

- Tarkastellaan stationaarista VAR(p)-prosessia

$$y_t = A_1 y_{t-1} + \cdots + A_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \Omega) \quad (t \in \mathbb{Z}),$$

jolla on lineaarinen VMA(∞)-esitys

$$y_t = A(B)^{-1} \varepsilon_t = \Psi(B) \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \varepsilon_{t-j},$$

jossa $\Psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j B^j$, $\Psi_0 = I_n$.

- Impulssivasteanalyysissä mallin virheet tai innovaatiot ε_t ajatellaan "impulsseiksi" tai "satunnaissokeiksi", joiden vaikutusta havaittaviin muuttujiin eli y_t :n komponentteihin tutkitaan.

Stationaarisen VAR-mallin teoriaa

Impulssivasteanalyysi: Impulssivasteiden määrittely

- VAR(p)-prosessin lineaarinen VMA(∞)-esitys

$$y_t = A(B)^{-1} \varepsilon_t = \Psi(B) \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad \Psi_0 = I_n \quad (*)$$

- Oletetaan, että ε_t :n yhdessä komponentissa ε_{kt} ($1 \leq k \leq n$) tapahtuu yhden yksikön muutos ajankohtana $t = 0$.
- Ajatellaan keinotekoisesti, että
 - $y_t = 0$, $t < 0$ ja
 - $\varepsilon_{k0} = 1$, $\varepsilon_{i0} = 0$, $i \neq k$, ja $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = 0$.
- Jos $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ saadaan (*):stä

$$y_h = \Psi_h \varepsilon_0 = \Psi_h e_k.$$

- Siis, matriisin Ψ_h k . sarake kuvaa ajankohtana $t = 0$ tapahtuneen impulssin $\varepsilon_{k0} = 1$ vaikutusta prosessiin y_t ajankohtana $t = h$.

Stationaarisen VAR-mallin teoriaa

Impulssivasteanalyysi: Impulssivasteiden määrittely

- Matriisin Ψ_h k . sarake kuvaa ajankohtana $t = 0$ tapahtuneen impulssin $\varepsilon_{k0} = 1$ vaikutusta prosessiin y_t ajankohtana $t = h$.
- Vastaavasti matriisin Ψ_h alkio eli *impulssivaste* $\psi_{jk,h}$ kuvaa tämän impulssin vaikutusta y_t :n komponenttiin y_{jt} ajankohtana $t = h$.
- Koska $\Psi_h \rightarrow 0$ geometrisesti, kun $h \rightarrow \infty$, häipyvät nämä vaikutukset ajan kuluessa.
- Havainnollisen kuvan asiasta saa piirtämällä kertoimista $\psi_{jk,h}$, $h = 0, \dots, H$, (tai niiden estimaateista) muodostuva (empiirinen) *impulssivastefunktio* "tarpeeksi suurella" H :n arvolla (eli $\psi_{jk,h} \approx 0$, kun $h > H$).

Stationaarisen VAR-mallin teoriaa

Impulssivasteanalyysi: Impulssivasteiden määrittely

- Matriisin Ψ_h avulla voidaan tutkia miten impulssin ε_t vaikutus ilmenee prosessissa y_t ajankohtana $t + h$.
- Lisäksi voidaan tutkia kumulatiivisia ja kokonaisvaikutuksia:
- Matriisin $\sum_{j=0}^h \Psi_j$ alkiot kuvaavat innovaatioissa ε_t tapahtuneen yhden yksikön muutoksen vaikutusta h :n aikayksikön kuluttua.
 - Matriisin $\sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j = A(1)^{-1}$ alkiot kuvaavat innovaatioissa ε_t tapahtuneen yhden yksikön muutoksen kokonaisvaikutusta.
- Impulssivasteanalyysillä on yhteys myös kausaalisuustarkasteluihin.
 - Olkoon $y_t = (z_t, x_t)$ ja $\Psi(B) = [\Psi_{ij}(B)]_{i,j=1,2}$ ositettu vastaavasti.
 - Gr-kausalisuutta suuntaan $x \rightarrow z$ ei ole jos ja vain jos $\Psi_{12}(B) = 0$.
 - Toisin sanoen, kausaalisuutta voidaan tarkastella myös prosessin VMA(∞)-esityksen avulla.

Stationaarisen VAR-mallin teoriaa

Impulssivasteanalyysi: Impulssivasteiden määrittely

- Edellä esitetystä impulssivasteanalyysistä oletettiin, että innovaatioissa eli ε_t :n komponenteissa tapahtuvat muutokset ovat yhden yksikön suuruisia.
- Jos innovaatioiden varianssit ovat kovin erisuuruisia, voi olla luontevampaa tarkastella yhden hajontayksikön suuruisia muutoksia.
- Edellä tarkasteltiin vain yksittäisessä innovaatioissa tapahtuvan muutoksen vaikutuksia.
 - Tämä tuntuu epäloogiselta, jos innovaatiot ovat korreloituneita.
- Innovaatioiden välinen korrelaatio on kuitenkin varsin hankalasti huomioon otettava kysymys.
- Eräs ehdotettu ratkaisu on ns. ortogonaalisiin eli korreloimattomiin (normaalisessa tapauksessa riippumattomiin) innovaatioihin siirtyminen.

Stationaarisen VAR-mallin teoriaa

Impulssivasteanalyysi: Impulssivasteiden määrittely

- VAR(p)–prosessin lineaarinen VMA(∞)–esitys

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad \Psi_0 = I_n, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \Omega) \quad (*)$$

- Koska Ω on positiivisesti definiitti, se voidaan esittää tulona $\Omega = CC'$ (ns. Cholesky–hajotelma), jossa C on epäsingulaarinen alakolmio- tai yläkolmiomatriisi.
- Ideana on kirjoittaa VMA(∞)–esitys (*) muotoon

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} (\Psi_j C) C^{-1} \varepsilon_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j^* \varepsilon_{t-j}^*, \quad \varepsilon_t^* \sim \text{iid}(0, I_n)$$

- Muunnetut innovaatiot ε_t^* ovat siten korreloimattomia ja varianssiltaan saman suuruisia, joten niihin liittyvät impulssivasteet eli matriisin Ψ_j^* alkioit välttävät edellä kuvatut ongelmat.
- Hankaluutena kuitenkin, että *muunnosmatriisi C ei ole yksikäsitteinen.*

Stationaarisen VAR-mallin teoriaa

Impulssivasteanalyysi: Impulssivasteiden estimointi

- Tarkastellaan VAR(p)-mallia

$$y_t = A_1 y_{t-1} + \dots + A_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \Omega), \quad t = 1, \dots, T.$$

- Jakso 2.3:

$$\Psi_j = \sum_{i=1}^j \Psi_{j-i} A_i, \quad j = 1, 2, \dots, \quad \Psi_0 = I_n, \quad A_i = 0, \quad i > p.$$

- Siis, luontevat estimaattorit

$$\hat{\Psi}_j = \sum_{i=1}^j \hat{\Psi}_{j-i} \hat{A}_i, \quad j = 1, 2, \dots, \quad \hat{\Psi}_0 = I_n, \quad \hat{A}_i = 0, \quad i > p.$$

- Ns. deltamenetelmää käyttäen voidaan osoittaa, että estimaattorit $\hat{\Psi}_1, \dots, \hat{\Psi}_H$ (H kiinteä) ovat asympotoottisesti normaalisti jakautuneita (ks. Liite B).
- Kun $H > p$ rajajakauma on välttämättä singulaarinen ja näin voi käydä myös, kun $H < p$.

Stationaarisen VAR-mallin teoriaa

Impulssivasteanalyysi: Impulssivasteiden estimointi

Kuvion 1.1. aineistolle estimoitu VAR(2)-malli, kun oletetaan $dexch_t \leftrightarrow rdif_t$:

$$\begin{bmatrix} dexch_t \\ rdif_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.002 \\ (0.002) \\ 0.003 \\ (0.014) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.411 & 0.023 \\ (0.084) & (0.012) \\ 0 & 1.147 \\ & (0.086) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dexch_{t-1} \\ rdif_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.158 & -0.026 \\ (0.082) & (0.012) \\ 0 & -0.185 \\ & (0.086) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dexch_{t-2} \\ rdif_{t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\epsilon}_{1t} \\ \tilde{\epsilon}_{2t} \end{bmatrix}.$$

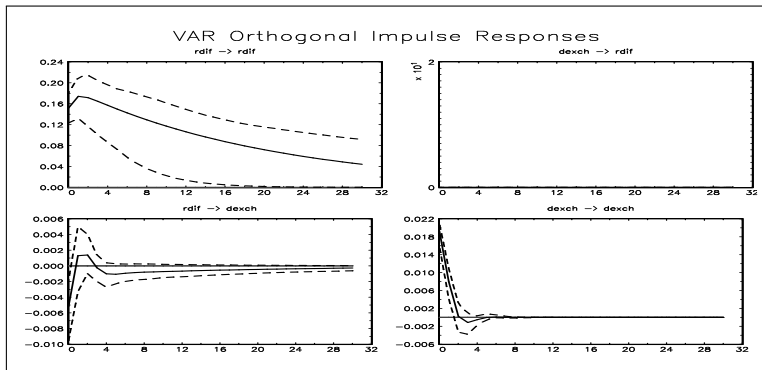
jossa $t = 1999I, \dots, 2009XI$,

$dexch_t$ = Euron ja Yhdysvaltojen dollarin välisen kuukausittaisen vaihtokurssin (euro/U.S. dollari) muutos ja

$rdif_t$ = euroalueen ja Yhdysvaltojen 10 vuoden valtioiden obligaatioiden kesikorkojen ero.

Stationaarisen VAR-mallin teoriaa

Impulssivasteanalyysi: Impulssivasteiden estimointi

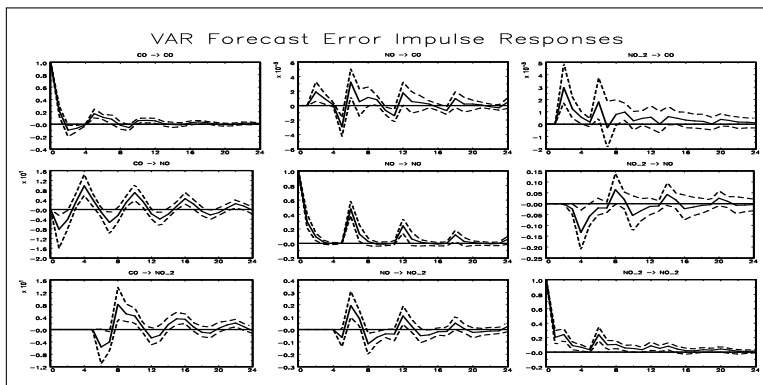


Kuvio 4.3. Sarjoille $dexch_t$ ja $rdif_t$ estimoidusta VAR(2)-mallista lasketut ortogonaaliset impulssivasteet, kun oletettu samanaikainen vaikutus on Gr-kausalisuuden mukaisesti $rdif_t \rightarrow dexch_t$.

Katkoviivat osoittavat likimääräiset 95%:n luottamusvälit, jotka on muodostettu eräällä bootstrap-menetelmän versiolla.

Stationaarisen VAR-mallin teoriaa

Impulssivasteanalyysi: Impulssivasteiden estimointi



Kuvio 4.3. Kuvion 4.1 saasteaineistolle jaksossa 4.4 valitun rajoitetun VAR(8)-mallin tavanomaiset impulssivastefunktiot.

Katkoviivat osoittavat likimääräiset 95%:n luottamusvälit, jotka on muodostettu eräällä bootstrap-menetelmän versiolla.