauseessa 2.9 $f$ on rajoitettu, niin $f_j \to f$ tasaisesti $X$:ssä, ts. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; i_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.e. $|f_j(x) - f(x)| < \varepsilon$ *kaikilla* $x \in X$ (indeksi $i_\varepsilon$ *ei* riipu $x$:stä).

4. $f\colon X \to [0, \infty]$ mitallinen $\iff$ $f = \lim_{j\to\infty} f_j$, missä $(f_j)$ nouseva jono 1-kertaisia funktioita $f_j\colon X \to [0, \infty)$.

Yleisesti: Suppeneminen m.k. on tasaista suuressa osassa $X$:ää, kuten seuraava lause osoittaa.

**Lause 2.11** (Egorovin lause)**.** *Olkoon* $\mu$ *täydellinen,* $\mu(X) < \infty$ *ja funktiot* $f_k\colon X \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots$ *mitallisia s.e.* $f_k \to f$ *m.k., missä* $f\colon X \to \mathbb{R}$*. Tällöin*

1. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists$ *mitallinen* $F \subset X$ *s.e.* $\mu(X \setminus F) < \varepsilon$ *ja* $f_k|F \to f|F$ *tasaisesti;*

2. *jos* $X \subset \mathbb{R}^n$ *ja* $\mu = m =$ *Lebesguen mitta, voidaan* $F$ *valita kompaktiksi.*

**Lemma 2.12.** *Olkoon* $A \subset \mathbb{R}^n$ *mitallinen ja* $\varepsilon > 0$*. Tällöin*

1. $\exists$ *avoin* $G \supset A$ *s.e.* $m(G \setminus A) < \varepsilon$;

2. $\exists$ *suljettu* $F \subset A$ *s.e.* $m(A \setminus F) < \varepsilon$.

3. *Jos lisäksi* $m(A) < \infty$, *niin* $\exists$ *kompakti* $F \subset A$ *s.e.* $m(A \setminus F) < \varepsilon$.

**Tod.** (ylim.) HT $\square$

**Egorovin lauseen tod.** 1. $\mu$ täydellinen $\Rightarrow$ $f$ mitallinen ([Ho, Lause 2.29]). Merkitään

$$E_{k,l} = \bigcap_{m=l}^{\infty} \underbrace{\{x \in X : |f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{k}\}}_{\text{mitall.}}, \quad k, l \in \mathbb{N},$$

$$H = \{x \in X : \lim_{m \to \infty} f_m(x) = f(x)\}.$$

Jos $x \in H$ ja $k \in \mathbb{N}$, niin $\exists\, l_k \in \mathbb{N}$ s.e. $|f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$ $\forall m \geq l_k$ $\Rightarrow$ $x \in E_{k,l_k}$. Siten

$$H \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} E_{k,l} \quad \forall k.$$

Joukot $H$ ja $E_{k,l}$ mitallisia ja $\mu(H) = \mu(X)$, sillä $f_m \to f$ m.k.

$$E_{k,l} \subset E_{k,l+1} \Rightarrow$$

$$\mu(X) \geq \lim_{l \to \infty} \mu(E_{k,l}) = \mu\Big(\bigcup_{l=1}^{\infty} E_{k,l}\Big) \geq \mu(H) = \mu(X) \tag{2.13}$$

$$\mu(X) < \infty, \ (2.13) \Rightarrow$$

$$\lim_{l \to \infty} \mu(X \setminus E_{k,l}) = \mu(X) - \lim_{l \to \infty} \mu(E_{k,l}) = 0 \quad \forall k.$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Silloin $\forall k\ \exists\, l_k \in \mathbb{N}$ s.e.

$$\mu(X \setminus E_{k,l_k}) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

<u>Väite</u>: Joukko

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_{k,l_k}$$

toteuttaa vaaditut ehdot.
<u>Tod.</u> $F$ mitallinen ja

$$\mu(X \setminus F) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} (X \setminus E_{k,l_k})\Big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X \setminus E_{k,l_k}) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Lisäksi $F \subset E_{k,l_k}$ $\forall k$ ja

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{k}, \quad \text{kun } x \in E_{k,l_k} \text{ ja } m \geq l_k.$$

$$\Rightarrow |f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{k}, \quad \text{kun } x \in F \text{ ja } m \geq l_k.$$

$$\Rightarrow f_m|F \to f|F \quad \text{tasaisesti (indeksi } l_k \text{ ei riipu pisteestä } x \in F).$$

2. Olkoon lisäksi $\mu = m =$ Lebesguen mitta. Lemma 2.12 $\Rightarrow$ $\exists$ kompakti $F_0 \subset F$ s.e. $\mu(F \setminus F_0) < \varepsilon$. Siis

$$\mu(X \setminus F_0) \leq \mu(X \setminus F) + \mu(F \setminus F_0) < 2\varepsilon. \quad \square$$

Mitallinen funktio on suuressa osassa jatkuva:

**Lause 2.14** (Lusinin lause). *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen, $m(A) < \infty$ ja $f\colon A \to \mathbb{R}$ mitallinen. Tällöin*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \text{ kompakti } F \subset A \text{ s.e. } m(A \setminus F) < \varepsilon \text{ ja } f|F \text{ on jatkuva.}$$

**Tod.** Olkoon $\varepsilon > 0$. $\boxed{\text{(a):}}$ *Oletetaan, että $f$ on yksinkertainen.*

$$f = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i} .$$

Lemma 2.12 $\Rightarrow$ $\exists$ kompaktit $F_i \subset A_i$ s.e. $m(A_i \setminus F_i) < \varepsilon/k$. Tällöin $F = F_1 \cup \cdots \cup F_k$ kompakti ja $F_i$:t erillisiä. Jos $x \in F$, niin $\exists\ r > 0$ s.e. $B(x,r) \cap F_i \neq \emptyset$ *vain yhdellä $i$.*

$$(\text{Syy:}\quad x \in F_i \Rightarrow \ \operatorname{dist}(x, F_j) = \inf_{y \in F_j} |x-y| \overset{F_j \text{ kokti}}{=} \min_{y \in F_j} |x-y| > 0 \ \forall j \neq i\,.)$$

Siis

$$f(y) = f(x) = a_i \ \forall y \in B(x,r) \cap F\,,$$

joten $f|F$ on lokaalisti vakio ja siten $f|F$ jatkuva. Myös

$$m(A \setminus F) = m\Big(\bigcup_{i=1}^{k} (A_i \setminus F_i)\Big) \overset{\text{erill.}}{=} \sum_{i=1}^{k} m(A_i \setminus F_i) < \varepsilon\,.$$

$\boxed{\text{(b):}}$ *Oletetaan, että $f \geq 0$ on mitallinen.* L. 2.9 $\Rightarrow$ $\exists$ yksinkertaiset funktiot $f_j$ s.e. $f_j \nearrow f$. Todistuksen (a)-kohta $\Rightarrow$ $\exists$ kompaktit $F_j \subset A$ s.e.

$$f_j|F_j \ \text{ jatkuva ja } \ m(A \setminus F_j) < \frac{\varepsilon}{2^j}\,.$$

Olkoon $F_0 = \bigcap_j F_j$, jolloin

$$m(A \setminus F_0) = m\Big(\bigcup_j (A \setminus F_j)\Big) \leq \sum_j m(A \setminus F_j) < \sum_j \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon\,.$$

Egorovin lause $\Rightarrow$

$$\exists \text{ kompakti } F \subset F_0 \text{ s.e. } f_j|F \to f|F \text{ tasaisesti ja } m(F_0 \setminus F) < \varepsilon\,.$$

Nyt

$$\left.\begin{array}{c} f_j|F \text{ jatkuva} \\ f_j|F \to f|F \text{ tasaisesti} \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ f|F \text{ jatkuva,}$$

$$\text{lisäksi } m(A \setminus F) = m(A \setminus F_0) + m(F_0 \setminus F) < 2\varepsilon\,.$$

$\boxed{\text{(c):}}$ *Oletetaan, että $f$ on mitallinen* ja kirjoitetaan $f = f^+ - f^-$. Todistuksen (b)-kohta $\Rightarrow$ $\exists$ kompaktit $F_1, F_2 \subset A$ s.e. $f^+|F_1,\ f^-|F_2$ jatkuvia ja $m(A \setminus F_i) < \varepsilon/2,\ i = 1,2$. Joukko $F = F_1 \cap F_2$ toteuttaa ehdot. $\square$

**Huomautus 2.15.** 1. Egorovin ja Lusinin lauseissa on $f$:n reaaliarvoisuus oleellista, ts. arvoja $\pm\infty$ ei sallita.

2. Oletus $\mu(X) < \infty$ Egorovin lauseessa on oleellinen: Esim: $X = \mathbb{R}$, $f_j = \chi_{[j,\infty[}$. Silloin $f_j(x) \to 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Merkitään $f = 0$. Jos $F \subset \mathbb{R}$ s.e. $f_j|F \to f|F$ tasaisesti, niin $\exists j_0$ s.e.

$$\begin{aligned} |f_j(x) - f(x)| = |f_j(x)| < \frac{1}{2}\,, \text{ kun } j \geq j_0, x \in F \\ \Rightarrow \ F \cap [j,\infty[= \emptyset \ \forall j \geq j_0 \\ \Rightarrow \ [j,\infty[ \subset \mathbb{R} \setminus F \ \Rightarrow \ m(\mathbb{R} \setminus F) = \infty\,. \end{aligned}$$

3. Lusinin lause pätee myös tapauksessa $m(A) = \infty$, jos vaaditaan vain, että $F$ on suljettu. (HT)

### 2.16 Konvoluutio $\mathbb{R}^n$:ssä

Tässä luvussa mitta-avaruutena on $(\mathbb{R}^n, \operatorname{Leb}\mathbb{R}^n, m)$.

Olkoon $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Kuvaus $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(y) = x - y$, missä $x \in \mathbb{R}^n$ on vakio, toteuttaa:

$$\varphi(A) \text{ mitallinen } \iff A \text{ mitallinen.}$$

Siten

$$\begin{aligned} & y \mapsto f(x-y) \text{ on mitallinen} \\ \Rightarrow \ & y \mapsto f(x-y)g(y) \text{ on mitallinen.} \end{aligned}$$

Näin ollen integraali

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dm(y)$$

on määritelty, jos $f, g \geq 0$.
Kysymyksiä: Milloin $h(x) < \infty$? Voidaanko $h$ määritellä, jos ei oleteta $f, g \geq 0$?

**Lause 2.17.** *Oletetaan, että $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Tällöin*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|dm(y) < \infty \ \text{m.k. } x \in \mathbb{R}^n\,. \tag{2.18}$$

*Näillä $x$ merkitään*

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dm(y)\,. \tag{2.19}$$

*Tällöin $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ja*

$$\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1\,. \tag{2.20}$$

*Funktiota $h$ kutsutaan $f$:n ja $g$:n* konvoluutioksi *ja merkitään $h = f * g$.*

**Tod.** Käytämme Fubinia funktioon $F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x-y)g(y)$, joka on siksi osoitettava mitalliseksi. Tätä ennen:
Väite: $\exists$ Borel-funktiot $f_0, g_0\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s.e.

$$\begin{aligned} f_0 &= f \text{ m.k.} \\ g_0 &= g \text{ m.k.} \end{aligned}$$

(ts. $f_0^{-1}U$, $g_0^{-1}U \in \operatorname{Bor}\mathbb{R}^n$ $\forall$ avoimilla $U \subset \mathbb{R}$.)
<u>Tod.</u> $f^+$ mitall. $\Rightarrow$ $\exists$ jono 1-kert. funktioita $0 \le f_1 \le f_2 \le \cdots$ s.e.

$$\begin{aligned} f_j &\nearrow f^+ , \\ f_j &= \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i} . \end{aligned}$$

Valitaan[4] Borel-joukot $B_i \subset A_i$ s.e. $m(A_i \setminus B_i) = 0$. Tällöin

$$\begin{aligned} \varphi_j &= \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{B_i} \text{ on Borel-funktio, } 0 \le \varphi_j \le f_j \text{ ja } \varphi_j = f_j \text{ m.k.;} \\ \varphi^+ &= \liminf_{j\to\infty} \varphi_j \text{ Borel-funktio ja } \varphi^+ = f^+ \text{ m.k.} \end{aligned}$$

(Huom. $(\varphi_j)$ ei vältt. kasvava jono $\Rightarrow$ $\lim_{j\to\infty}\varphi_j$ ei vältt. olemassa.)
Samoin $\exists$ Borel-funktio $\varphi^- = f^-$ m.k.
Nyt $f_0 = \varphi^+ - \varphi^-$ Borel-funktio ja $f_0 = f$ m.k.
Samoin $g$:lle.
Integraalit (2.18) ja (2.19) eivät muutu, jos $f$ ja $g$ korvataan $f_0$:lla ja $g_0$:lla. $\Rightarrow$
<u>Voi olettaa</u>: $f, g$ Borel-funktioita.
<u>Väite</u>: $F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = f(x-y)g(y)$, on Borel-funktio.
<u>Tod.</u> Kuvaukset $u\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $u(x,y) = x - y$, ja $v\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $v(x,y) = y$, jatkuvia.
Nyt $F(x,y) = f\big(u(x,y)\big)g\big(v(x,y)\big)$, eli

$$F = (f\circ u)(g\circ v).$$

Olkoon $V \subset \mathbb{R}$ avoin. Koska $f$ on Borel-funktio, on $f^{-1}V \in \operatorname{Bor}\mathbb{R}^n$. Edelleen

$$(f\circ u)^{-1}V = u^{-1}(\underbrace{f^{-1}V}_{\in \operatorname{Bor}\mathbb{R}^n}) \in \operatorname{Bor}\mathbb{R}^{2n},$$

sillä $u\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ on jatkuva (ks. L. 1.7). Siis $f\circ u$ on Borel-funktio. Samoin nähdään, että $g\circ v$ on Borel-funktio, joten $F$ on kahden Borel-funktion tulona Borel-funktio (erityisesti "alkuperäinen" $F$ on mitallinen).
Fubini 1. $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |F(x,y)|dy\right)dx &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |F(x,y)|dx\right)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(|g(y)|\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|dx\right)dy \\ &= \|f\|_1\|g\|_1 < \infty , \end{aligned}$$

sillä

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|dx = \|f\|_1. \tag{2.21}$$

Siis (2.18) pätee.

---
[4]Lemma 2.12, 2-kohta $\Rightarrow$ $\exists$ $\mathcal{F}_\sigma$-joukko $B_i \subset A_i$ s.e. $m(A_i \setminus B_i) = 0$.

Fubini 2. $\Rightarrow\ h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ja

$$\begin{aligned}\|h\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Big| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy\Big| dx \\ &\le \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |F(x,y)|dy \right) dx = \|f\|_1 \|g\|_1 . \quad \square\end{aligned}$$

**Huomautus 2.22.** Yhtäsuuruus (2.21) pätee Lebesguen mitan siirto-invarianssin perusteella: Jos

$$f = \sum_{j=1}^{k} a_j \chi_{A_j}$$

on 1-kertainen ja $\varphi(x) = x - y$ siirto, niin $\varphi^{-1}(x) = x + y$,

$$f \circ \varphi = \sum_{j=1}^{k} a_j \chi_{\varphi^{-1}A_j} \quad \text{ja} \quad m(\varphi^{-1}A_j) = m(A_j)$$

$$\Rightarrow \int f \circ \varphi = \sum_{j=1}^{k} a_j m(\varphi^{-1}A_j) = \sum_{j=1}^{k} a_j m(A_j) = \int f .$$

Ts. (2.21) pätee 1-kertaisille funktioille. Tämän jälkeen yleinen tapaus seuraa integraalin määritelmästä.

Kysymys: Miksi käytettiin Borel-joukkoja/funktioita, eikä pelkästään mitallisia joukkoja/funktioita?
Syy: $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mitallinen ja $E \in \operatorname{Leb}\mathbb{R}^m \not\Rightarrow\ g^{-1}E \in \operatorname{Leb}\mathbb{R}^n$.

## 2.23 Approksimointi $C^\infty$-funktioilla

Merkintöjä:
Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n,\ f\colon A \to \mathbb{R}$. Merkitään

$$\begin{aligned}&\operatorname{spt} f = A \cap \overline{\{x \in A\colon f(x) \neq 0\}} \quad (f\text{:n } \textit{kantaja}),\\ &f \in C(A) = C^0(A) \iff f \text{ jatkuva.}\end{aligned}$$

Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin, $k \in \mathbb{N},\ f\colon U \to \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f \in C^k(U) &\iff f\text{:llä jatkuvat } k\text{:nnen kertaluvun osittaisderivaatat}\\ ( &\iff f \text{ on } k \text{ kertaa jatkuvasti differentioituva}),\\ f \in C^\infty(U) &\iff f \in C^k(U)\ \forall k,\\ f \in C_0^k(U) &\iff f \in C^k(U) \text{ ja } \operatorname{spt} f \subset U \text{ kompakti},\\ f \in C_0^\infty(U) &\iff f \in C^\infty(U) \text{ ja } \operatorname{spt} f \subset U \text{ kompakti}.\end{aligned}$$

Merkitään myös $f \in C^k$ jne.

**Lause 2.24.** *Jos $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ja $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$, niin $f * g \in C(\mathbb{R}^n)$.*

**Tod.** Suoritetaan muuttujan vaihto $x-y \mapsto y$. Integraali ei muutu (vrt. Huom. 2.22), joten

$$f*g(x)=\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy\,,$$

joka on määritelty $\forall x$, sillä

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x-y)|dy \le M\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|dy = M\|f\|_1<\infty \;\forall x\,.$$

Tässä $M=\max|g|$ ($\exists$ maksimi, sillä $g$ on jatkuva ja kompaktikantajainen).

$$\left.\begin{aligned} &f*g(x+h)-f*g(x)=\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\big(g(x-y+h)-g(x-y)\big)dy \\ &\qquad g \text{ tasaisesti jatkuva } \mathbb{R}^n\text{:ssä}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \forall\varepsilon>0 \quad \exists\,\delta>0 \;\text{ s.e.}$$

$$|f*g(x+h)-f*g(x)| \le \int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|\underbrace{|g(x-y+h)-g(x-y)|}_{<\varepsilon}dy$$

$$<\varepsilon\underbrace{\|f\|_1}_{<\infty},\text{ kun } |h|<\delta \text{ ja } x\in\mathbb{R}^n$$

$\Rightarrow$ $f*g$ jatkuva $x$:ssä. □

**Huomautus 2.25.** Yo. todistus $\Rightarrow$ $f*g$ tasaisesti jatkuva $\mathbb{R}^n$:ssä.

**Lause 2.26.** *Jos* $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ *ja* $g\in C_0^k(\mathbb{R}^n)$, *niin* $f*g\in C^k(\mathbb{R}^n)$.

**Tod.** Kun $(z,t)\in\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})$, asetetaan

$$\varphi(z,t)=\frac{g(z+te_i)-g(z)}{t}-D_ig(z)\,,\quad \text{missä } e_1,\dots,e_n \text{ on } \mathbb{R}^n\text{:n stand. kanta.}$$

Väliarvolause $\Rightarrow$

(2.27) $$\varphi(z,t)=D_ig(z+\vartheta te_i)-D_ig(z)\,,\quad \text{jollakin } 0<\vartheta<1\,.$$

$g\in C_0^k(\mathbb{R}^n)$ $\Rightarrow$ $D_ig$ tasaisesti jatkuva $\mathbb{R}^n$:ssä $\overset{(2.27)}{\Longrightarrow}$ $\varphi(z,t)\to 0$ tasaisesti $\mathbb{R}^n$:ssä, kun $t\to 0$, eli

$$\sigma(t)=\sup_{z\in\mathbb{R}^n}|\varphi(z,t)| \xrightarrow{t\to 0} 0\,.$$

Olkoon $x\in\mathbb{R}^n$. Silloin

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0}\left|\frac{f*g(x+te_i)-f*g(x)}{t}-f*D_ig(x)\right|\\ &=\lim_{t\to 0}\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\left(\frac{g(x+te_i-y)-g(x-y)}{t}-D_ig(x-y)\right)dy\right|\\ &\le\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|\underbrace{|\varphi(x-y,t)|}_{\le\sigma(t)}dy\\ &\le\lim_{t\to 0}\sigma(t)\|f\|_1=0\,,\end{aligned}$$

joten

$$D_i\big(f * g\big)(x) = f * D_i g(x)\,.$$

$D_i g \in C_0(\mathbb{R}^n) \overset{2.24}{\Longrightarrow} D_i(f * g) \in C(\mathbb{R}^n)$. Toistamalla saadaan

$$D\big(f * g\big) = f * Dg\,,$$

missä $D$ on mikä tahansa kertalukua $p \le k$ oleva osittaisderivaatta. □

**Huomautus 2.28.** Lauseet 2.24 ja 2.26 pätevät myös funktioille $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$. Syy: todistuksissa ei tarvitse integroida yli koko $\mathbb{R}^n$:n, vaan riittää integroiminen yli riittävän ison kompaktin joukon $K$, sillä $g$ on kompaktikantajainen. Nimittäin Hölderin ey. $\Rightarrow$

$$\int_K |f| \le m(K)^{\frac{p-1}{p}} \Big(\int_K |f|^p\Big)^{1/p} \le m(K)^{\frac{p-1}{p}} \|f\|_p\,,$$

jos $p > 1$ (tulkintaan yllä: $\frac{p-1}{p} = 1$, jos $p = \infty$).

Tavoitteena käyttää konvoluutiota approksimoitaessa $L^p$-funktioita ($1 \le p < \infty$) $C_0^\infty$-funktioilla. Tätä varten:

**Lause 2.29.** *Jos* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, *niin*

$$\lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p dx = 0\,.$$

**Tod.** Olkoon $\varepsilon > 0$. Näytettävä: $\exists\ \eta > 0$ s.e.

$$|h| < \eta \ \Rightarrow \ \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p dx < \varepsilon\,.$$

Merkitään

$$\begin{aligned} I_h(A) &= \int_A |f(x+h) - f(x)|^p dx\,, \quad A \in \operatorname{Leb} \mathbb{R}^n, \\ B_k &= B(0,k) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| < k\}\,, \quad k > 1\,. \end{aligned}$$

Olkoon $h \in B(0,1)$. (Tällöin $|x| \ge k \ \Rightarrow \ |x+h| \ge k-1$. )
Nyt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_k} |f(x+h) - f(x)|^p dx &\le \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_k} 2^p \big(|f(x+h)|^p + |f(x)|^p\big) dx \\ &\le 2^p \left( \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{k-1}} |f|^p + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_k} |f|^p \right) \xrightarrow{\text{DKL}} 0, \quad \text{kun } k \to \infty\,. \end{aligned}$$

$\Rightarrow\ \exists\ k$ s.e.

$$I_h(\mathbb{R}^n \setminus B_k) < \varepsilon/4\,. \tag{2.30}$$

Samoin

$$I_h(A) \le 2^p \left( \int_{A+h} |f|^p + \int_A |f|^p \right), \quad \text{kun } A \in \operatorname{Leb} \mathbb{R}^n \text{ ja } A + h = \{a + h \colon a \in A\}.$$

Integraali absoluuttisesti jatkuva Lebesguen mitan suhteen, joten L. 2.5 $\Rightarrow$ $\exists\ \delta > 0$ s.e.

$$I_h(A) < \varepsilon/4\,, \quad \text{kun } m(A) < \delta\,. \tag{2.31}$$

Lusinin lause $\Rightarrow$ $\exists$ kompakti $F \subset B_{k+1}$ s.e.

$$m(B_{k+1} \setminus F) < \delta \ \text{ ja } \ f|F \text{ jatkuva.}$$

$F$ kompakti $\Rightarrow$

$$f|F \text{ tasaisesti jatkuva.}$$

$\Rightarrow$ $\exists\ \eta \in ]0,1[$ s.e.

$$|f(x+h) - f(x)|^p < \frac{\varepsilon}{4m(F)}, \quad \text{kun } |h| < \eta \text{ ja } x, x+h \in F\,. \tag{2.32}$$

Olkoon $h \in B(0,\eta)$ mielivaltainen. Merkitään

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x \in F \colon x+h \in F\}, \\ A_2 &= \{x \colon x+h \in B_{k+1} \setminus F\}, \\ A_3 &= B_{k+1} \setminus F\,. \end{aligned}$$

(Havaitaan: $A_2 = A_3 - h$, joten $m(A_2) = m(A_3) = m(B_{k+1} \setminus F) < \delta$.)
Tällöin

$$x \in B_k \ \Rightarrow \ x+h \in B_{k+1}\,,$$

joten

$$\begin{aligned} B_k \cap F &\subset \{x \in F \colon x+h \in B_{k+1}\} \subset \underbrace{\{x \in F \colon x+h \in F\}}_{=A_1} \cup \underbrace{\{x \in F \colon x+h \in B_{k+1} \setminus F\}}_{\subset A_2} \\ &\subset A_1 \cup A_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ B_k = \underbrace{(B_k \setminus F)}_{\subset A_3} \cup \underbrace{(B_k \cap F)}_{\subset A_1 \cup A_2} \subset A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

Siis $\mathbb{R}^n = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup (\mathbb{R}^n \setminus B_k)$ ja

$$I_h(\mathbb{R}^n) \le I_h(A_1) + I_h(A_2) + I_h(A_3) + I_h(\mathbb{R}^n \setminus B_k)\,.$$

Arvioidaan oikean puolen termejä:

$$\left.\begin{array}{l} (2.32) \ \Rightarrow \ I_h(A_1) = \displaystyle\int_{A_1} \underbrace{|f(x+h) - f(x)|^p}_{< \frac{\varepsilon}{4m(F)}}\, dx \underset{A_1 \subset F}{<} \varepsilon/4 \\ (2.31) \ \Rightarrow \ I_h(A_2) < \varepsilon/4 \\ (2.31) \ \Rightarrow \ I_h(A_3) < \varepsilon/4 \\ (2.30): \quad I_h(\mathbb{R}^n \setminus B_k) < \varepsilon/4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$I_h(\mathbb{R}^n) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p dx < \varepsilon\,. \quad \square$$

Määritellään $\eta\colon \mathbb{R} \to [0,\infty[$,

$$\eta(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{t^2-1}}, & \text{kun } |t| < 1, \\ 0, & \text{kun } |t| \geq 1. \end{cases}$$

Olkoon $|t| < 1$. Tällöin

$$\begin{aligned} &\eta^{(k)}(t) = \frac{e^{\frac{1}{t^2-1}} \cdot P_{3k}(t)}{(t^2-1)^{2k}}; \quad P_{3k} = 3k\text{:n asteen polynomi}, \\ &\Rightarrow \eta^{(k)}(t) \to 0, \quad \text{kun } t \to 1 \text{ tai } t \to -1\,. \\ &\Rightarrow \eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})\,. \end{aligned}$$

Halutaan funktio $\varphi_k\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty[$, $k \in \mathbb{N}$, s.e.

(a) $\varphi_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

(b) $\operatorname{spt}\varphi_k \subset \bar{B}_{1/k} = \bar{B}(0,1/k)$,

(c) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k = 1$.

Voidaan valita

$$\varphi_k(x) = a_k \eta(k|x|)\,, \tag{2.33}$$

missä vakio $a_k$ valitaan s.e. (c) toteutuu.

Todetaan seuraavaksi: Jos $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ja $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ (ts. $g$ jatkuva ja $\operatorname{spt} g$ kompakti), niin

$$y \mapsto f(x-y)g(y) \quad \text{on integroituva } \forall x\,, \text{ sillä}$$
$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \underbrace{|g(y)|}_{\leq M < \infty} dy \leq M \int_{\operatorname{spt} g} |f(x-y)| dy = M \int_A |f(y)| dy < \infty\,,$$

missä $A = x - \operatorname{spt} g = \{x - z \colon z \in \operatorname{spt} g\}$, ja pätee:

$$f \in L^p(A),\ m(A) < \infty \ \Rightarrow\ f \in L^1(A)\,.$$

Siis konvoluutio $f * g(x)$ on määritelty $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Sovelletaan tätä tapaukseen:

$$\begin{aligned} &g_k\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty[ \ \text{ jatkuva}, \\ &\operatorname{spt} g_k \subset \bar{B}_{1/k}, \\ &\int_{\mathbb{R}^n} g_k = 1\,. \end{aligned}$$

**Lause 2.34.** *Olkoot $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, ja $g_k$ kuten edellä. Tällöin*

$$\lim_{k\to\infty} \|f - f * g_k\|_p = 0\,.$$

**Tod.**

$$\begin{aligned}
f(x) - f * g_k(x) &= f(x)\int_{\mathbb{R}^n} g_k(y)dy - \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g_k(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(f(x) - f(x-y)\right) g_k(y)dy \\
\Rightarrow\ |f(x) - f * g_k(x)| &\le \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-y)| g_k(y)dy\,.
\end{aligned}$$

Jos $p > 1$,

$$\begin{aligned}
|f(x) - f * g_k(x)|^p &\le \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-y)| g_k(y)dy\Big)^p \\
&= \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-y)| \underbrace{g_k(y)^{1/p} g_k(y)^{1/q}}_{=g_k(y)} dy\Big)^p \quad (\text{missä } q = \frac{p}{p-1}) \\
&\underset{\text{Hölder}}{\le} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-y)|^p g_k(y)dy \Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \Big(g_k(y)^{1/q}\Big)^q dy}_{=1}\Big)^{p/q} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-y)|^p g_k(y)dy\,.
\end{aligned}$$

Siis $\forall p \ge 1$:

$$\begin{aligned}
\|f - f * g_k\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f * g_k(x)|^p dx \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-y)|^p g_k(y)dy\right) dx \\
&\overset{\text{Fubini 1.}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} g_k(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-y)|^p dx\right) dy\,.
\end{aligned}$$

$\operatorname{spt} g_k \subset \bar{B}_{1/k} \ \Rightarrow$ voidaan olettaa $|y| \le 1/k$ sisimmässä integroinnissa.

$$\left.\begin{array}{r}
\text{L. 2.29} \ \Rightarrow\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-y)|^p dx \to 0, \\
\text{kun } k \to \infty \text{ ja } |y| \le 1/k \\[2ex]
\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} g_k = 1
\end{array}\right\} \Rightarrow \text{väite.} \quad \square$$

Selvästi avaruudet $C_0(\mathbb{R}^n)$ ja $C_0^k(\mathbb{R}^n)$, $k = 1, 2, \ldots, \infty$, ovat $L^p(\mathbb{R}^n)$:n vektorialiavaruuksia, ja jos ne varustetaan normilla $\|\cdot\|_p$, ne ovat myös normiavaruuksina $L^p(\mathbb{R}^n)$:n aliavaruuksia.

**Määritelmä 2.35.** Jos $W$ on normiavaruuden $(V, \|\cdot\|)$ aliavaruus, sanomme, että $W$ on *tiheä* $V$:ssä, jos $\forall v \in V\ \exists$ jono $w_1, w_2, \ldots \in W$ s.e. $\|w_i - v\| \to 0$, kun $i \to \infty$. (Eli $\bar{W} = V$.)

**Lause 2.36.** *$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ on $L^p(\mathbb{R}^n)$:n tiheä aliavaruus, kun $1 \le p < \infty$.*

**Tod.** Olkoon $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. On osoitettava: $\exists\ \psi_1, \psi_2, \ldots \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ s.e.

$$\|f - \psi_k\|_p \to 0, \ \text{kun } k \to \infty.$$

$\boxed{\text{(a):}}$ Oletetaan, että $\operatorname{spt} f$ on kompakti. Silloin $f \in L^1$. Valitaan funktiot $\varphi_k$ kuten (2.33):ssä. L. 2.26 $\Rightarrow$

$$f * \varphi_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Jos $d(x, \operatorname{spt} f) > 1/k$ ja $y \in \operatorname{spt} \varphi_k$ $(\subset \bar{B}(0, 1/k))$, niin $x - y \notin \operatorname{spt} f \;\Rightarrow$

$$f * \varphi_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\varphi_k(y)dy = 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{spt}(f * \varphi_k) \text{ kompakti.}$$

$$\text{L. 2.34} \quad \Rightarrow \; \|f - f * \varphi_k\|_p \xrightarrow{k\to\infty} 0,$$

joten valitaan $\psi_k = f * \varphi_k$. (Huom.: Yllä $\operatorname{spt}(f * \varphi_k)$ on kompakti, koska se on sekä suljettu että rajoitettu.)

$\boxed{\text{(b):}}$ Yleinen tapaus: $\operatorname{spt} f$ ei ole välttämättä kompakti. Olkoon $\varepsilon > 0$. Merkitään

$$f_j = f\chi_{B_j}, \quad B_j = B(0, j).$$

Tällöin $f_j \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{spt} f_j$ kompakti. Lisäksi on olemassa $j_0$ s.e.

$$\|f - f_j\|_p < \varepsilon/2 \quad \forall j \geq j_0.$$

(a)-kohta $\Rightarrow$ $\exists\, \psi_1^j, \psi_2^j, \ldots \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ s.e.

$$\|f_j - \psi_k^j\|_p < \varepsilon/2, \quad \text{kun } k \geq k_j.$$

Tällöin

$$\|f - \psi_{k_j}^j\|_p < \varepsilon \quad \forall j \geq j_0. \quad \square$$

# 3 Derivointi

Tässä luvussa tutkimme mm. integraalien määräämien funktioiden derivoitumista sekä kysymystä, milloin funktio $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ saadaan takaisin integroimalla sen derivaattaa $f'$?

**Esimerkki 3.1.**

1. (Diff I:) Olkoon $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuva ja

   $$G(x) = \int_a^x g(t)dt, \quad x \in [a,b].$$

   Silloin $G$ on derivoituva ja $G'(x) = g(x)$, $x \in [a,b]$.

2. Pätee 1-kohtaa yleisempi tulos (*Lebesguen lause*): Olkoon $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integroituva. Silloin funktio $G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$,

   $$G(x) = \int_a^x g(t)dt,$$

   on derivoituva m.k. ja

   $$G'(x) = g(x) \quad \text{m.k. } x \in [a,b].$$

3. 1-kohta toisin päin (lähtien funktiosta):

   $$f \in C^1([a,b]) \;\Rightarrow\; \int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a).$$

4. Olkoon $f\colon [0,1] \to [0,1]$ Cantorin 1/3-funktio. Silloin $f$ on jatkuva kasvava surjektio ja $f'(t) = 0$ m.k. $t \in [0,1]$ ($f'$ mitallinen), mutta

$$\int_0^1 f'(t)dt = \int_0^1 0dt = 0 \neq 1 = f(1) - f(0).$$

Tutkimme näitä kysymyksiä käyttäen työkaluina ”peitelauseita”. Niissä annettu $\mathbb{R}^n$:n joukko pyritään ”melkein” peittämään esim. suljetuilla erillisillä kuulilla. Erillisyys vaaditaan, jotta voidaan käyttää mitan täysadditiivisuutta.

## 3.2 Peitelauseita

Merkitään $kB = B(x,kr)$, jos $B = B(x,r)$ ja $k > 0$ (tai vastaavasti $kB = \bar{B}(x,kr)$, jos $B = \bar{B}(x,r)$). Huom: tämä merkintä poikkeaa aiemmasta (esim. [Ho, L. 1.9]).
Muistutus: Oletamme aina, että suljetussa kuulassa $\bar{B}(x,r)$ säde $r$ on *positiivinen* ($r > 0$).
$(\{y \in \mathbb{R}^n\colon |x-y| < 0\} = \emptyset,\ \{y \in \mathbb{R}^n\colon |x-y| \leq 0\} = \{x\})$

**Lause 3.3** (Peruspeitelause)**.** *Olkoon $\mathcal{F}$ mielivaltainen perhe $\mathbb{R}^n$:n kuulia s.e.*

$$D = \sup\{d(B)\colon B \in \mathcal{F}\} < \infty,$$

*missä $d(B) = B$:n halkaisija. Tällöin on olemassa numeroituva (mahdollisesti äärellinen) perhe $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ s.e.*

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall B_i, B_j \in \mathcal{G},\ B_i \neq B_j, \quad \textit{ts. } \mathcal{G}\textit{:n kuulat erillisiä; ja}$$
$$\bigcup_{B\in\mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B\in\mathcal{G}} 5B\,.$$

**Tod.**
$\boxed{1.}$ Merkitään

$$\mathcal{F}_j = \{B \in \mathcal{F}\colon D/2^j < d(B) \leq D/2^{j-1}\},\ j \in \mathbb{N},$$

jolloin $\mathcal{F} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{F}j$.
Määritellään perheet $\mathcal{G}_j \subset \mathcal{F}_j$ induktiivisesti:

(a) Olkoon $\mathcal{G}_1$ mikä tahansa *maksimaalinen* perhe $\mathcal{F}_1$:n erillisiä kuulia, ts.

$$B \in \mathcal{F}_1 \ \Rightarrow\ \exists B' \in \mathcal{G}_1 \text{ s.e. } B \cap B' \neq \emptyset.$$

(Eli: Jos $\mathcal{G}_1$:een lisätään mikä tahansa $\mathcal{F}_1$:n kuula, niin erillisyysvaatimus rikkoontuu.)

(b) Oletetaan, että $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_{k-1}$ on valittu. Olkoon $\mathcal{G}_k$ mikä tahansa *maksimaalinen* kokoelma $\mathcal{F}_k$:n erillisiä kuulia $B$ s.e.

$$B \cap B' = \emptyset \quad \forall B' \in \bigcup_{j=1}^{k-1} \mathcal{G}_j.$$

Merkitään

$$\mathcal{G} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{G}_j,$$

jolloin $\mathcal{G}$ ($\subset \mathcal{F}$) on perhe erillisiä kuulia.
$\boxed{2.}$ <u>Väite:</u> $\mathcal{G}$ on numeroituva.
<u>Tod.</u> Riittää osoittaa: $\mathcal{G}_j$ numeroituva $\forall j$. Kirjoitetaan

$$\mathcal{G}_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{G}_{j,i}, \quad \text{missä } \mathcal{G}_{j,i} = \{B \in \mathcal{G}_j \colon B \subset \bar{B}(0,i)\},$$

ja osoitetaan, että $\mathcal{G}_{j,i}$ on äärellinen (mahd. $= \emptyset$), jolloin $\mathcal{G}_j$:t ja siten $\mathcal{G}$ ovat numeroituvia.

$$\left.\begin{array}{r} B \in \mathcal{G}_{j,i} \ \Rightarrow \ d(B) > D/2^j \text{ ja } B \subset \bar{B}(0,i) \\ \bar{B}(0,i) \ \text{ kompakti} \end{array}\right\} \overset{(*)}{\Rightarrow} \mathcal{G}_{j,i} \ \text{ äärellinen.}$$

$\big[$($*$):n perustelu: <u>VO:</u> $\mathcal{G}_{j,i}$:ssä äärettömän monta erillistä kuulaa $\Rightarrow$ $\exists$ jono $x_k \in \bar{B}(0,i)$, $k \in \mathbb{N}$, s.e.

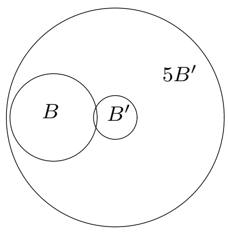
$$|x_k - x_l| \geq D/2^j \quad \forall k \neq l. \tag{3.4}$$

(Esim. $\forall x_k$ on jonkun $\mathcal{G}_{j,i}$:n kuulan keskipiste.) $\bar{B}(0,i)$ kompakti $\Rightarrow$ $\exists$ $(x_k)$:n osajono, joka suppenee, mutta tämä on RR (3.4):n kanssa.$\big]$
$\boxed{3.}$ <u>Väite:</u> $\forall B \in \mathcal{F}$ kohti $\exists$ $B' \in \mathcal{G}$ s.e. $B \cap B' \neq \emptyset$ ja $B \subset 5B'$. Erityisesti:

$$\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}} 5B\,.$$

<u>Tod.</u> Jos $B \in \mathcal{F}$, niin $B \in \mathcal{F}_k$ jollakin $k \in \mathbb{N}$. $\mathcal{G}_k$ maksimaalinen $\Rightarrow$ $\exists$ $B' \in \bigcup_{j=1}^{k} \mathcal{G}_j$ s.e. $B \cap B' \neq \emptyset$. Toisaalta

$$\left.\begin{array}{r} d(B') > D/2^k \text{ ja } d(B) \leq D/2^{k-1} \ \Rightarrow \ d(B) < 2d(B') \\ B \cap B' \neq \emptyset \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ B \subset 5B'\,. \quad \square$$




**Huomautus 3.5.** 1. Todistuksen 2. kohta saadaan myös suoraan perheen $\mathcal{G}$ kuulien erillisyydestä käyttämällä hyväksi $\mathbb{R}^n$:n separoituvuutta ($\mathbb{Q}^n$ on numeroituva tiheä $\mathbb{R}^n$:n osajoukko).

2. Peruspeitelause (yo. muodossaan) pätee myös metrisille avaruuksille $(X,d)$ tiettyjen lisäoletusten vallitessa. Lue todistus läpi uudelleen ja mieti, mitä vaatimuksia $(X,d)$:n on toteutettava, että todistus menisi läpi.

**Määritelmä 3.6.** Olkoon $\mathcal{V}$ perhe $\mathbb{R}^n$:n kuulia. Sanomme, että $\mathcal{V}$ on joukon $E \subset \mathbb{R}^n$ *Vitalin peite*, jos

$$\forall x \in E \text{ ja } \forall \varepsilon > 0 \text{ kohti } \exists B \in \mathcal{V} \text{ s.e. } x \in B \text{ ja } d(B) < \varepsilon\,.$$

Perhe $\mathcal{V}$ on suljettu Vitalin peite (vastaavasti avoin), jos jokainen $B \in \mathcal{V}$ on suljettu (vastaavasti avoin) kuula.

**Huomautus 3.7.** Jos $\mathcal{V}$ on joukon $E$ Vitalin peite ja $R > 0$, niin

$$\{B \in \mathcal{V} \colon d(B) < R\}$$

on myös $E$:n Vitalin peite.

Lauseen 3.3 todistuksesta saadaan:

**Seuraus 3.8.** Olkoon $\mathcal{V}$ joukon $E \subset \mathbb{R}^n$ suljettu Vitalin peite s.e. $d(B) < R \ \forall B \in \mathcal{V}$. Silloin on olemassa numeroituva perhe $\mathcal{G} \subset \mathcal{V}$ erillisiä kuulia siten, että jokaisella äärellisellä $\mathcal{G}^* \subset \mathcal{G}$ pätee:

$$E \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}^*} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}^*} 5B\,.$$

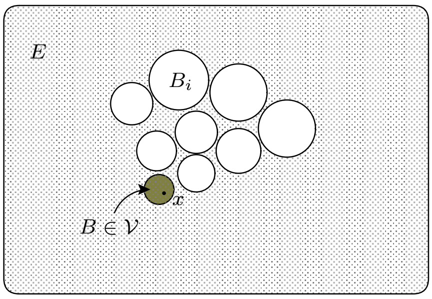
**Tod.** Olkoon $\mathcal{G} \subset \mathcal{V}$ kuten Lauseen 3.3 todistuksessa (huom. tällöin $\mathcal{G}$:ssä on äärettömän monta kuulaa). ja olkoon $\mathcal{G}^* = \{B_1, B_2, \ldots, B_m\} \subset \mathcal{G}$ mielivaltainen. Jos

$$E \subset \bigcup_{i=1}^m B_i\,, \quad \text{asia on selvä.}$$

Muussa tapauksessa olkoon $x \in E \setminus \bigcup_{i=1}^m B_i$. Tällöin $\bigcup_{i=1}^m B_i$ on kompakti (äärellisen monen suljetun kuulan yhdiste), joten

$$d\big(x, \bigcup_{i=1}^m B_i\big) = \inf\{|x-y| \colon y \in \bigcup_{i=1}^m B_i\} = \min\{|x-y| \colon y \in \bigcup_{i=1}^m B_i\} > 0\,.$$

Koska $\mathcal{V}$ on $E$:n Vitalin peite, niin $\exists\ B \in \mathcal{V}$ s.e. $x \in B$ ja $B \cap \big(\bigcup_{i=1}^m B_i\big) = \emptyset$ ($d(B)$ tarpeeksi pieni).




Lauseen 3.3 todistuksen 3.-osasta seuraa, että $\exists\ B' \in \mathcal{G}$ s.e. $B \cap B' \neq \emptyset$ ja $B \subset 5B'$. Erityisesti $x \in 5B'$. Nyt $B' \notin \mathcal{G}^*$, sillä $B \cap \big(\bigcup_{i=1}^m B_i\big) = \emptyset$. Siis $B' \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}^*$, joten

$$E \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}^*} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}^*} 5B\,. \quad \square$$

**Lause 3.9** (Vitalin peitelause)**.** *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ (ei välttämättä mitallinen) ja $\mathcal{V}$ $E$:n suljettu Vitalin peite. Silloin on olemassa* numeroituva *osaperhe $\mathcal{G} \subset \mathcal{V}$* erillisiä *kuulia s.e.*

$$m\big(E \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B\big) = 0.$$

**Tod.** $\boxed{1.}$ Oletetaan ensin, että $E$ on rajoitettu. Nyt voidaan olettaa, että $\exists$ rajoitettu, avoin $H \subset \mathbb{R}^n$ s.e. $B \subset H$ $\forall B \in \mathcal{V}$. Olkoon $\mathcal{G}$ kuten Lauseen 3.3 todistuksessa (ja Seuraus 3.8). Olkoon $\varepsilon > 0$. Osoitamme:

$$m^*\big(E \setminus \bigcup_{B\in\mathcal{G}} B\big) < \varepsilon\,,$$

josta väite seuraa (sillä $\varepsilon > 0$ mielivaltainen). $\mathcal{G}$:n kuulat erillisiä ja $\subset H$ $\Rightarrow$

$$\sum_{B\in\mathcal{G}} m(B) = m\big(\bigcup_{B\in\mathcal{G}} B\big) \le m(H) < \infty\,.$$

$\Rightarrow$ $\exists$ äärellinen $\mathcal{G}^* \subset \mathcal{G}$ s.e.

$$\sum_{B\in\mathcal{G}\setminus\mathcal{G}^*} m(B) < \varepsilon/5^n\,.$$

Seuraus 3.8 $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} m^*\underbrace{\big(E \setminus \bigcup_{B\in\mathcal{G}} B\big)}_{\subset E\setminus\cup_{B\in\mathcal{G}^*}B} &\le m^*\underbrace{\big(E \setminus \bigcup_{B\in\mathcal{G}^*} B\big)}_{\subset \cup_{B\in\mathcal{G}\setminus\mathcal{G}^*}5B} \le m\big(\bigcup_{B\in\mathcal{G}\setminus\mathcal{G}^*} 5B\big) \\ &\le \sum_{B\in\mathcal{G}\setminus\mathcal{G}^*} m(5B) = 5^n \sum_{B\in\mathcal{G}\setminus\mathcal{G}^*} m(B) < \varepsilon\,. \end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ mielivaltainen $\Rightarrow$

$$m\big(E \setminus \bigcup_{B\in\mathcal{G}} B\big) = 0\,.$$

$\boxed{2.}$ Yleinen tapaus: $E$ ei rajoitettu. Merkitään

$$A_1 = B(0,1) \text{ ja } A_i = B(0,i) \setminus \bar{B}(0,i-1),\ i \ge 2\,.$$

Silloin $A_i$:t ovat avoimia ja erillisiä, ja

$$m\big(\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^\infty A_i\big) = m\big(\bigcup_{i=1}^\infty S(0,i)\big) = 0\,, \quad S(0,i) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| = i\}\,.^5 \tag{3.10}$$

<u>Idea:</u> Sovelletaan 1.-osaa joukkoihin $E \cap A_i$, jolloin saadaan osaperheet $\mathcal{G}_i \subset \mathcal{V}$. Pidettävä huolta, *etteivät* $\mathcal{G}_i$:n ja $\mathcal{G}_j$:n kuulat leikkaa toisiaan. Tämä hoidetaan seuraavasti:

$A_i$ avoin, $x \in A_i$ $\Rightarrow$ $\exists\, r_x > 0$ s.e. $B(x,r) \subset A_i$ $\forall r \le r_x \Rightarrow$ $\mathcal{V}_i = \{B \in \mathcal{V} \colon B \subset A_i\}$ on $E \cap A_i$:n Vitalin peite.
$A_i$:t erillisiä $\Rightarrow$

$$\text{jos } B \in \mathcal{V}_i \text{ ja } B' \in \mathcal{V}_j, i \ne j, \text{ niin } B \cap B' = \emptyset. \tag{3.11}$$

1.-osa $\Rightarrow$ $\exists$ numeroituva perhe $\mathcal{G}_i \subset \mathcal{V}_i$ erillisiä kuulia s.e.

$$m\big((E \cap A_i) \setminus \bigcup_{B\in\mathcal{G}_i} B\big) = 0\,. \tag{3.12}$$

[5] Keksi yksinkert. perustelu, miksi $m_n\big(S(0,i)\big) = 0$.

Tällöin $\mathcal{G} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{G}_i$ toteuttaa ehdot. Selvästi $\mathcal{G}$ numeroituva ja $\mathcal{G}$:n kuulat erillisiä (ks. (3.11)). Lisäksi

$$E \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B = \underbrace{\Big((E \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big)}_{\text{0-mittainen (ks. (3.10))}} \cup \underbrace{\Big((E \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B) \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)\Big)}_{=\bigcup_{i=1}^{\infty}\big((E\cap A_i)\setminus \bigcup_{B\in\mathcal{G}_i} B\big)}$$

$$\Rightarrow \; m\big(E \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B\big) \le \sum_{i=1}^{\infty} m\big((E \cap A_i) \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}_i} B\big) \overset{(3.12)}{=} 0\,. \quad \square$$

**Huomautus 3.13.** Myös Vitalin peitelause pätee tietyille "metrisille mitta-avaruuksille" $(X, d, \Gamma, \mu)$. Käy läpi yo. todistusta ja mieti mitä ominaisuuksia $(X, d)$:ltä ja mitalta $\mu$ kussakin vaiheessa vaaditaan.

## 3.14 Maksimaalifunktio

Aloitetaan seuraavalla hyödyllisellä tuloksella:

Olkoon $(X, \Gamma, \mu)$ mitta-avaruus ja $g\colon X \to [0, +\infty]$ mitallinen. Funktiota $[0, +\infty) \to [0, +\infty]$,

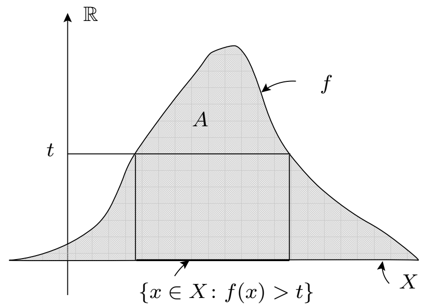
$$t \mapsto \mu\big(\{x\colon g(x) > t\}\big),$$

sanotaan $g$:n *distribuutiofunktioksi*. Se on vähenevä ja siten mitallinen (HT).

**Lemma 3.15.** *Olkoon* $f\colon X \to [0, +\infty]$ *mitallinen ja* $0 < p < \infty$. *Silloin*

$$\int_X f^p d\mu = p \int_0^{\infty} t^{p-1} \mu\big(\{x\colon f(x) > t\}\big) dt\,. \tag{3.16}$$

**Tod.** (HT) Ohjeet: (i) Oletetaan ensin, että $f$ on 1-kertainen ja osoitetaan (suoralla laskulla), että (3.16) pätee. (ii) Yleisessä tapauksessa valitaan jono 1-kertaisia funktioita $f_k \nearrow f$ ja käytetään monotonisen konvergenssin lausetta. $\square$




Yo. kuvassa $\int_X f d\mu = \int_0^{\infty} \mu\big(\{x \in X : f(x) > t\}\big) dt$ voidaan tulkita varjostetun joukon $A$ "tulomitaksi" $(\mu \times m_1)(A)$.

Merkitään $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, jos $f\colon \mathbb{R}^n \to \dot{\mathbb{R}}$ on mitallinen ja

$$\int_K |f| < \infty \quad \forall \text{ kompaktilla } K \subset \mathbb{R}^n.$$

Sanomme: $f$ lokaalisti integroituva (tai lokaalisti $L^1$:ssä).

**Huomautus 3.17.** 1. $f \in C(\mathbb{R}^n) \;\Rightarrow\; f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

2. $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \;\Rightarrow\; f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Käänteinen "$\Leftarrow$" ei päde: esim. $f(x) \equiv 1$.

Tavoitteena todistaa:

$$f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \;\Rightarrow\; \lim_{r\to 0+} \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} f(y)dy = f(x) \;\text{ m.k. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Kun $A \in \operatorname{Leb}\mathbb{R}^n$ ja $m(A) > 0$, merk.

$$\fint_A f(y)dy = \frac{1}{m(A)} \int_A f(y)dy,$$

$f$:n "integraalikeskiarvo" yli $A$:n.

**Määritelmä 3.18.** Kun $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ja $x \in \mathbb{R}^n$, asetetaan

$$Mf(x) = \sup_{B \ni x} \fint_B |f(y)|dy,$$

missä $B$ on (mikä tahansa) avoin kuula, joka sisältää $x$:n. Funktio $Mf\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ on $f$:n (Hardy-Littlewood) *maksimaalifunktio*.

Huom. Kirjallisuudessa esiintyy eri tyyppisiä maksimaalifunktioita. Usein esim. otetaan supremum yli $x$-keskisten kuulien $B(x,r)$ (ks. esim. Tyllin luentomuistiinpanot). Tällöin saadaan funktion $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ "keskitetty" maksimaalifunktio, jota merkitsemme $\tilde{M}f$:lla,

$$\tilde{M}f(x) = \sup_{r>0} \fint_{B(x,r)} |f(y)|dy.$$

Pätee: $\tilde{M}f(x) \le Mf(x) \le 2^n \tilde{M}f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ (HT 5/2). Tästä syystä on usein samantekevää kumpaa maksimaalifunktiota käytetään.

**Lemma 3.19.** *Maksimaalifunktio* $Mf\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ *on mitallinen.*

**Tod.** Merkitään $E_t = \{x\colon Mf(x) > t\}$. Osoitetaan vahvempi tulos, että $E_t$ on avoin[6] $\forall t \in \mathbb{R}$ (ja siten erityisesti mitallinen). Olkoon $x \in E_t$. Silloin $\exists$ avoin kuula $B \ni x$ s.e.

$$\fint_B |f(y)|dy > t.$$

Tällöin $\forall y \in B$ pätee:

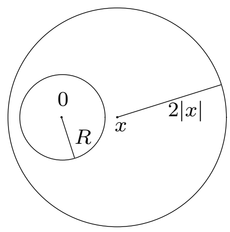
$$Mf(y) \overset{\sup}{\ge} \fint_B |f(y)|dy > t \;\Rightarrow\; y \in E_t.$$

Siis $B \subset E_t$ ja siten $E_t$ on avoin. $\square$

[6] Topologisen avaruuden $X$ funktio $u\colon X \to \dot{\mathbb{R}}$ on *alhaalta puolijatkuva*, jos $\{x \in X\colon u(x) > t\}$ on avoin $\forall t \in \mathbb{R}$. Vast. tavalla määr. ylhäältä puolijatkuvuus. Siten $u$ on jatkuva $\iff$ $u$ on sekä alhaalta että ylhäältä puolijatkuva. Siis: Lemman 3.19 todistus $\Rightarrow$ $Mf$ alh. puolijatkuva.

**Huomautus 3.20.** 1. Mitä voidaan sanoa $Mf$:n integroituvuudesta?
Vastaus: $Mf$ on "hyvin harvoin" integroituva. Tarkemmin: $Mf \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f = 0$ m.k.
Syy: Ensin muistutus: $m\big(B(x,r)\big) = c_n r^n$, missä $c_n$ on $n$:stä riippuva vakio. Tehdään vastaoletus: $f = 0$ m.k. *ei* päde. Silloin $\int_{\mathbb{R}^n} |f| > 0$, joten $\exists R > 0$ s.e.

$$\underbrace{\int_{B(0,R)} |f(y)|dy}_{\overset{\text{merk.}}{=} I} > 0.$$




Jos $x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0,R)$, niin $B(0,R) \subset B(x, 2|x|)$ (ks. kuva) ja

$$Mf(x) \geq \frac{1}{m\big(B(x,2|x|)\big)} \int_{B(x,2|x|)} |f(y)|dy \geq \frac{1}{c_n (2|x|)^n} \underbrace{\int_{B(0,R)} |f(y)|dy}_{=I>0}.$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)dx \geq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} Mf(x)dx \geq I \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} c_n^{-1}(2|x|)^{-n} dx = \infty,$$

sillä

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} c_n^{-1}(2|x|)^{-n} dx = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{B(0,2^{i+1}R) \setminus B(0,2^i R)} \underbrace{c_n^{-1}(2|x|)^{-n}}_{\geq c_n^{-1}(2^{i+2}R)^{-n}} dx$$

$$\geq \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{m\big(B(0,2^{i+1}R) \setminus B(0,2^i R)\big)}_{=c_n((2^{i+1}R)^n - (2^i R)^n)} c_n^{-1}(2^{i+2}R)^{-n}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{\frac{2^n - 1}{4^n}}_{=c>0} = \sum_{i=0}^{\infty} c = \infty.$$

2. *Chebyshevin epäyhtälö* (HT 4/1): $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow$ arvio

$$m\big(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}\big) \leq \frac{c}{t} \quad \forall t > 0 \tag{3.21}$$

pätee vakiolla $c = \|f\|_1$. Käänteinen *ei* päde: Mitallinen funktio $f$, jolle (3.21) on voimassa $\forall t > 0$ jollakin vakiolla $c$, ei ole välttämättä integroituva. (HT 5/1)

3. Sanomme, että mitallinen funktio $f : \mathbb{R}^n \to \dot{\mathbb{R}}$ kuuluu *heikkoon $L^1$-avaruuteen*, weak-$L^1(\mathbb{R}^n)$, jos on olemassa vakio $c = c_f < \infty$ siten, että (3.21) pätee $\forall t > 0$. Siis: $L^1(\mathbb{R}^n) \subset$ weak-$L^1(\mathbb{R}^n)$, mutta weak-$L^1(\mathbb{R}^n) \not\subset L^1(\mathbb{R}^n)$.

Osoittautuu, että integroituvan funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ maksimaalifunktio $Mf$ toteuttaa epäyhtälön (3.21). Tämä on $Mf$:n *tärkeimpiä* ominaisuuksia. Todistus nojaa Peruspeitelauseeseen 3.3.

**Lause 3.22** (Hardy-Littlewood)**.** *Jos* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *niin*

$$m\big(\{x \in \mathbb{R}^n \colon Mf(x) > t\}\big) \le \frac{5^n \|f\|_1}{t} \quad \forall t > 0. \tag{3.23}$$

**Tod.** Kiinnitetään $t > 0$ ja merkitään $M_t = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Mf(x) > t\}$. Tällöin $\forall x \in M_t$ $\exists$ avoin kuula $B_x \ni x$ (ei välttämättä $x$-keskinen) s.e.

$$\fint_{B_x} |f(y)|dy > t.$$

Toisin sanoen,

$$m(B_x) \le \frac{1}{t} \int_{B_x} |f(y)|dy \quad (\le \frac{\|f\|_1}{t}). \tag{3.24}$$

Olkoon $\mathcal{F} = \{B_x \colon x \in M_t\}$, jolloin (triviaalisti)

$$M_t \subset \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B.$$

Koska $m(B_x) = c_n (d(B_x)/2)^n$, niin

$$(3.24) \ \Rightarrow \ \sup\{d(B_x) \colon B_x \in \mathcal{F}\} \le 2 \left(\frac{\|f\|_1}{c_n t}\right)^{1/n} < \infty.$$

Voimme siis käyttää Peruspeitelausetta 3.3 $\Rightarrow$ $\exists$ *numeroituva* osaperhe $\mathcal{G} = \{B_1, B_2, \dots\} \subset \mathcal{F}$ *erillisiä* avoimia kuulia s.e.

$$M_t \subset \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B_i \in \mathcal{G}} 5B_i.$$

Siten

$$m(M_t) \le m\big(\cup_i 5B_i\big) \overset{\text{numer. yhd.}}{\le} \sum_i m(5B_i) = 5^n \sum_i m(B_i)$$

$$\overset{(3.24)}{\le} 5^n \sum_i \frac{1}{t} \int_{B_i} |f(y)|dy \overset{B_i\text{:t erill.}}{=} \frac{5^n}{t} \int_{\cup_i B_i} |f(y)|dy$$

$$\le \frac{5^n}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|dy. \quad \square$$

Huomautus 3.20:n mukaan $Mf \in L^1(\mathbb{R}^n) \ \Rightarrow \ f = 0$ m.k. Tilanne on täysin toinen, jos $p > 1$.

**Lause 3.25.** *Olkoon* $1 < p < \infty$ *ja* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. *Silloin* $Mf \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *ja on olemassa vakio* $c = c(p, n)$ *s.e.*

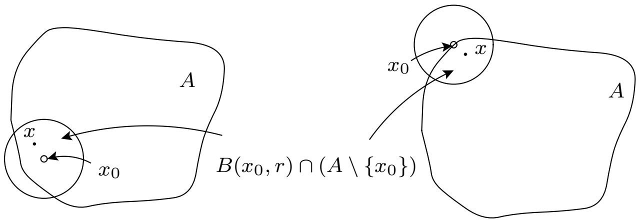
$$\|Mf\|_p \le c\|f\|_p.$$

**Tod.** Todistuksessa käytetään mm. Lemma 3.15:ta, Hardy-Littlewood lausetta ja Fubinia. (HT 5/5) $\square$

### 3.26 Lebesguen differentioituvuuslause

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$, $h\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$ ja $x_0$ $A$:n kasautumispiste (ts. $B(x_0,r) \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset \ \forall r > 0$). Määritellään

$$\limsup_{x\to x_0} h(x) = \lim_{r\to 0+} \sup\{h(x)\colon x \in B(x_0,r) \cap (A \setminus \{x_0\})\}.$$




Havainto: $0 < r_1 < r_2 \ \Rightarrow$

$$\sup\{h(x)\colon x \in B(x_0,r_1) \cap (A \setminus \{x_0\})\} \leq \sup\{h(x)\colon x \in B(x_0,r_2) \cap (A \setminus \{x_0\})\},$$

joten raja-arvo on olemasssa ($\pm\infty$ sallittu). Vastaavalla tavalla voidaan määritellä $\liminf$.

Motivaatio: Jos $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on jatkuva, niin

$$\lim_{r\to 0+} \fint_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|dy = 0 \tag{3.27}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$ (ks. allaolevan todistuksen 3-kohta). Toisaalta Lusinin lause sanoo, että mitallinen funktio on "melkein jatkuva" ($f$ mitallinen, $\varepsilon > 0 \ \Rightarrow \ \exists$ suljettu $F \subset \mathbb{R}^n$ s.e. $m(\mathbb{R}^n \setminus F) < \varepsilon$ ja $f|F$ jatkuva), joten herää kysymys, missä muodossa (3.27) pätee lokaalisti integroituville funktiolle.

**Lause 3.28** (Lebesguen differentioituvuuslause)**.** *Olkoon $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ lokaalisti integroituva funktio. Tällöin*

$$\lim_{r\to 0+} \fint_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|dy = 0 \quad \text{m.k. } x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.29}$$

*Erityisesti:*

$$\lim_{r\to 0+} \fint_{B(x,r)} f(y)dy = f(x) \quad \text{m.k. } x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.30}$$

**Tod.** Kun $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ja $x \in \mathbb{R}^n$, merk.

$$\Lambda f(x) = \limsup_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|dy.$$

(Huom.: $\Lambda f(x)$ on määritelty $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ja arvo riippuu $f(x)$ :stä eli erityisesti ekvivalenssiluokan edustajan valinnasta.)

Tällöin $\Lambda f$:lle pätee:

1. $\Lambda f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ (selvä).

2. $\Lambda$ on sublineaarinen, ts.

$$\Lambda(f+g) \le \Lambda f + \Lambda g, \quad \forall f,g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

<u>Perustelu:</u>

$$\begin{aligned}
\Lambda(f+g)(x) &= \limsup_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} |f(y)+g(y)-f(x)-g(x)|dy \\
&\overset{\triangle\text{-ey.}}{\le} \limsup_{r\to 0}\Big( \fint_{B(x,r)} |f(y)-f(x)|dy + \fint_{B(x,r)} |g(y)-g(x)|dy\Big) \\
&\le \limsup_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} |f(y)-f(x)|dy + \limsup_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} |g(y)-g(x)|dy \\
&= \Lambda f(x) + \Lambda g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

3. $g \in C(\mathbb{R}^n) \;\Rightarrow\; \Lambda g(x) = 0 \;\forall x \in \mathbb{R}^n$.
<u>Perustelu:</u> Kiinnitetään $x \in \mathbb{R}^n$ ja olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen.
$g$ jatkuva $x$:ssä $\Rightarrow \;\exists\, \delta > 0$ s.e. $|g(y)-g(x)| < \varepsilon \quad \forall y \in B(x,\delta)$.
Siten $\forall\; 0 < s \le \delta$ pätee:

$$\fint_{B(x,s)} \underbrace{|g(y)-g(x)|}_{<\varepsilon} dy < \frac{1}{m\big(B(x,s)\big)} \int_{B(x,s)} \varepsilon dy = \frac{\varepsilon m\big(B(x,s)\big)}{m\big(B(x,s)\big)} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \Lambda g(x) = \lim_{r\to 0}\left( \sup_{0<s<r} \underbrace{\fint_{B(x,s)} |g(y)-g(x)|dy}_{<\varepsilon,\text{ kun } 0<s\le\delta} \right) \le \varepsilon$$

$$\Rightarrow \Lambda g(x) = 0\,,\ \text{sillä } \varepsilon > 0 \text{ mv.}$$

4. $\Lambda f \le Mf + |f|$.
<u>Perustelu:</u>

$$\fint_{B(x,r)} |f(y)-f(x)|dy \overset{\triangle\text{-ey.}}{\le} \underbrace{\fint_{B(x,r)} |f(y)|dy}_{\le Mf(x)} + \underbrace{\fint_{B(x,r)} |f(x)|dy}_{=|f(x)|} \le Mf(x) + |f(x)|.$$

(Huom. $|f(x)|$ on *vakio* jälkimmäisessä integraalissa.)

Olkoon sitten $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ annettu ja $t > 0$ mielivaltainen. Riittää osoittaa: $\forall k \in \mathbb{N}$ (3.29) pätee m.k. $x \in B(0,k)$. Ehdon (3.29) voimassaoloon $B(0,k)$:ssa *ei* vaikuta $f$:n arvot $\mathbb{R}^n \setminus B(0,2k)$:ssa, joten voimme olettaa, että $f = 0 \quad \mathbb{R}^n \setminus B(0,2k)$:ssa ja siten $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Jos $g \in C(\mathbb{R}^n)$, niin

$$\Lambda f = \Lambda(f-g+g) \overset{2.}{\le} \Lambda(f-g) + \Lambda g \overset{3.}{=} \Lambda(f-g) \overset{4.}{\le} M(f-g) + |f-g|.$$

Siten ainakin toinen luvuista $M(f-g)(x)$ tai $|f(x)-g(x)|$ on vähintään $\Lambda f(x)/2$, joten

$$\{x \in \mathbb{R}^n \colon \Lambda f(x) > t\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n \colon M(f-g)(x) > t/2\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n \colon |f(x)-g(x)| > t/2\}.$$

Näin ollen

$$m^*\big(\{x\colon \Lambda f(x) > t\}\big) \le \underbrace{m\big(\{x\colon M(f-g)(x) > t/2\}\big)}_{\overset{\text{H.-L.}}{\le} 2\cdot 5^n \|f-g\|_1/t} + \underbrace{m\big(\{x\colon |f(x)-g(x)| > t/2\}\big)}_{\overset{\text{Cheb.}}{\le} 2\|f-g\|_1/t}$$

$$\le \frac{2(5^n+1)\|f-g\|_1}{t}.$$

Lause 2.36 $\Rightarrow$ jatkuvat funktiot tiheässä $L^1$:ssä $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ g \in C(\mathbb{R}^n)$ s.e. $\|f-g\|_1 < \varepsilon$

$$\overset{\varepsilon>0 \text{ mv.}}{\Longrightarrow} m^*\big(\{x \in \mathbb{R}^n\colon \Lambda f(x) > t\}\big) = 0 \quad \forall t > 0$$

$$\Rightarrow m^*\big(\underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n\colon \Lambda f(x) > 0\}}_{\subset \bigcup_k \{x\colon \Lambda f(x) > 1/k\}}\big) \le \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{m^*\big(\{x \in \mathbb{R}^n\colon \Lambda f(x) > 1/k\}\big)}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \Lambda f(x) = 0 \text{ m.k. } x \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow 0 \le \liminf_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} |f(y)-f(x)|dy \le \limsup_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} |f(y)-f(x)|dy = 0 \text{ m.k. } x \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \lim_{r\to 0+} \fint_{B(x,r)} |f(y)-f(x)|dy = 0 \quad \text{m.k. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Lopuksi,

$$\Big| \fint_{B(x,r)} f(y)dy - f(x)\Big| = \Big| \fint_{B(x,r)} f(y)dy - \underbrace{\fint_{B(x,r)} f(x)dy}_{=f(x)}\Big| = \Big| \fint_{B(x,r)} \big(f(y)-f(x)\big)dy\Big|$$

$$\le \fint_{B(x,r)} |f(y)-f(x)|dy \xrightarrow{r\to 0+} 0 \quad \text{m.k. } x \in \mathbb{R}^n. \quad \square$$

**Määritelmä 3.31.** Piste $x \in \mathbb{R}^n$ on joukon $E \in \operatorname{Leb}\mathbb{R}^n$ *tiheyspiste*, jos

$$\lim_{r\to 0+} \frac{m\big(E \cap B(x,r)\big)}{m\big(B(x,r)\big)} = 1.$$

**Huomautus 3.32.** $x \in \mathbb{R}^n$ joukon $E$ tiheyspiste $\not\Rightarrow$ $x \in E$. Esimerkiksi 0 on joukon $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tiheyspiste.

**Seuraus 3.33.** Olkoon $E \in \operatorname{Leb}\mathbb{R}^n$ mielivaltainen. Tällöin melkein jokainen $x \in E$ on $E$:n tiheyspiste, ts.

$$\lim_{r\to 0+} \frac{m\big(E \cap B(x,r)\big)}{m\big(B(x,r)\big)} = 1 \quad \text{m.k. } x \in E.$$

Lisäksi

$$\lim_{r\to 0+} \frac{m\big(E \cap B(x,r)\big)}{m\big(B(x,r)\big)} = 0 \quad \text{m.k. } x \in \mathbb{R}^n \setminus E.$$

**Tod.** $E \in \operatorname{Leb}\mathbb{R}^n \;\Rightarrow\; \chi_E \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, sillä $\chi_E$ on mitallinen ja

$$\int_K \chi_E = m(E \cap K) < \infty \quad \forall \text{ kompakteilla } K \subset \mathbb{R}^n.$$

Lisäksi

$$⨍_{B(x,r)} \chi_E(y)dy = \frac{m\big(E \cap B(x,r)\big)}{m\big(B(x,r)\big)} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\; r > 0.$$

Lebesguen diff.lause 3.28 $\Rightarrow$

$$\lim_{r\to 0+} \frac{m\big(E \cap B(x,r)\big)}{m\big(B(x,r)\big)} = \chi_E(x) \quad \text{m.k. } x \in \mathbb{R}^n. \quad \square$$

Piste $x \in \mathbb{R}^n$ on funktion $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ *Lebesguen piste*, jos

$$\lim_{r\to 0+} ⨍_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|dy = 0.$$

Tämä ominaisuus *riippuu* $f(x)$:n arvosta ja siten edustajan $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ valinnasta. Päästäksemme eroon tästä riippuvuudesta sanomme, että piste $x \in \mathbb{R}^n$ kuuluu funktion $f$ *Lebesguen joukkoon*, $\operatorname{Leb}(f)$, jos $\exists\, A = A(x) \in \mathbb{R}$ s.e.

$$\lim_{r\to 0+} ⨍_{B(x,r)} |f(y) - A|dy = 0. \tag{3.34}$$

Luku $A$ on 1-käsitteinen, sillä tällöin

$$\lim_{r\to 0+} ⨍_{B(x,r)} f(y)dy = A.$$

**Huomautus 3.35.**

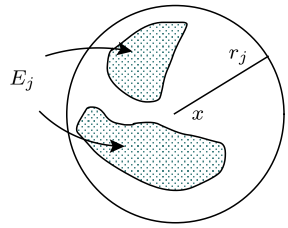
1. $f = g$ m.k. $\mathbb{R}^n$:ssä $\Rightarrow$ $\operatorname{Leb}(f) = \operatorname{Leb}(g)$. Erityisesti Lebesguen joukko $\operatorname{Leb}(f)$ on hyvin määritelty koko *ekvivalenttiluokassa* $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, ts. *ei* riipu edustajan valinnasta.
2. Lebesguen diff.lause 3.28: Jos $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, niin melkein jokainen piste $x \in \mathbb{R}^n$ kuuluu $\operatorname{Leb}(f)$:ään. Lisäksi $A = f(x)$ m.k. $x \in \mathbb{R}^n$. Siten modifioimalla $f$:ää 0-mittaisessa joukossa (eli asettamalla $f(x) = A(x)$) *voidaan jatkossa olettaa*, että

$$\lim_{r\to 0+} ⨍_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|dy = 0 \quad \forall x \in \operatorname{Leb}(f).$$

Lebesguen lauseessa 3.28 ei ole "pakko" käyttää kuulia $B(x,r)$, $r \to 0$. Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$. Sanomme, että jono mitallisia joukkoja $E_j \subset \mathbb{R}^n, j \in \mathbb{N}$, *kutistuu siististi* kohti $x$:ää, jos $\exists$ vakio $c > 0$ ja jono $r_j > 0$ s.e.

$$E_j \subset B(x,r_j)\ \forall j \text{ ja } \lim_{j\to\infty} r_j = 0,$$

$$m\big(B(x,r_j)\big) \le c\, m(E_j)\ \forall j. \tag{3.36}$$




**Huomautus 3.37.** 1. Voi olla $x \notin \bar{E}_j$.

2. Varoitus: Terminologia vaihtelee (engl. "shrinks to $x$ nicely", "converges regularly to $x$", "forms a regular differentiation basis at $x$", jne.).

**Lause 3.38.** *Olkoon $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ja $x \in \mathrm{Leb}(f)$. Jos jono $E_j$ kutistuu siististi kohti $x$, niin*

$$\lim_{j\to\infty} \fint_{E_j} f(y)dy = f(x).$$

**Tod.**

$$\Big| \fint_{E_j} f(y)dy - f(x) \Big| = \Big| \fint_{E_j} \big(f(y)dy - f(x)\big) \Big| \le \fint_{E_j} |f(y)dy - f(x)|dy$$

$$\le \underbrace{\frac{m\big(B(x,r_j)\big)}{m(E_j)}}_{\underset{(3.36)}{\le} c} \fint_{B(x,r_j)} |f(y) - f(x)|dy \xrightarrow{r_j \to 0} 0, \text{ sillä } x \in \mathrm{Leb}(f). \quad \square$$

Nyt voimme tutkia funktion $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ derivoitumista, kun $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integroituva (ks. Esim. 3.1.2).

**Lause 3.39.** *Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integroituva ja*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \; x \in [a,b].$$

*Silloin $F$ on derivoituva m.k. ja $F'(x) = f(x)$ m.k. $x \in [a,b]$.*

**Tod.** Laajennetaan $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ asettamalla $f(t) = 0$ $\forall t \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$, jolloin $f \in L^1(\mathbb{R})$.
Riittää osoittaa:

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathrm{Leb}(f) \cap [a,b],$$

sillä melkein jokainen $x \in [a,b]$ kuuluu $\mathrm{Leb}(f)$:ään (Lebesguen diff.lause 3.28).
Olkoon $x \in \mathrm{Leb}(f) \cap [a,b]$ ja olkoon $r_j > 0, j \in \mathbb{N}$, mielivaltainen jono $r_j \searrow 0$. Merkitään $E_j = ]x, x+r_j[$, jolloin $E_j \subset ]x-r_j, x+r_j[ = B(x,r_j)$ ja $m\big(B(x,r_j)\big) = 2m(E_j) \Rightarrow$ jono $E_j$ kutistuu siististi kohti $x$:ää. L. 3.38 $\Rightarrow$

$$\frac{F(x+r_j) - F(x)}{r_j} = \frac{1}{r_j} \int_x^{x+r_j} f(t)dt \xrightarrow{j\to\infty} f(x).$$

Samoin nähdään, että

$$\frac{F(x-r_j) - F(x)}{-r_j} = \frac{1}{r_j} \int_{x-r_j}^{x} f(t)dt \xrightarrow{j\to\infty} f(x)$$

käyttämällä joukkoja $E'_j = ]x-r_j, x[$. Koska $(r_j)$ on mielivaltainen jono, saadaan

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x). \quad \square$$

### 3.40 Monotoniset funktiot $\mathbb{R}$:ssä

Tässä luvussa tutkimme monotonisten funktioiden derivoituvuutta työvälineenä erityisesti Vitalin peitelause.

Olkoon $\Delta \subset \mathbb{R}$ väli. Funktio $f\colon \Delta \to \mathbb{R}$ on

- *kasvava*, jos $x_1, x_2 \in \Delta, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$;
- *vähenevä*, jos $x_1, x_2 \in \Delta, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$;
- *monotoninen*, jos $f$ on kasvava tai vähenevä.

**Esimerkki 3.41.** Numeroidaan rationaaliluvut $\mathbb{Q} = \{q_j : j \in \mathbb{N}\}$. Asetetaan

$$f(x) = \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ q_j \le x}} 2^{-j}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tällöin $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on aidosti kasvava ja $0 < f(x) < \sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{-j} = 1\ \forall x \in \mathbb{R}$. Lisäksi $f$ on jatkuva pisteessä $x \in \mathbb{R} \iff x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Yllä $f$:n epäjatkuvuuskohtien joukko on numeroituva. Tämä pätee kaikille monotonisille funktioille:

**Lemma 3.42.** *Monotonisella funktiolla $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on korkeintaan numeroituvan monta epäjatkuvuuskohtaa.*

**Tod.** Voi olettaa, että $f$ on kasvava ($g$ vähenevä $\Rightarrow$ $-g$ kasvava). Kun $x \in (a,b)$, niin määritellään

$$H(x) = \lim_{y\to x+} f(y) - \lim_{y\to x-} f(y) = \quad f\text{:n hyppäys pisteessä } x.$$

$f$ kasvava ja rajoitettu $x$:n ympäristössä $\Rightarrow$ raja-arvot olemassa ja $H(x) \ge 0$. Merkitään

$$H_k = \{x \in (a,b) \colon H(x) > 1/k\},\ k \in \mathbb{N},$$

ja osoitetaan, että $H_k$ on äärellinen. Oletetaan $x_1, \dots, x_{2j} \in H_k$ s.e. $x_1 < x_2 < \cdots < x_{2j}$.
Kun $i = 2, 3, \dots, j$, niin valitaan mielivaltaiset $x$ ja $y$ s.e. $x_{2i-2} < y < x_{2i-1} < x < x_{2i}$.
Koska $f$ kasvava, niin

$$\begin{aligned}
f(x_{2i}) - f(x_{2i-2}) &\ge f(x) - f(y) \ge H(x_{2i-1}) > 1/k. \\
\Rightarrow\ f(b) - f(a) &\ge \sum_{i=2}^{j} \big(f(x_{2i}) - f(x_{2i-2})\big) \ge \sum_{i=2}^{j} H(x_{2i-1}) > (j-1)/k \\
&\Rightarrow\ j < k\big(f(b) - f(a)\big) + 1 \\
&\Rightarrow\ \text{joukko } H_k \text{ on äärellinen.}
\end{aligned}$$

Lisäksi $f$ on epäjatkuva pisteessä $x \in (a,b) \iff H(x) > 0$. Siten

$$\{x \in (a,b) \colon f \text{ epäjatkuva } x\text{:ssä}\} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k,$$

joka on numeroituva.[7] $\square$

**Lebesguen lause monotonisille funktioille.**

[7] Lemma voidaan myös todistaa (lyhyesti) konstruoimalla injektio $\{x \in (a,b) \colon f \text{ epäjatkuva } x\text{:ssä}\} \to \mathbb{Q}$.

**Lause 3.43.** *Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monotoninen funktio. Tällöin derivaatta $f'(x)$ on olemassa m.k. $x \in [a,b]$.*

**Tod.** Voidaan olettaa, että $f$ on kasvava. Kun $x \in [a,b]$, merkitään

$$\overline{D}f(x) = \limsup_{\varepsilon \to 0+} \left\{ \frac{f(z)-f(y)}{z-y} : a \le y \le x \le z \le b,\ 0 < z-y < \varepsilon \right\} \quad \text{ja}$$

$$\underline{D}f(x) = \liminf_{\varepsilon \to 0+} \left\{ \frac{f(z)-f(y)}{z-y} : a \le y \le x \le z \le b,\ 0 < z-y < \varepsilon \right\}.$$

$f$ kasvava $\Rightarrow$ $0 \le \underline{D}f(x) \le \overline{D}f(x) \le \infty\ \forall x \in [a,b]$.
<u>Osoitetaan:</u>

$$\underline{D}f(x) = \overline{D}f(x) < \infty \quad \text{m.k. } x \in [a,b]. \tag{3.44}$$

Jos nimittäin $\underline{D}f(x) = \overline{D}f(x) < \infty$, niin $\exists$ derivaatta $f'(x) = \underline{D}f(x) = \overline{D}f(x)$.

Jaetaan (3.44):n todistus osiin:

$\boxed{1.}$ Merkit.

$$\begin{aligned} E_k &= \{x \in [a,b] \colon \overline{D}f(x) > k\}, \quad k \in \mathbb{N}, \\ F_{s,t} &= \{x \in [a,b] \colon \underline{D}f(x) < s < t < \overline{D}f(x)\}, \quad 0 < s < t,\ s,t \in \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Selvästi

$$\{x \in [a,b] \colon \overline{D}f(x) = \infty\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k$$

$$\{x \in [a,b] \colon \underline{D}f(x) < \overline{D}f(x)\} = \bigcup_{\substack{0<s<t \\ s,t \in \mathbb{Q}}} F_{s,t}. \quad \text{(Huom. numeroituva yhdiste.)}$$

<u>Riittää osoittaa:</u>

$$\begin{aligned} m^*(E_k) &\le \frac{c}{k}, \quad \forall k \in \mathbb{N},\ \text{jollakin vakiolla } c > 0, \\ m^*(F_{s,t}) &= 0 \quad \text{kaikilla } 0 < s < t,\ s,t \in \mathbb{Q}, \end{aligned}$$

sillä silloin

$$\left.\begin{aligned} & m^*\big(\underbrace{\{x \colon \overline{D}f(x) = \infty\}}_{\subset E_k\ \forall k}\big) \le \frac{c}{k}\ \forall k \ \Rightarrow\ m^*\big(\{x \colon \overline{D}f(x) = \infty\}\big) = 0 \\ & m^*\big(\{x \colon \underline{D}f(x) < \overline{D}f(x)\}\big) \le \sum_{\substack{0<s<t \\ s,t \in \mathbb{Q}}} \underbrace{m^*(F_{s,t})}_{=0} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (3.44).$$

$\boxed{2.}$ <u>Väite:</u> $m^*(E_k) \le \frac{f(b)-f(a)}{k}$, $k \in \mathbb{N}$.[8]

[8] Vertaa: $g \in C^1$, $g'(t) > k > 0\ \forall t \in [c,d] \Rightarrow g(d)-g(c) = \int_c^d g'(t)dt > k(d-c) \Rightarrow m([c,d]) = d-c < (g(d)-g(c))/k$.

Tod. Olkoon $x \in E_k$ mielivaltainen. Silloin

$$\overline{D}f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \sup \left\{ \frac{f(z)-f(y)}{z-y} : a \le y \le x \le z \le b,\ 0 < z-y < \varepsilon \right\} > k$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ & \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \text{ suljettu väli } I_{x,\varepsilon} = [y,z] \subset [a,b] \text{ s.e.} \\ & x \in [y,z],\ 0 < z-y = d([y,z]) < \varepsilon \quad \text{ja} \end{aligned}$$

$$\frac{f(z)-f(y)}{z-y} > k, \quad \text{eli} \quad \underbrace{m\left(]f(y),f(z)[\right)}_{=f(z)-f(y)} > k\, \underbrace{m\big([y,z]\big)}_{=z-y}. \tag{3.45}$$

Siten tällaiset välit $I_{x,\varepsilon} = [y,z]$ muodostavat $E_k$:n suljetun Vitalin peitteen. Vitalin peitelauseen 3.9 nojalla $\exists$ numeroituva osaperhe *erillisiä* suljettuja välejä $I_j = [y_j, z_j] \subset [a,b]$ s.e. (3.45) pätee ja

$$m\big(E_k \setminus \bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j\big) = 0.$$

Nyt

$$\begin{aligned} m^*(E_k) &\le m^*\big(E_k \cap \bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j\big) + \overbrace{m^*\big(E_k \setminus \bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j\big)}^{=0} \le m\big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j\big) \le \sum_{j\in\mathbb{N}} m(I_j) \\ &\overset{(3.45)}{\le} \frac{1}{k} \sum_{j\in\mathbb{N}} m\left(]f(y_j), f(z_j)[\right). \end{aligned}$$

$f$ kasvava, välit $I_j = [y_j, z_j]$ erillisiä $\Rightarrow$ *avoimet* välit $]f(y_j), f(z_j)[$ erillisiä. Siten

$$\begin{aligned} m^*(E_k) &\le \frac{1}{k} \sum_{j\in\mathbb{N}} m\left(]f(y_j), f(z_j)[\right) \overset{\text{erill.}}{=} \frac{1}{k} m\Big(\underbrace{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} ]f(y_j), f(z_j)[}_{\subset [f(a), f(b)]}\Big) \\ &\le \frac{f(b)-f(a)}{k}. \end{aligned}$$

$\boxed{3.}$ Väite: $m^*(F_{s,t}) = 0 \quad \forall s,t \in \mathbb{Q},\ 0 < s < t.$
Tod. Käytetään Vitalin peitelausetta kahdesti. Ulkomitan määritelmästä seuraa, että $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ avoin $G \supset F_{s,t}$ s.e.

$$m(G) < m^*(F_{s,t}) + \varepsilon.$$

$\boxed{3a.}$ Sovelletaan Vitalin peitelausetta joukkoon $F_{s,t}$ (päättely kuten 2.-kohdassa).
$\underline{D}f(x)$:n ja $F_{s,t}$:n määritelmistä seuraa, että $\forall x \in F_{s,t}$ kohti $\exists$ mielivaltaisen pieniä suljettuja välejä $[y,z],\ y < z$, s.e. $x \in [y,z] \subset G \cap [a,b]$ ja

$$\frac{m\big(]f(y), f(z)[\big)}{m\big([y,z]\big)} = \frac{f(z)-f(y)}{z-y} < s. \tag{3.46}$$

(Huom. $G \ni x$ avoin.)
Vitalin peitelauseen nojalla $\exists$ erilliset suljetut välit $I_j = [y_j, z_j] \subset G \cap [a,b],\ j \in \mathbb{N}$, s.e. (3.46) pätee ja

$$m\big(F_{s,t} \setminus \bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j\big) = 0.$$

Tällöin

$$m\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}}]f(y_j),f(z_j)[\Big) \overset{\text{erill.}}{=} \sum_{j\in\mathbb{N}} m\big(]f(y_j),f(z_j)[\big) \overset{(3.46)}{<} s\sum_{j\in\mathbb{N}} m\big([y_j,z_j]\big)$$

$$\overset{\text{erill.}}{=} s\,m\Big(\underbrace{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}[y_j,z_j]}_{\subset G}\Big) \le s\,m(G) < s(m^*(F_{s,t})+\varepsilon). \tag{3.47}$$

Lisäksi

$$m\big(F_{s,t}\setminus \bigcup_{j\in\mathbb{N}}]y_j,z_j[\big)=0, \tag{3.48}$$

sillä $\{y_j,z_j : j\in\mathbb{N}\}$ on 0-mittainen. Merkitään $A=\bigcup_{j\in\mathbb{N}}]y_j,z_j[$.

$\boxed{\text{3b.}}$ Sovelletaan Vitalin peitelausetta joukkoon $F_{s,t}\cap A$.
$\overline{D}f(x)$:n ja $F_{s,t}$:n määritelmistä seuraa, että $\forall x\in F_{s,t}\cap A$ kohti $\exists$ mielivaltaisen pieniä suljettuja välejä $[u,v],\ u<v$, s.e. $x\in[u,v]$,

$$\frac{m\big(]f(u),f(v)[\big)}{m\big([u,v]\big)} = \frac{f(v)-f(u)}{v-u} > t, \tag{3.49}$$

ja $[u,v]\subset]y_j,z_j[$ jollakin $j\in\mathbb{N}$ (mahdollista, sillä $A=\bigcup_j]y_j,z_j[$ erillinen yhdiste avoimia välejä). Vitalin peitelauseen mukaan $\exists$ erilliset suljetut välit $J_k=[u_k,v_k],\ k\in\mathbb{N}$, kuten yllä s.e. jokainen $J_k\subset]y_j,z_j[$ sopivalla $j=j_k$ ja

$$m\big(F_{s,t}\cap A\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{N}}J_k\big)=0. \tag{3.50}$$

Merkitään $B=\bigcup_k J_k$, jolloin $B\subset A$ ja

$$\left.\begin{array}{ll}(3.48)\Rightarrow\ F_{s,t}=(F_{s,t}\cap A)\cup A_0, & \text{missä } A_0=F_{s,t}\setminus A \text{ on 0-mittainen}\\[2mm] (3.50)\Rightarrow\ F_{s,t}\cap A=(F_{s,t}\cap A\cap B)\cup B_0, & \text{missä } B_0=F_{s,t}\cap A\setminus B \text{ on 0-mittainen}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$F_{s,t}=(F_{s,t}\cap A)\cup A_0=\big[(F_{s,t}\cap A\cap B)\cup B_0\big]\cup A_0 \overset{B\subseteq A}{=} (F_{s,t}\cap B)\cup A_0\cup B_0,$$

missä $A_0\cup B_0$ on 0-mittainen. Siten $m^*(F_{s,t})\le m(B),\ B=\bigcup_k J_k$. Tällöin

$$m^*(F_{s,t})\le m\Big(\bigcup_k J_k\Big) \overset{\text{erill.}}{=} \sum_{k\in\mathbb{N}} m(J_k) \overset{(3.49)}{<} \frac{1}{t}\sum_{k\in\mathbb{N}} m\big(]f(u_k),f(v_k)[\big)$$

$$\overset{\text{erill.}}{=} \frac{1}{t}m\Big(\underbrace{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}]f(u_k),f(v_k)[}_{\subset\bigcup_j]f(y_j),f(z_j)[}\Big) \le \frac{1}{t}m\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}}]f(y_j),f(z_j)[\Big) \overset{(3.47)}{<} \frac{s}{t}\big(m^*(F_{s,t})+\varepsilon\big).$$

$\varepsilon>0$ mieliv. $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{c} m^*(F_{s,t})\le \dfrac{s}{t}m^*(F_{s,t})\\ 0<s<t\ \Rightarrow\ \dfrac{s}{t}<1\\ m^*(F_{s,t})\le m\big([a,b]\big)=b-a<\infty\end{array}\right\}\Rightarrow m^*(F_{s,t})=0\quad \forall s,t\in\mathbb{Q},\ 0<s<t. \quad\square$$

**Huomautus 3.51.** Lebesguen lauseen 3.43 johtopäätös on vahvin mahdollinen. Nimittäin: Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ mielivaltainen 0-mittainen joukko. Silloin on olemassa jatkuva ja kasvava funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle

$$\underline{D}f(x) = \infty \quad \forall x \in A.$$

**Lause 3.52.** *Jos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on kasvava, niin derivaatta $f'$ on integroituva ja*

$$\int_a^b f'(x)dx \le f(b) - f(a). \tag{3.53}$$

**Tod.** Laajennetaan $f$ asettamalla $f(x) = f(b)$ $\forall x > b$. Lause 3.43 $\Rightarrow$ $\exists$ derivaatta $f'(x)$ m.k. $x \in [a, b]$, ts.

$$f'(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{f\big(x + \frac{1}{k}\big) - f(x)}{1/k} \quad \text{m.k. } x \in [a, b]. \tag{3.54}$$

Lisäksi $f$ on kasvavana funktiona mitallinen, joten funktiot

$$x \mapsto \frac{f\big(x + \frac{1}{k}\big) - f(x)}{1/k}$$

ovat mitallisia $\forall k \in \mathbb{N}$, ja edelleen

$$x \mapsto \limsup_{k\to\infty} \frac{f\big(x + \frac{1}{k}\big) - f(x)}{1/k}$$

on mitallinen. Koska

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{f\big(x + \frac{1}{k}\big) - f(x)}{1/k} = \lim_{k\to\infty} \frac{f\big(x + \frac{1}{k}\big) - f(x)}{1/k} = f'(x) \quad \text{m.k. } x \in [a, b],$$

on $f'$ mitallinen. Havaitaan (tekemällä muuttujan vaihto $x + 1/k \mapsto x$), että

$$\begin{aligned}
\int_a^b k\Big(f\big(x + \frac{1}{k}\big) - f(x)\Big)dx &= k\int_{a+1/k}^{b+1/k} f(x)dx - k\int_a^b f(x)dx \\
&= \underbrace{k\int_b^{b+1/k} \underbrace{f(x)}_{=f(b)}\,dx}_{=f(b)} - k\int_a^{a+1/k} \underbrace{f(x)}_{\ge f(a)}\,dx \\
&\le f(b) - f(a) \quad \forall k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

$f$ kasvava $\Rightarrow$

$$k\Big(f\big(x + \frac{1}{k}\big) - f(x)\Big) \ge 0 \quad \forall x \in [a, b],\ k \in \mathbb{N},$$

joten Fatoun lemma $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\int_a^b f'(x)dx &\overset{(3.54)}{=} \int_a^b \lim_{k\to\infty} \underbrace{k\Big(f\big(x + \frac{1}{k}\big) - f(x)\Big)}_{\ge 0 \text{ ja mitall.}} dx \overset{\text{Fatou}}{\le} \liminf_{k\to\infty} \underbrace{\int_a^b k\Big(f\big(x + \frac{1}{k}\big) - f(x)\Big)dx}_{\le f(b)-f(a)} \\
&\le f(b) - f(a). \quad \square
\end{aligned}$$

Seuraavaksi tutkimme milloin (3.53):ssä pätee yhtäsuuruus, vrt. Esim. 3.1.4.

### 3.55 Rajoitetusti heilahtelevat funktiot $\mathbb{R}$:ssä

**Määritelmä 3.56.** Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *(kokonais)heilahtelu* välillä $[a,x]$, $a \le x \le b$, on

$$V_f(a,x) = \sup \sum_{i=1}^{k} |f(x_i) - f(x_{i-1})|,$$

missä supremum otetaan yli kaikkien välin $[a,x]$ jakojen $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k = x$. Sanomme, että $f$ on *rajoitetusti heilahteleva* (merk. $f \in BV$) välillä $[a,b]$, jos $V_f(a,b) < \infty$. Funktio $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on rajoitetusti heilahteleva, jos $V_f(\mathbb{R}) = \sup_{a<b} V_f(a,b) < \infty$.

Triviaali havainto: $|f(b) - f(a)| \le V_f(a,b)$, sillä pisteet $a,b$ muodostavat $[a,b]$:n jaon.

**Esimerkki 3.57.** 1. $f \in C^1\big([a,b]\big) \;\Rightarrow\; f \in BV$.
<u>Tod.</u> $f \in C^1\big([a,b]\big) \;\Rightarrow\; f'\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuva $\Rightarrow\; \exists M = \max\{|f'(x)|\colon x \in [a,b]\} < \infty$. Olkoon $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k = b$ välin $[a,b]$ mielivaltainen jako. Silloin

$$\sum_{i=1}^{k} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \overset{\text{VAL}}{\le} M \sum_{i=1}^{k} (x_i - x_{i-1}) = M(b-a)$$
$$\overset{\text{sup}}{\Longrightarrow} V_f(a,b) \le M(b-a). \quad \square$$

2. $f \in C\big([a,b]\big) \;\not\Rightarrow\; f \in BV$.
Olkoon $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{jos } 0 < x \le 1, \\ 0, & \text{jos } x = 0. \end{cases}$$

Silloin $f$ on jatkuva, muttei rajoitetusti heilahteleva (HT).

Haluamme todistaa, että jokainen rajoitetusti heilahteleva funktio voidaan esittää kahden kasvavan funktion erotuksena. Sitä ennen pari lemmaa.

**Lemma 3.58.** *Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monotoninen. Silloin $f$ on rajoitetusti heilahteleva ja*

$$V_f(a,b) = |f(b) - f(a)|.$$

**Tod.** Oletetaan, että $f$ on kasvava. Olkoon $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k = b$ välin $[a,b]$ mielivaltainen jako. Silloin

$$\sum_{i=1}^{k} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \overset{f \text{ kasv.}}{=} \sum_{i=1}^{k} \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big) = f(x_k) - f(x_0) = f(b) - f(a)$$
$$\overset{\text{sup}}{\Longrightarrow} V_f(a,b) = f(b) - f(a) < \infty.$$

$f$ vähenevä $\Rightarrow$ $-f$ kasvava $\Rightarrow$ $V_f(a,b) = V_{-f}(a,b) = f(a) - f(b)$. $\square$

**Lemma 3.59.** *Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ rajoitetusti heilahteleva. Silloin*

$$V_f(a,b) = V_f(a,c) + V_f(c,b) \quad \forall c \in \,]a,b[.$$

**Tod.** Olkoon $c \in ]a,b[$. Olkoot

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = c$$
$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = b$$

välien $[a,c]$ ja $[c,b]$ mielivaltaiset jaot. Silloin $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = b$ on $[a,b]$:n jako, joten

$$\sum_{i=1}^{k} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^{n} |f(y_i) - f(y_{i-1})| \le V_f(a,b).$$

Otetaan sup yli $[a,c]$:n ja $[c,b]$:n jakojen $\Rightarrow$

$$V_f(a,c) + V_f(c,b) \le V_f(a,b).$$

Kääntäen: Olkoon $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ välin $[a,b]$ mielivaltainen jako. Merkitään $k = \min\{i\colon c \le x_i\}$. Silloin $\{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, c\}$ on $[a,c]$:n jako ja $\{c, x_k, \ldots, x_n\}$ on $[c,b]$:n jako, joten

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{k-1} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \underbrace{|f(x_k) - f(x_{k-1})|}_{\le |f(x_k)-f(c)|+|f(c)-f(x_{k-1})|} + \sum_{i=k+1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

$$\le \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(c) - f(x_{k-1})|}_{\le V_f(a,c)} + \underbrace{|f(x_k) - f(c)| + \sum_{i=k+1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|}_{\le V_f(c,b)}$$

$$\le V_f(a,c) + V_f(c,b)$$

$$\overset{\text{sup}}{\Longrightarrow} V_f(a,b) \le V_f(a,c) + V_f(c,b). \quad \square$$

Nyt saadaan helposti *tärkeä* rajoitetusti heilahtelevien funktioiden esityslause.

**Lause 3.60.** *Funktio $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on rajoitetusti heilahteleva $\iff$ $f = g - h$, missä $g$ ja $h$ ovat kasvavia välillä $[a,b]$.*

**Tod.** $\boxed{\Leftarrow}$ $g, h$ kasvavia $\overset{3.58}{\Longrightarrow}$ $g, h$ rajoitetusti heilahtelevia $\Rightarrow$ $f = g - h$ rajoitetusti heilahteleva (saadaan helposti $\triangle$-ey:stä).

$\boxed{\Rightarrow}$ Oletetaan, että $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on rajoitetusti heilahteleva. Tällöin

$$f(x) = V_f(a,x) - \big(V_f(a,x) - f(x)\big), \quad x \in [a,b] \quad \text{(sopimus: } V_f(a,a) = 0).$$

<u>Väite:</u> $x \mapsto V_f(a,x)$ ja $x \mapsto V_f(a,x) - f(x)$ kasvavia välillä $[a,b]$.
<u>Tod.</u> Olkoon $a \le x_1 \le x_2 \le b$. Lemma 3.59 $\Rightarrow$

$$V_f(a,x_2) = V_f(a,x_1) + \underbrace{V_f(x_1,x_2)}_{\ge 0} \ge V_f(a,x_1)$$

ja

$$\begin{aligned} V_f(a,x_2) - f(x_2) - \big(V_f(a,x_1) - f(x_1)\big) &= V_f(a,x_1) + V_f(x_1,x_2) - f(x_2) - V_f(a,x_1) + f(x_1) \\ &= \underbrace{V_f(x_1,x_2)}_{\ge |f(x_2)-f(x_1)|} - \big(f(x_2) - f(x_1)\big) \ge 0. \end{aligned}$$

Voidaan siis valita $g = V_f(a,\cdot)$ ja $h = V_f(a,\cdot) - f$. $\square$

**Seurauksia:**

**Lause 3.61.** *Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ rajoitetusti heilahteleva. Tällöin*

1. *$f$:llä on korkeintaan numeroituvan monta epäjatkuvuuskohtaa,*
2. *$\exists f'(x)$ m.k. $x \in [a,b]$.*
3. *$f'$ on integroituva.*

**Tod.** Lause 3.60 $\Rightarrow$ $f = g - h$ missä $g$ ja $h$ kasvavia.
Lemma 3.42 $\Rightarrow$ $g$:llä ja $h$:lla korkeintaan numeroituvan monta epäjatkuvuuskohtaa, joten sama pätee $f$:lle.
Lause 3.43 $\Rightarrow$ $\exists\ g'(x),\ h'(x)$ m.k. $x \in [a,b]$ $\Rightarrow$ $\exists f'(x) = g'(x) - h'(x)$ m.k. $x \in [a,b]$.
Lisäksi $|f'(x)| \le |g'(x)| + |h'(x)|$ m.k. $x \in [a,b]$, ja $|g'|$ ja $|h'|$ ovat integroituvia (L. 3.52), joten $f'$ on integroituva. $\square$

Seuraava "integraalifunktioita" koskeva tulos on hyödyllinen luvussa 3.68. Saamme myös lisää esimerkkejä rajoitetusti heilahtelevista funktioista.

**Lause 3.62.** *Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integroituva, $f \in L^1\big([a,b]\big)$, ja*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a,b].$$

*Tällöin $F$ on rajoitetusti heilahteleva välillä $[a,b]$, ja $F$:n heilahtelu on*

$$V_F(a,b) = \int_a^b |f(t)|dt = \|f\|_1. \tag{3.63}$$

**Tod.** Olkoon $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ välin $[a,b]$ mielivaltainen jako. Tällöin

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n |F(x_i) - F(x_{i-1})| &= \sum_{i=1}^n \Big|\int_a^{x_i} f(t)dt - \int_a^{x_{i-1}} f(t)dt\Big| = \sum_{i=1}^n \Big|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt\Big| \\ &\le \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t)|dt = \int_a^b |f(t)|dt.\end{aligned}$$

Otetaan sup yli $[a,b]$:n jakojen $\Rightarrow$

$$V_F(a,b) \le \int_a^b |f(t)|dt = \|f\|_1 < \infty. \tag{3.64}$$

Siis $F$ rajoitetusti heilahteleva.
*Käänteinen* epäyhtälö: $\boxed{\text{A.}}$ Olkoon $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuva (ja siis integroituva) ja

$$G(x) = \int_a^x g(t)dt.$$

Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Koska $g$ on tasaisesti jatkuva ($[a,b]$ sulj. väli), $\exists \delta > 0$ s.e.

$$\left.\begin{matrix} |x-y| < \delta \\ x,y \in [a,b] \end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow \quad |g(x) - g(y)| < \varepsilon.$$

Olkoon $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ välin $[a,b]$ jako s.e. $|x_i - x_{i-1}| < \delta \ \forall i = 1,2,\dots,n$. Käyttämällä $\triangle$-ey:ä (useaan kertaan) saadaan $\forall i = 1,2,\dots,n$

$$
\begin{aligned}
|G(x_i) - G(x_{i-1})| &= \Big|\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(t)dt\Big| = \Big|\int_{x_{i-1}}^{x_i} \big(g(t) - g(x_{i-1})\big)dt + (x_i - x_{i-1})g(x_{i-1})\Big| \\
&\geq (x_i - x_{i-1})|g(x_{i-1})| - \Big|\int_{x_{i-1}}^{x_i} \big(g(t) - g(x_{i-1})\big)dt\Big| \\
&\geq (x_i - x_{i-1})|g(x_{i-1})| - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \underbrace{|g(t) - g(x_{i-1})|}_{<\varepsilon} dt \\
&\geq \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x_{i-1})|dt - \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \\
&\geq \int_{x_{i-1}}^{x_i} \big(|g(t)| - |g(t) - g(x_{i-1})|\big)dt - \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(t)|dt - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \underbrace{|g(t) - g(x_{i-1})|}_{<\varepsilon} dt - \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \\
&\geq \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(t)|dt - 2\varepsilon(x_i - x_{i-1}).
\end{aligned}
$$

Summataan nämä yli $i = 1,2,\dots,n \ \Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
V_G(a,b) &\overset{\sup}{\geq} \sum_{i=1}^n |G(x_i) - G(x_{i-1})| \geq \underbrace{\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(t)|dt}_{=\int_a^b |g(t)|dt} - 2\varepsilon \underbrace{\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})}_{=b-a} \\
&= \|g\|_1 - 2\varepsilon(b-a).
\end{aligned}
$$

(3.65) $$\left.\begin{array}{l} \varepsilon > 0 \text{ mv.} \quad \Rightarrow \ V_G(a,b) \geq \|g\|_1 \\ \qquad\qquad (3.64) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \ V_G(a,b) = \|g\|_1,$$

jos $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva.

$\boxed{\text{B.}}$ Yleinen tapaus $f \in L^1\big([a,b]\big)$ : Asetetaan $f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$, jolloin $f \in L^1(\mathbb{R})$. Lause 2.36 $\Rightarrow \ \forall \varepsilon > 0$ kohti $\exists g \in C(\mathbb{R})$ s.e. $\|f - g\|_1 < \varepsilon$.
Merkitään $g_0 = g|[a,b]$, jolloin erityisesti

$$\|f - g_0\|_1 = \int_a^b |f(t) - g(t)|dt \leq \|f - g\|_1 < \varepsilon.$$

Määritellään

$$G_0(x) = \int_a^x g_0(t)dt, \quad x \in [a,b].$$

Tällöin

$$V_{G_0}(a,b) = V_{G_0-F+F}(a,b) \overset{\triangle\text{-ey}}{\leq} \underbrace{V_{G_0-F}(a,b)}_{\underset{(3.64)}{\leq} \|g_0-f\|_1<\varepsilon} + V_F(a,b) < \varepsilon + V_F(a,b)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ V_F(a,b) &\geq V_{G_0}(a,b) - \varepsilon \overset{(3.65)}{=} \|g_0\|_1 - \varepsilon = \|g_0 - f + f\|_1 - \varepsilon \\ &\overset{\text{Minkowski}}{\geq} \|f\|_1 - \underbrace{\|g_0 - f\|_1}_{<\varepsilon} - \varepsilon > \|f\|_1 - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon > 0 \text{ mv.} \quad \Rightarrow V_F(a,b) \geq \|f\|_1 \\ \qquad\qquad\quad (3.64) \end{array}\right\} \Rightarrow V_F(a,b) = \|f\|_1. \quad \square$$

**Esimerkki 3.66.** Olkoon $F\colon [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{jos } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{jos } x = 0. \end{cases}$$

Tällöin *ei ole olemassa* Lebesgue-integroituvaa funktiota $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ s.e.

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a,b], \tag{3.67}$$

ts. $x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$ ei ole "integraalifunktio".
Syy: Esim. 3.57.2 $\Rightarrow$ $F$ *ei* ole rajoitetusti heilahteleva. Toisaalta, jos olisi olemassa $f \in L^1\big([0,1]\big)$, s.e. (3.67) pätisi, niin Lauseen 3.62 nojalla $F$ olisi rajoitetusti heilahteleva.

## 3.68 Absoluuttisesti jatkuvat funktiot

Diff. I: Jos $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on derivoituva funktio, jonka derivaatta $f'$ on Riemann-integroituva välillä $[a,b]$ (esim. jos $f'$ jatkuva), niin

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt \quad \forall x \in [a,b]. \tag{3.69}$$

Kysymys: yleisempi versio Lebesguen integraalin avulla.

Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funktio, jolla $\exists$ derivaatta $f'(x)$ m.k. $x \in [a,b]$ ja $f'$ integroituva. Tutkimme tässä luvussa kysymystä mille funktioille (3.69) pätee. Esim. 3.1.4: (3.69) ei päde Cantorin 1/3-funktiolle, joten tarvitaan jokin lisäehto.

**Määritelmä 3.70.** Funktio $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on *absoluuttisesti jatkuva* (välillä $[a,b]$), jos $\forall \varepsilon > 0$ kohti $\exists \delta > 0$ s.e.

$$\sum_{j=1}^{k} |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon$$

aina kun $]a_1, b_1[, \ldots, ]a_k, b_k[ \subset [a,b]$ ovat erillisiä välejä, joiden yhteenlaskettu pituus

$$\sum_{j=1}^{k} \ell\big([a_j, b_j]\big) = \sum_{j=1}^{k} (b_j - a_j) < \delta.$$

(Huom. välien lukumäärä $k$ on mielivaltainen, kuitenkin äärellinen.)

Integraalifunktiot ovat absoluuttisesti jatkuvia:

**Lemma 3.71.** *Olkoon* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *integroituva ja*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a,b].$$

*Tällöin* $F$ *on absoluuttisesti jatkuva.*

**Tod.** Seuraus 2.7 (”integraalin abs. jatkuvuus”) $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ kohti $\exists \delta > 0$ s.e.

$$E \in \mathrm{Leb}\big([a,b]\big),\ m(E) < \delta \ \Rightarrow \ \int_E |f(t)|dt < \varepsilon. \tag{3.72}$$

Jos $]a_1, b_1[, \dots, ]a_k, b_k[ \subset [a,b]$ ovat erillisiä välejä s.e.

$$\sum_{j=1}^k (b_j - a_j) \overset{\text{erill.}}{=} m\Big(\underbrace{\bigcup_{i=1}^k ]a_i, b_i[}_{=E}\Big) < \delta,$$

niin

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^k |F(b_i) - F(a_i)| &= \sum_{i=1}^k \Big|\underbrace{\int_a^{b_i} f(t)dt - \int_a^{a_i} f(t)dt}_{=\int_{a_i}^{b_i} f(t)dt}\Big| \\ &\le \sum_{i=1}^k \int_{a_i}^{b_i} |f(t)|dt \overset{\text{erill.}}{=} \int_E |f(t)|dt \overset{(3.72)}{<} \varepsilon. \quad \square\end{aligned}$$

**Lause 3.73.** *Olkoon* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *absoluuttisesti jatkuva. Tällöin:*

1. $f$ *on (tasaisesti) jatkuva,*
2. $f$ *on rajoitetusti heilahteleva,*
3. $\exists$ *derivaatta* $f'(x)$ *m.k.* $x \in [a,b]$.
4. $f'$ *on integroituva.*

**Tod.**

1. Selvä (valitaan $k = 1$ määritelmässä).
2. HT.
3. $f$ absoluuttisesti jatkuva $\overset{2.}{\Rightarrow}$ $f$ rajoitetusti heilahteleva $\overset{3.61}{\Rightarrow}$ $\exists f'(x)$ m.k. $x \in [a,b]$.
4. $f$ absoluuttisesti jatkuva $\overset{2.}{\Rightarrow}$ $f$ rajoitetusti heilahteleva $\overset{3.61}{\Rightarrow}$ $f'$ integroituva. $\square$

**Esimerkki 3.74.** 1. $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{jos } 0 < x \le 1, \\ 0, & \text{jos } x = 0, \end{cases}$$

on jatkuva, mutta *ei* rajoitetusti heilahteleva (HT) $\overset{3.73}{\Rightarrow}$ $f$ *ei* ole absoluuttisesti jatkuva.

2. Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Lipschitz-funktio, ts. $\exists L < \infty$ s.e.

$$|f(x) - f(y)| \le L|x-y| \quad \forall x, y \in [a,b].$$

Väite: $f$ Lipschitz $\Rightarrow$ $f$ absoluuttisesti jatkuva.
Tod. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $]a_1, b_1[, \ldots, ]a_k, b_k[ \subset [a,b]$ erillisiä välejä s.e.

$$\sum_{i=1}^{k} (b_i - a_i) < \varepsilon / L.$$

Tällöin

$$\sum_{i=1}^{k} |f(b_i) - f(a_i)| \le L \sum_{i=1}^{k} (b_i - a_i) < \varepsilon.$$

**"Yksikäsitteisyyslause"**

**Lause 3.75.** *Jos $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on absoluuttisesti jatkuva ja $f'(x) = 0$ m.k. $x \in [a,b]$, niin silloin $f$ on vakiofunktio.*

**Tod.** Osoitetaan $f(c) = f(a)$ $\forall c \in ]a,b[$. Kiinnitetään $c \in ]a,b[$ ja merkitään

$$E = \{x \in ]a,c[ \colon f'(x) = 0\},$$

jolloin $m(E) = c - a$. Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen ja valitaan $\delta > 0$ kuten absoluuttisen jatkuvuuden määritelmässä. Jokaista $x \in E$ $(\subset ]a,c[)$ kohti $\exists$ mielivaltaisen lyhyitä välejä $[x, x+h] \subset ]a,c[$, $h > 0$, s.e.

$$\frac{|f(x+h) - f(x)|}{h} < \varepsilon,$$

joten tällaiset välit muodostavat $E$:n suljetun Vitalin peitteen. Vitalin peitelause $\Rightarrow$ $\exists$ erilliset välit $I_j = [x_j, y_j] \subset ]a,c[, j \in \mathbb{N}$, s.e.

$$|f(y_j) - f(x_j)| < \varepsilon (y_j - x_j) \tag{3.76}$$

ja

$$m\big(E \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j\big) = 0.$$

Mittojen konvergenssi $\Rightarrow$ $\exists k \in \mathbb{N}$ s.e.

$$m\big(]a,c[ \setminus \bigcup_{j=1}^{k} I_j\big) < \delta,$$

sillä

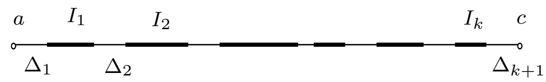
$$\lim_{k \to \infty} m\big(]a,c[ \setminus \bigcup_{j=1}^{k} I_j\big) = m\big(]a,c[ \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j\big) = m\big(E \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j\big) = 0.$$

Voidaan olettaa (tarvittaessa indeksöimällä uudelleen)

$$a < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \cdots < x_k < y_k < c,$$

jolloin $]a,c[ \setminus \bigcup_{j=1}^{k} I_j$ on erillinen yhdiste avoimista väleistä $\Delta_j = ]p_j, q_j[$, $j = 1, \ldots, k+1$, (ks. kuva) ja

$$\sum_{j=1}^{k+1} (q_j - p_j) = m\big(E \setminus \bigcup_{j=1}^{k} I_j\big) < \delta.$$




Saadaan

$$
\begin{aligned}
|f(c)-f(a)| &= \Big|\sum_{j=1}^{k}\big(f(y_j)-f(x_j)\big)+\sum_{j=1}^{k+1}\big(f(q_j)-f(p_j)\big)\Big| \\
&\le \sum_{j=1}^{k}\underbrace{|f(y_j)-f(x_j)|}_{\underset{(3.76)}{<}\ \varepsilon(y_j-x_j)}+\underbrace{\sum_{j=1}^{k+1}|f(q_j)-f(p_j)|}_{\underset{\text{abs. jva}}{<}\ \varepsilon} \\
&< \varepsilon\underbrace{\sum_{j=1}^{k}(y_j-x_j)}_{\le c-a}+\varepsilon \\
&\le \varepsilon(c-a+1).
\end{aligned}
$$

Antamalla $\varepsilon \to 0$ saadaan $f(c)=f(a)$. □

**Esimerkki 3.77.** Olkoon $f\colon [0,1]\to[0,1]$ Cantorin 1/3-funktio. L. 3.60 $\Rightarrow$ $f$ rajoitetusti heilahteleva ($f$ kasvava). Toisaalta $f'(x)=0$ m.k., mutta $f$ ei ole vakio, joten $f$ ei ole absoluuttisesti jatkuva.

**Lause 3.78.** *Olkoon $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$. Tällöin SEY*[9]

1. *$f$ on absoluuttisesti jatkuva,*
2. *$\exists f'(x)$ m.k. $x\in[a,b]$, $f'$ on integroituva ja*
$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)dt \quad \forall x\in[a,b],$$
3. *$\exists$ integroituva $g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ s.e.*
$$f(x)=f(a)+\int_a^x g(t)dt \quad \forall x\in[a,b].$$

**Tod.** $\boxed{1.\Rightarrow 2.}$ Oletetaan, että $f$ on absoluuttisesti jatkuva.
3.73 $\Rightarrow$ $\exists f'(x)$ m.k. $x\in[a,b]$ ja $f'$ on integroituva.
Olkoon
$$F(x)=\int_a^x f'(t)dt, \quad x\in[a,b].$$

L. 3.39 $\overset{f'\text{ intva}}{\Longrightarrow}$ $F'(x)=f'(x)$ m.k. $x\in[a,b]$ $\Rightarrow$ $(F-f)'(x)=0$ m.k. $x\in[a,b]$.

$$\left.\begin{array}{c}\text{Lemma 3.71} \Rightarrow F \text{ abs. jatkuva}\\ \text{oletus: } f \text{ abs. jatkuva}\end{array}\right\} \overset{\text{helposti}}{\Longrightarrow} F-f \text{ abs. jatkuva.}$$

[9]SEY = ”seuraavat ehdot yhtäpitäviä”

"Yksikäsitteisyyslause" 3.75 $\Rightarrow$ $F - f$ vakiofunktio, eli

$$F(x) - f(x) = \underbrace{F(a)}_{=0} - f(a) \quad \forall x \in [a,b]$$

$$\Rightarrow\ f(x) = f(a) + F(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt \quad \forall x \in [a,b].$$

$\boxed{2. \Rightarrow 3.}$ Valitaan $g = f'$.
$\boxed{3. \Rightarrow 1.}$ Oletetaan, että $\exists$ integroituva $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ s.e.

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt \quad \forall x \in [a,b].$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{Merk. } G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)dt,\ x \in [a,b] \\ \text{oletus: } g \text{ integroituva}\end{array}\right\} \overset{3.71}{\Longrightarrow} G \text{ abs. jatkuva}$$

$$\Rightarrow\ f = \underbrace{f(a)}_{\text{vakio}} + G \quad \text{abs. jatkuva.} \quad \square$$

**Esimerkki 3.79.** Olkoon $\alpha > 0$ ja

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x}, & \text{jos } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{jos } x = 0. \end{cases}$$

<u>Väite:</u> $f$ on absoluuttisesti jatkuva $\iff$ $\alpha > 1$.
<u>Perustelu:</u> Esim. 3.74 $\Rightarrow$ $f$ ei ole absoluuttisesti jatkuva, kun $\alpha = 1$. Samoin voidaan tarkistaa, että $f$ ei ole absoluuttisesti jatkuva, kun $0 < \alpha < 1$.
Oletetaan $\alpha > 1$ : Tällöin:

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x}, \quad 0 < x < 1.$$

Nyt

$$\lim_{x \to 0+} x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} = 0 \quad (\text{sillä } \alpha > 1),$$

joten $x \mapsto x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x}$ integroituva välillä $[0,1]$. Lisäksi $h(x) = x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x}$ on integroituva välillä $[0,1]$, sillä

$$\int_0^1 x^{\alpha-2} \underbrace{|\cos \frac{1}{x}|}_{\leq 1} dx \leq \int_0^1 x^{\alpha-2} dx = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Siis $f'$ on integroituva välillä $[0,1]$ ja

$$f(x) = \int_0^x f'(t)dt, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

L. 3.71 $\Rightarrow$ $f$ absoluuttisesti jatkuva, kun $\alpha > 1$. $\square$

**Lause 3.80.** *Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ kasvava. Tällöin*

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a),$$

*jos ja vain jos $f$ on absoluuttisesti jatkuva välillä $[a,b]$.*

**Tod.** Oletetaan, että $f$ on absoluuttisesti jatkuva: Lause 3.78 $\Rightarrow$

$$\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a) \quad \forall x \in [a,b].$$

Valitaan $x = b \;\Rightarrow\;$ väite.
Kääntäen: Oletetaan

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a). \tag{3.81}$$

<u>Väite:</u> $f$ on absoluuttisesti jatkuva.
L 3.78 $\Rightarrow$ riittää osoittaa

$$\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a) \quad \forall x \in [a,b].$$

<u>Vastaoletus:</u> $\exists c \in ]a,b[$ s.e.

$$\int_a^c f'(t)dt < f(c) - f(a).$$

Koska $f$ on kasvava väleillä $[a,c]$ ja $[c,b]$, niin

$$\overset{3.52}{\Longrightarrow} \int_a^b f'(t)dt = \underbrace{\int_a^c f'(t)dt}_{<f(c)-f(a)} + \underbrace{\int_c^b f'(t)dt}_{\le f(b)-f(c)} < f(c) - f(a) + f(b) - f(c) = f(b) - f(a).$$

Ristiriita oletuksen (3.81) kanssa.
<u>Siis:</u>

$$\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a) \quad \forall x \in [a,b] \overset{3.78}{\Longrightarrow} f \text{ abs. jatkuva.} \qquad \square$$

**Määritelmä 3.82.** Rajoitetusti heilahteleva funktio $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on *singulaarinen*, jos $f'(x) = 0$ m.k. $x \in [a,b]$.
(Huom. $f$ rajoitusti heilahteleva $\Rightarrow$ $\exists f'(x)$ m.k. $x \in [a,b]$.)

**Esimerkki 3.83.**

1. Vakiofunktiot ovat singulaarisia (ja abs. jatkuvia).
2. Cantorin 1/3-funktio on singulaarinen.
3. Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ absoluuttisesti jatkuva. Tällöin

$$f \text{ singulaarinen} \iff f \text{ vakiofunktio}.$$

<u>Syy:</u>

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 0 \text{ m.k.} \\ f \text{ abs. jatkuva} \end{array}\right\} \overset{3.75}{\Longrightarrow} f(x) \equiv c \text{ vakio}.$$

Osoittautuu, että jokainen rajoitetusti heilahteleva funktio voidaan jakaa absoluuttisesti jatkuvaan ja singulaariseen osaan. (Muistutus: $f$ abs. jatkuva $\Rightarrow$ $f$ raj. heilahteleva, muttei kääntäen.)

**Lause 3.84** (Lebesguen jako)**.** *Jos $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on rajoitetusti heilahteleva, niin*

$$f = g + h,$$

*missä $g$ on absoluuttisesti jatkuva ja $h$ on singulaarinen. Jako on lisättävää vakiota vaille 1-käsitteinen.*

**Tod.** Lauseen 3.61 nojalla $f'(x)$ on olemassa m.k. $x \in [a,b]$ ja lisäksi $f'$ on integroituva. Määritellään

$$g(x) = \int_a^x f'(t)dt.$$

L. 3.71 $\Rightarrow$ $g$ abs. jatkuva. Olkoon $h = f - g$. Silloin $h$ on rajoitetusti heilahteleva ja

$$h'(x) = (f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) \overset{3.39}{=} f'(x) - f'(x) = 0 \text{ m.k. } x \in [a,b]$$
$$\Rightarrow h \text{ singulaarinen.}$$

Siis $f = g + h$ on vaadittu jako.
Yksikäs.: Oletetaan, että $f = g_1 + h_1 = g_2 + h_2$, missä $g_1, g_2$ ovat absoluuttisesti jatkuvia ja $h_1, h_2$ singulaarisia. Nyt

$$\left.\begin{array}{ll} w = h_2 - h_1 = g_1 - g_2 & \text{abs. jatkuva,} \\ w'(x) = h_2'(x) - h_1'(x) = 0 & \text{m.k. } x \in [a,b] \end{array}\right\} \overset{3.75}{\Longrightarrow} w(x) \equiv c \text{ vakiofunktio} \quad \square$$

**Lisätietoja**

1. Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ absoluuttisesti jatkuva. Tällöin $f$ toteuttaa *Lusinin ehdon* $(N)$, t.s.

$$E \subset [a,b],\ m(E) = 0 \ \Rightarrow\ m(fE) = 0.$$

(HT 7/6)

2. Toinen karakterisaatio abs. jatkuville funktioille (ks. esim. [GZ, 7.45]). Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Tällöin $f$ on absoluuttisesti jatkuva $\Longleftrightarrow$
   (a) $f$ jatkuva,
   (b) $f$ on rajoitetusti heilahteleva,
   (c) $E \subset [a,b],\ m(E) = 0 \ \Rightarrow\ m(fE) = 0$ "ehto $(N)$".
3. Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funktio s.e. $\exists f'(x)\ \forall x \in [a,b]$ ja $f'$ on integroituva. Silloin $f$ on absoluuttisesti jatkuva (ks. esim. [GZ, 7.47]).

**Muuttujan vaihto Lebesguen integraalissa,** $n = 1$.
Absoluuttinen jatkuvuus liittyy myös muuttujan vaihtoon Lebesguen integraalissa.
Diff I: Jos

1. $h\colon [a,b] \to [c,d]$ jatkuvasti derivoituva ja
2. $f\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ jatkuva, niin

$$\int_{h(a)}^{h(b)} f(x)dx = \int_a^b f\big(h(t)\big)h'(t)dt. \tag{3.85}$$

Tod. Olkoon $F(x) = \int_c^x f(t)dt$. Silloin $F'(x) = f(x)$ ja

$$\int_{h(a)}^{h(b)} f(x)dx = F\big(h(b)\big) - F\big(h(a)\big) = \int_a^b (F \circ h)'(t)dt$$
$$= \int_a^b F'\big(h(t)\big)h'(t)dt = \int_a^b f\big(h(t)\big)h'(t)dt. \quad \square$$

Kysymys: Päteekö (3.85) lievemmillä oletuksilla?
Jos esim. $h\colon [0,1] \to [0,1]$ on Cantorin 1/3-funktio ja $f \equiv 1$, niin (3.85):n oikea puoli $= 0$ ($h'(t) = 0$), mutta vasen puoli $= 1$.

Absoluuttinen jatkuvuus on yo. ongelmassa olennaista, sillä pätee:

**Lause 3.86.** *Olkoon $h\colon [a,b] \to [c,d]$ absoluuttisesti jatkuva ja olkoon $f \in L^\infty([c,d])$. Silloin*

$$\int_{h(a)}^{h(b)} f(x)dx = \int_a^b f\big(h(t)\big)h'(t)dt. \tag{3.87}$$

Todistusta varten tarvitaan aputuloksia.

**Lemma 3.88.** *Olkoon $f\colon ]a,b[ \to \mathbb{R}$, $E \subset ]a,b[$ s.e. $\exists f'(x)$ $\forall x \in E$. Jos $m(fE) = 0$, niin $f'(x) = 0$ m.k. $x \in E$.*

Huom. Tässä *ei* oleteta, että $E$ on mitallinen.

**Tod.** Merk. $B = \{x \in E\colon f'(x) \neq 0\}$.
Väite: $m(B) = 0$.
Merkitään

$$B_j = \Big\{x \in B\colon 0 < |y-x| < 1/j \;\Rightarrow\; y \in ]a,b[ \text{ ja } \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} > \frac{1}{j}\Big\}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Osoitetaan: $B = \cup_j B_j$. $\quad \cup_j B_j \subset B$ selvä.

$$\begin{aligned} x \in B \;&\Rightarrow\; f'(x) \neq 0 \;\Rightarrow\; \exists j_1 \in \mathbb{N} \text{ s.e. } |f'(x)| > 1/j_1 \\ &\Rightarrow\; \exists j_2 \in \mathbb{N} \text{ s.e. } y \in ]a,b[ \text{ ja } \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} > \frac{1}{j_1}, \text{ kun } |y-x| < 1/j_2 \\ &\Rightarrow\; x \in B_j, \text{ missä } j = \max\{j_1, j_2\} \\ &\Rightarrow\; B = \cup_j B_j. \end{aligned}$$

Riittää osoittaa: $m(B_j) = 0$. $\quad (\Rightarrow\; m(B) = 0)$
Olkoon $I \subset ]a,b[$ mv. väli, $m(I) < 1/j$. Merkitään $A = I \cap B_j$. Riittää osoittaa, että $m(A) = 0$, sillä $B_j$ voidaan peittää äärellisen monella tällaisella joukolla $A$. Havaitaan ensiksi

$$A \subset E \;\Rightarrow\; fA \subset fE \;\overset{m(fE)=0}{\Longrightarrow}\; m(fA) = 0.$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Peitetään $fA$ väleillä $I_k, k \in \mathbb{N}$, s.e.

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} m(I_k) < \varepsilon/j.$$

$$
\begin{aligned}
&A \subset f^{-1}\big(\bigcup_k I_k\big) = \bigcup_k f^{-1} I_k \;\Rightarrow\; A = \bigcup_k (A \cap f^{-1} I_k)\\
&x, y \in A \cap f^{-1} I_k,\; A = I \cap B_j,\; m(I) < 1/j \;\Rightarrow\; x \in B_j,\; |x-y| < 1/j\\
&\overset{B_j\text{:n määr.}}{\Longrightarrow} \;\Big|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\Big| > \frac{1}{j}\\
&\Rightarrow\; |y-x| < j\,|f(y)-f(x)| \overset{f(y),f(x)\in I_k}{\leq} j\,m(I_k)\\
&\Rightarrow\; d(A \cap f^{-1} I_k) \leq j\,m(I_k) \;\Rightarrow\; m^*(A \cap f^{-1} I_k) \leq j\,m(I_k)\\
&\Rightarrow\; m^*(A) \leq \sum_k m^*(A \cap f^{-1} I_k) \leq j \sum_{k\in\mathbb{N}} m(I_k) < \varepsilon\\
&\Rightarrow\; m(A) = 0. \quad \square
\end{aligned}
$$

**Lemma 3.89.** *Olkoot* $h\colon ]a,b[\to]c,d[$, $g\colon ]c,d[\to \mathbb{R}$ *s.e.* $h'(t)$, $g'(x)$ *ja* $(g\circ h)'(t)$ *ovat olemassa m.k.* $t \in ]a,b[$ *ja m.k.* $x \in ]c,d[$. *Jos* $g$ *toteuttaa ehdon* $(N)$ *ja* $g'(x) = f(x)$ *m.k., niin*

$$(g\circ h)'(t) = f\big(h(t)\big)h'(t) \quad \text{m.k. } t \in ]a,b[. \tag{3.90}$$

**Tod.**

$$
\begin{aligned}
]a,b[ &= E \cup F, \text{ missä } m(F) = 0 \text{ ja}\\
&\qquad \exists h'(t) \text{ ja } \exists (g\circ h)'(t)\ \forall t \in E,\\
]c,d[ &= P \cup Q, \text{ missä } m(Q) = 0 \text{ ja}\\
&\qquad \exists g'(x) \text{ ja } g'(x) = f(x)\ \forall x \in P
\end{aligned}
$$

$$E = (E \cap h^{-1}P) \cup (E \cap h^{-1}Q)$$

Jos $t \in E \cap h^{-1}P$, niin (3.90) pätee ($t \in E$ ja $h(t) \in P$).

$$
\begin{aligned}
&m\big(\underbrace{h(E\cap h^{-1}Q)}_{\subset Q}\big) = 0 \overset{3.88}{\Longrightarrow} h'(t) = 0 \text{ m.k. } t \in E \cap h^{-1}Q\\
&g \;\text{ tot. ehdon } (N) \;\Rightarrow\; m\big(g(h[E\cap h^{-1}Q])\big) = 0\\
&\overset{3.88}{\Longrightarrow} (g\circ h)'(t) = 0 \text{ m.k. } t \in E\cap h^{-1}Q\\
&\Rightarrow\; (g\circ h)'(t) = 0 = f\big(h(t)\big)h'(t) \text{ m.k. } t \in E \cap h^{-1}Q
\end{aligned}
$$

Siis (3.90) voimassa m.k. $t \in E$ eli m.k. $t \in ]a,b[$. $\square$

Huom. Yo. todistuksessa ei väitetä, että $E\cap h^{-1}P$ tai $E \cap h^{-1}Q$ olisi mitallinen.

**3.86:n tod.** Merkitään

$$F(x) = \int_c^x f(y)dy.$$

Väite: $F\circ h\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ absoluuttisesti jatkuva. Tod. Olkoon

$$M = \|f\|_\infty < \infty.$$

Silloin

$$\left.\begin{array}{c} |F(x_2)-F(x_1)| = \Big|\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\Big| \leq M|x_1-x_2| \\ h \;\text{ abs. jatkuva}\end{array}\right\} \overset{\text{(ylim. HT)}}{\Longrightarrow} F\circ h \;\text{ abs. jatkuva.}$$

Siten
$$\int_{h(a)}^{h(b)} f(x)dx = F\big(h(b)\big) - F\big(h(a)\big) \overset{3.78}{=} \int_a^b (F\circ h)'(t)dt.$$
Toisaalta

$$\left.\begin{array}{r}F \text{ integraalifunktio } \Rightarrow F \text{ abs. jva } \Rightarrow F \text{ tot. ehdon } (N)\\ 3.39 \Rightarrow F'(x) = f(x) \text{ m.k.}\end{array}\right\} \overset{3.89}{\Longrightarrow}$$

$$(F\circ h)'(t) = f\big(h(t)\big)h'(t) \text{ m.k.} \quad \square$$

**Huomautus 3.91.** Ehtoa "$f \in L^\infty([c,d])$" ei voida korvata ehdolla "$f$ integroituva" Lauseessa 3.86.
<u>Esim.</u> Olkoon $h\colon [0,2]\to\mathbb{R}$,

$$h(t) = \begin{cases} t^3|\cos(\pi/t)|^3, & \text{kun } t\neq 0,\\ 0, & \text{kun } t = 0;\end{cases}$$

ja olkoon $f\colon [0,8]\to\mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^{-2/3}, & \text{kun } x\neq 0,\\ 0, & \text{kun } x = 0.\end{cases}$$
Silloin $h$ on absoluuttisesti jatkuva (ylim. HT). Merkitään

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{3}x^{-2/3}dx = x^{1/3}, \quad F\big(h(t)\big) = t|\cos(\pi/t)|.$$

$F\circ h$ ei raj. heilahteleva (ylim HT) $\Rightarrow$ $F\circ h$ *ei* abs. jatkuva. Jos (3.87) pätisi, niin

$$(F\circ h)(t) = F\big(h(t)\big) \overset{h(0)=0}{=} \int_{h(0)}^{h(t)} f(x)dx = \int_0^t f\big(h(t)\big)h'(t)dt,$$

ja $F\circ h$ olisi integraalifunktiona abs. jatkuva.

Kuitenkin pätee:

**Lause 3.92.** *Olk. $h\colon [a,b]\to[c,d]$ abs. jatkuva ja kasvava, ja olk. $f\colon [c,d]\to\mathbb{R}$ integroituva. Tällöin*
$$\int_{h(a)}^{h(b)} f(x)dx = \int_a^b f\big(h(t)\big)h'(t)dt.$$

**Tod.** Ks. esim. [Jo, 16.4].

LOPPU

Alla luettelo (eräistä) kirjoista ja luentomuistiinpanoista, joita voi käyttää lisämateriaalina.

## References

[EG] Evans, Lawrence ja Gariepy Ronald. *Measure theory and fine properties of functions,* CRC Press, 1992.

[Fr] Friedman, Avner. *Foundations of modern analysis,* Dover Publications Inc., 1982.

[GZ] Gariepy, Ronald ja Ziemer, William. *Modern real analysis,* PWS Publishing Company, 1994.

[HS] Hewitt, Edwin ja Stromberg, Karl. *Real and abstract analysis,* Springer-Verlag, 1975.

[Ho] Holopainen, Ilkka. *Mitta ja integraali, Kevätlk. 2002.* http://www.helsinki.fi/~iholopai/MitInt02.ps

[Jo] Jones, Frank. *Lebesgue integration on Euclidean space,* Jones and Bartlett Publishers, 1993.

[Mar] Martio, Olli. *Reaalianalyysi I, kevät 1999.*

[Mat] Mattila, Pertti. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces,* Cambridge University Press, 1995.

[MW] McDonald, John N. ja Weiss, Neil A. *A course in real analysis,* Academic Press Inc., 1999.

[Ro] Royden, H. L. *Real analysis,* Macmillan Publishing Company, 1988.

[Ru] Rudin, Walter. *Real and complex analysis,* McGraw-Hill Book Co., 1987.