- Rajoittamattoman mallin tapauksessa residuaalien määritelmä on

$$\hat{\varepsilon}_t = y_t - \hat{\nu} - \hat{A}_1 y_{t-1} - \cdots - \hat{A}_p y_{t-p}, \quad t = 1, \ldots, T.$$

- Jos malli on oikein spesifioitu, tulisi residuaalien muistuttaa ominaisuuksiltaan teoreettisia virheitä ε_t.
- Tämän tarkistamiseksi kannattaa ensiksi piirtää residuaalisarjojen kuvat ja tutkia
  - löytyykö poikkeavia residuaaleja tai residuaaliryhmiä,
  - varianssin vaihtelua tai muita selviä systemaattisia piirteitä.
  - Myös residuaalien normaalisuutta on hyvä tutkia, vaikka mallin asymptoottinen estimointi- ja testiteoria ei normaalisuutta vaadikaan (iid–oletus riittää).

- Residuaalien auto- ja ristikorreloituneisuutta voidaan tutkia laskemalla residuaalisarjoista auto- ja ristikorrelaatiofunktiot.
- Jos teoreettisille virheille pätee $\varepsilon_t \sim \text{iid}\,(0, \Omega)$, ovat residuaalien auto- ja ristikorrelaatioestimaattorit asymptoottisesti normaalisia odotusarvona nolla.
- Toisin kuin teoreettisten virheiden tapauksessa residuaaleista estimoidut auto- ja ristikorrelaatiot eivät ole asymptoottiseti riippumattomia eikä $\mathrm{N}\,(0, 1/T)$–jakauma-approksimaatio ole pätevä.
- Oikea asymptoottinen jakauma tunnetaan ja jotkut tietokoneohjelmat tulostavat niihin perustuvat asymptoottiset keskivirheet, joiden avulla residuaaleista estimoitujen auto- ja ristikorrelaatioiden suuruutta voidaan arvioida.

- Residuaalien mahdollisen auto- ja ristikorreloituneisuuden tutkimisessa voidaan käyttää apuna myös tilastollisia testejä.
- Ns. *pormanteau-testi* perustuu suoraan residuaalien auto- ja ristikorrelaatiofunktioihin.
- Eräs versio testisuureesta on

$$Q_K^* = T^2 \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{T-k} \operatorname{tr}\left(S_k' S_0^{-1} S_k S_0^{-1}\right), \qquad S_k = \sum_{t=1}^{T-k} \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t+k}'.$$

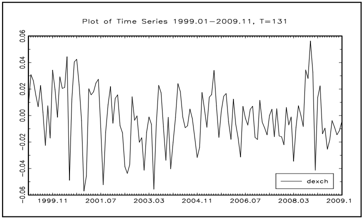
  Jos rajoittamattomassa VAR(p)–mallissa $\varepsilon_t \sim \text{iid}\,(0, \Omega)$, niin

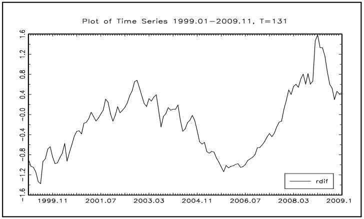
$$Q_K^* \underset{as}{\sim} \chi^2_{n^2(K-p)}.$$

- Rajoitetussa mallissa, vapausasteluku $= n^2 K -$ VAR–parametrien lukumäärä eli $n^2 K - \dim(\delta)$.
- Asymptoottinen tulos edellyttää lisäksi, että K on "suuri".

Stationaarisen VAR–mallin teoriaa

Mallinvalinta ja valitun mallin sopivuuden tutkiminen residuaaleja käyttäen

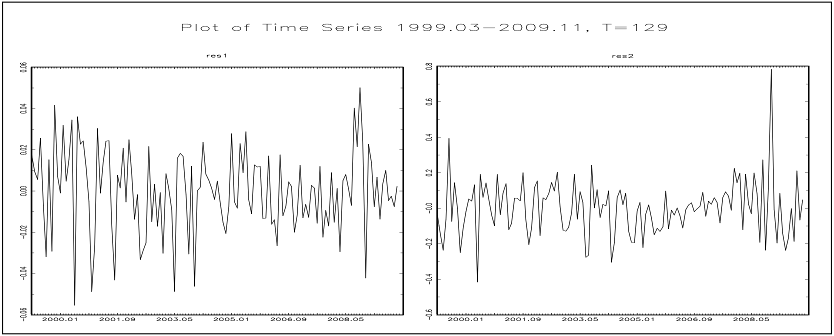




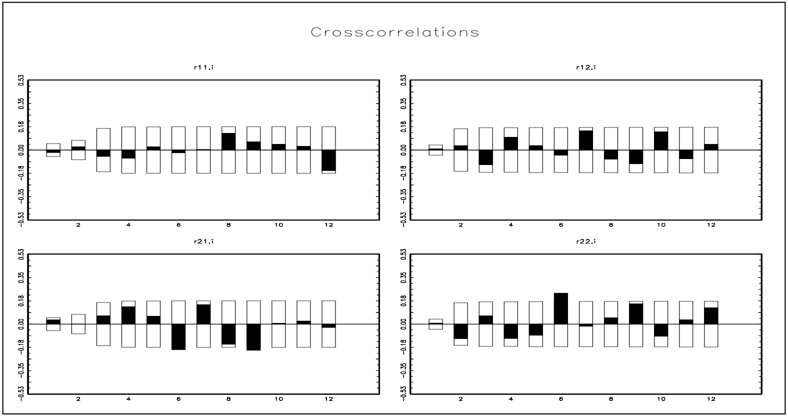
Kuvio 1.1. Euron ja Yhdysvaltojen dollarin välisen kuukausittaisen vaihtokurssin (euro/U.S. dollari) muutos (vasemalla) ja euroalueen ja Yhdysvaltojen 10 vuoden valtioiden obligaatioiden keskikorkojen ero (oikealla) ajanjaksona 1999I - 2009XI.

Kuvion 1.1. aineistolle estimoitu VAR(2)–malli

$$\begin{bmatrix} dexch_t \\ rdif_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{(0.002)}{-0.002} \\ \underset{(0.014)}{0.004} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underset{(0.089)}{0.418} & \underset{(0.012)}{0.023} \\ \underset{(0.672)}{-0.187} & \underset{(0.090)}{1.144} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dexch_{t-1} \\ rdif_{t-1} \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} \underset{(0.087)}{-0.178} & \underset{(0.012)}{-0.026} \\ \underset{(0.659)}{0.603} & \underset{(0.089)}{-0.179} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dexch_{t-2} \\ rdif_{t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_{1t} \\ \hat{\varepsilon}_{2t} \end{bmatrix}.$$



Kuvio 4.2. (i) Kuvion 1.1. aineistolle estimoidun VAR(2)–mallin residuaalit (vasemmalla $\hat{\varepsilon}_{1t}$ ja oikealla $\hat{\varepsilon}_{2t}$).



Kuvio 4.2. (ii) Kuvion 1.1. aineistolle estimoidun VAR(2)–mallin residuaaleista lasketut auto- ja ristikorrelaatiofunktiot.
Valkoiset pylväät osoittavat kriittiset rajat ($\pm 2\times$ likimääräinen keskivirhe, kun $\varepsilon_t \sim \text{iid}\,(0,\Omega)$).

- Miten voitaisiin määritellä kausaalisuus reaaliarvoisesta muuttujasta x reaaliarvoiseen muuttujaan z?
- Kausaalisuudelle on ilmeisesti välttämätöntä, ettei syytapahtuma tapahdu seurauksen jälkeen.
- Jos muuttuja x on muuttujan z syy, täytyisi muuttujasta x olla siten hyötyä ennustettaessa muuttujaa z.
- Tarkastellaan seuraavaksi kahta *reaaliarvoisia* stokastista prosessia x_t ja z_t ja z_t:n tulevien arvojen ennustamista ajankohtana t.
- Olkoon $\mathcal{F}_t$ hypoteettinen muuttujajoukko (tai informaatiojoukko), joka x_t:n lisäksi sisältää kaikki relevantit muuttujat, jotka ajankohtana t voivat tulla kysymykseen z_t:n tulevia arvoja z_{t+h}, $h \geq 1$, ennustettaessa.

Stationaarisen VAR–mallin teoriaa

Grangerin kausaalisuus: Yleinen määritelmä

- Olkoot
  - $z_t(h \mid \mathcal{F}_t) = \mathrm{E}(z_{t+h} \mid \mathcal{F}_t)$ informaatiojoukkoon $\mathcal{F}_t$ perustuva z_{t+h}:n (keskineliövirheen mielessä) optimaalinen ennuste
  - $z_t(h \mid \mathcal{F}_t \backslash \mathcal{F}_t^x) = \mathrm{E}(z_{t+h} \mid \mathcal{F}_t \backslash \mathcal{F}_t^x)$ z_{t+h}:n optimaalinen ennuste, kun joukosta $\mathcal{F}_t$ on poistettu $\mathcal{F}_t^x = \{x_s, s \leq t\}$ ja
  - $\Sigma_z(h \mid \mathcal{F}_t)$ ja $\Sigma_z(h \mid \mathcal{F}_t \backslash \mathcal{F}_t^x)$ vastaavat keskineliövirheet
- Prosessien x_t ja z_t välillä sanotaan olevan *Grangerin kausaalisuus* edellisestä jälkimmäiseen eli $x \rightarrow z$, jos

$$\Sigma_z(h \mid \mathcal{F}_t) < \Sigma_z(h \mid \mathcal{F}_t \backslash \mathcal{F}_t^x)$$

  ainakin yhdellä t ja $h \in \{1, 2, ...\}$.
- Toisin sanoen, prosessia z_t voidaan ennustaa tarkemmin käyttämällä prosessia x_t kuin ilman sitä.

- Olkoot nyt x_t ja z_t vektoriarvoisia prosesseja ja
  - $z_t(h \mid \mathcal{F}_t) = \mathrm{E}(z_{t+h} \mid \mathcal{F}_t)$ informaatiojoukkoon $\mathcal{F}_t$ perustuva z_{t+h}:n (keskineliövirheen mielessä) optimaalinen ennuste
  - $z_t(h \mid \mathcal{F}_t \backslash \mathcal{F}_t^x) = \mathrm{E}(z_{t+h} \mid \mathcal{F}_t \backslash \mathcal{F}_t^x)$ z_{t+h}:n optimaalinen ennuste, kun joukosta $\mathcal{F}_t$ on poistettu $\mathcal{F}_t^x = \{x_s, s \leq t\}$ ja
  - $\Sigma_z(h \mid \mathcal{F}_t)$ ja $\Sigma_z(h \mid \mathcal{F}_t \backslash \mathcal{F}_t^x)$ vastaavat keskineliövirhematriisit
- Pätee välttämättä (ja ilmeisesti)

$$\Sigma_z(h \mid \mathcal{F}_t \backslash \mathcal{F}_t^x) - \Sigma_z(h \mid \mathcal{F}_t) \geq 0.$$

- Ei kohtuullista vaatia, että tässä olisi $>$, joten *Grangerin kausaalisuuden* sanotaan pätevän suuntaan $x \to z$, jos

$$\Sigma_z(h \mid \mathcal{F}_t) \neq \Sigma_z(h \mid \mathcal{F}_t \backslash \mathcal{F}_t^x)$$

  ainakin yhdellä t ja $h \in \{1, 2, ...\}$.
- Samanaikaiseen kausaalisuuteen ei oteta kantaa.

- Tarkastellaan stationaarista VAR(p)–mallia

$$y_t = A_1 y_{t-1} + \cdots + A_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}\,(0, \Omega)\,.$$

- Nyt informaatiojoukko on $\mathcal{F}_t = \{y_s,\ s \leq t\}$.
- Kun ositetaan $y_t = (z_t, x_t)$, niin yo mallista tulee

$$\begin{bmatrix} z_t \\ x_t \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{p} \begin{bmatrix} A_{11,j} & A_{12,j} \\ A_{21,j} & A_{22,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{t-j} \\ x_{t-j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \zeta_t \\ \xi_t \end{bmatrix}.$$

- Varsin ilmeistä, että Grangerin kausaalisuus suuntaan $x \to z$ liittyy siihen onko $A_{12,j} \neq 0$ jollain $1 \leq j \leq p$.
- **Lause 4.1.** Jos $y_t = (z_t, x_t)$ on kuten edellä, niin Grangerin kausaalisuus suuntaan $x \to z$ <u>*ei päde*</u> jos ja vain jos $A_{12,j} = 0$ kaikilla $j = 1, ..., p$.

- Myös vakiollisessa VAR(p)–mallissa

$$\begin{bmatrix} z_t \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{p} \begin{bmatrix} A_{11,j} & A_{12,j} \\ A_{21,j} & A_{22,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{t-j} \\ x_{t-j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \zeta_t \\ \xi_t \end{bmatrix}$$

  Grangerin kausaalisuus suuntaan $x \longrightarrow z$ *ei päde* jos ja vain jos $A_{12,j} = 0$ kaikilla $j = 1, ..., p$.
- Grangerin kausaalisuutta VAR(p)–mallissa voidaan siis testata testaamalla lineaarista hypoteesia

$$H_0 : A_{12,1} = \cdots = A_{12,p} = 0.$$

- Jos z_t on $n_1 \times 1$ vektori ja x_t on $n_2 \times 1$ vektori $(n_1 + n_2 = n)$ on $A_{12,j}$ $n_1 \times n_2$ matriisi ja rajoitteiden lukumäärä on $n_1 n_2 p$.
- Waldin testiä tai uskottavuusosamäärätestiä voidaan siten käyttää yhdessä (asymptoottisen) $\chi^2_{n_1 n_2 p}$–jakauman kanssa.

Kuvion 1.1. aineistolle estimoitu VAR(2)–malli

$$\begin{bmatrix} dexch_t \\ rdif_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{(0.002)}{-0.002} \\ \underset{(0.014)}{0.004} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underset{(0.089)}{0.418} & \underset{(0.012)}{0.023} \\ \underset{(0.672)}{-0.187} & \underset{(0.090)}{1.144} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dexch_{t-1} \\ rdif_{t-1} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \underset{(0.087)}{-0.178} & \underset{(0.012)}{-0.026} \\ \underset{(0.659)}{0.603} & \underset{(0.089)}{-0.179} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dexch_{t-2} \\ rdif_{t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_{1t} \\ \hat{\varepsilon}_{2t} \end{bmatrix}.$$

- Uskottavuusosamäärätesti:
  - $H_0 : dexch_t \nrightarrow rdif_t$; likimääränen P–arvo 0.65.
  - $H_0 : rdif_t \nrightarrow dexch_t$; likimääränen P–arvo 0.06.

- Kuvion 1.1. aineistolle estimoitu VAR(2)–malli, kun oletetaan $dexch_t \nrightarrow rdif_t$:

$$\begin{bmatrix} dexch_t \\ rdif_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{(0.002)}{-0.002} \\ \underset{(0.014)}{0.003} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underset{(0.084)}{0.411} & \underset{(0.012)}{0.023} \\ 0 & \underset{(0.086)}{1.147} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dexch_{t-1} \\ rdif_{t-1} \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} \underset{(0.082)}{-0.158} & \underset{(0.012)}{-0.026} \\ 0 & \underset{(0.086)}{-0.185} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dexch_{t-2} \\ rdif_{t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_{1t} \\ \tilde{\varepsilon}_{2t} \end{bmatrix}.$$

- Verrattuna rajoittamattoman mallin estimointiin on estimointitarkkuus (odotetusti) parantunut ja rajoittamattomat estimaatit muuttuneet vain vähän.