- Log–uskottavuusfunktion toiset derivaatat kuten rajoittamattomassa estimoinnissa (ks. Liite A.7):

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial \delta \partial \delta'} l(\delta, \Omega) = -\sum_{t=1}^{T} W_t \Omega^{-1} W_t', \quad W_t = H' X_t,$$

joten parametrin δ Fisherin informaatiomatriisi on

$$\mathcal{I}_{\delta\delta}(\delta, \Omega) = \sum_{t=1}^{T} \mathrm{E}\left(W_t \Omega^{-1} W_t'\right).$$

- Lisäksi, $\mathrm{E}\left(\partial^2 l(\delta, \Omega) / \partial \omega_{ij}\right) = 0$ eli parametrit δ ja Ω ovat ortogonaaliset.
- Estimaattorin $\tilde{\delta}$ asymptoottiseksi jakaumaksi saadaan siten

$$\tilde{\delta} \underset{as}{\sim} \mathrm{N}\left(\delta, \mathcal{I}_{\delta\delta}(\delta, \Omega)^{-1}\right).$$

- Ω:n uskottavuusyhtälöstä

$$\Omega = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(z_t - W_t'\delta\right)\left(z_t - W_t'\delta\right)' \qquad (\mathrm{UY}\left(\Omega\right))$$

seuraa, että Ω:n rajoitettu SU–estimaattori voidaan kirjoittaa

$$\tilde{\Omega} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(z_t - W_t'\tilde{\delta})(z_t - W_t'\tilde{\delta})'.$$

- Myöhemmin käytetään vain tarkentuvuutta

$$\tilde{\Omega} \xrightarrow{p} \Omega.$$

- Tarkastellaaan hypoteesia $H_0 : R\pi = b$ rajoittamattomassa mallissa

$$y_t = X_t'\pi + \varepsilon_t, \quad t = 1, ..., T, \quad \varepsilon_t \sim \text{nid}\,(0, \Omega)\,.$$

- Oletetaan, että SU–estimaattoreilla $\hat{\pi}$ ja $\hat{\Omega}$ on aiemmin esitetyt asymptoottiset ominaisuudet eli erityisesti

$$\sqrt{T}\,(\hat{\pi} - \pi) \xrightarrow{d} \text{N}\left(0, \Omega \otimes \mathbf{\Gamma}_x^{-1}\right),$$

jossa

$$\mathbf{\Gamma}_x = \text{E}(x_t x_t'), \quad x_t = \begin{bmatrix} 1 & y_{t-1}' & \cdots & y_{t-p}' \end{bmatrix}'.$$

- Jos alkuarvot ovat epästationaarisia, määritellään yo tuloksessa

$$\mathbf{\Gamma}_x = \lim_{T\to\infty} \text{E}\left(T^{-1}\sum_{t=1}^{T} x_t x_t'\right).$$

- Saatava testisuure on kuitenkin aivan sama.

Stationaarisen VAR–mallin teoriaa

Hypoteesien testaus: Waldin testi rajoittamattomassa mallissa

- Hypoteesista $H_0 : R\pi = b$ ja tuloksesta

$$\sqrt{T}\left(\hat{\pi} - \pi\right) \xrightarrow{d} \mathrm{N}\left(0, \Omega \otimes \mathbf{\Gamma}_x^{-1}\right)$$

seuraa (ks. Liite B, Lause B.3)

$$T\left(R\hat{\pi} - b\right)'\left[R(\Omega \otimes \mathbf{\Gamma}_x^{-1})R'\right]^{-1}\left(R\hat{\pi} - b\right)$$

$$\xrightarrow{d} Z'\left[R\left(\Omega \otimes \mathbf{\Gamma}_x^{-1}\right)R'\right]^{-1} Z \sim \chi_q^2, \quad Z \sim \mathrm{N}\left(0, R(\Omega \otimes \mathbf{\Gamma}_x^{-1})R'\right)$$

- Estimaattorin $\hat{\Omega}$ tarkentuvuuden nojalla

$$\left[R(\hat{\Omega} \otimes \hat{\mathbf{\Gamma}}_x^{-1})R'\right]^{-1} \xrightarrow{p} \left[R\left(\Omega \otimes \mathbf{\Gamma}_x^{-1}\right)R'\right]^{-1}, \quad \hat{\mathbf{\Gamma}}_x = T^{-1}\sum_{t=1}^{T} x_t x_t'.$$

- Siis, saadaan *Waldin testisuure* (ks. Liite B, Lause B.3)

$$\mathrm{W} = T\left(R\hat{\pi} - b\right)'\left[R(\hat{\Omega} \otimes \hat{\mathbf{\Gamma}}_x^{-1})R'\right]^{-1}\left(R\hat{\pi} - b\right) \xrightarrow{d} \chi_q^2.$$

- Waldin testisuure hypoteesille $H_0 : R\pi = b$:

$$\mathrm{W} = T\left(R\hat{\pi} - b\right)' \left[R(\hat{\Omega} \otimes \hat{\mathbf{\Gamma}}_x^{-1})R'\right]^{-1} \left(R\hat{\pi} - b\right) \xrightarrow{d} \chi_q^2$$

- Suuret testisuureen arvot kriittisiä. Käytännössä testiä sovelletaan laskemalla approksimatiivinen P–arvo

$$\mathrm{P} = \mathsf{P}_{\mathsf{H}_0}\left\{\mathrm{W} \geq \mathrm{W}\left(\mathbf{y}\right)\right\} \approx \mathsf{P}\left\{\chi_q^2 \geq \mathrm{W}\left(\mathbf{y}\right)\right\},$$

- jossa
  - χ_q^2 on χ_q^2–jakaumaa noudattava satunnaismuuttuja ja
  - $\mathrm{W}\left(\mathbf{y}\right)$ on (satunnaisen) testisuureen W aineistosta laskettu arvo.

- Tarkastellaan rajoittamatonta mallia

$$y_t = X_t'\pi + \varepsilon_t, \quad t = 1, ..., T, \quad \varepsilon_t \sim \text{nid}\,(0, \Omega)$$

ja siinä hypoteesia $H_0 : R\pi = b \Leftrightarrow \pi = H\delta + a$.

- *Uskottavuusosamäärätestin* testisuureen yleinen lauseke on

$$\text{LR} = 2\left[l(\hat{\pi}, \hat{\Omega}) - l(\tilde{\pi}, \tilde{\Omega})\right],$$

jossa $\tilde{\pi}$ ja $\tilde{\Omega}$ ovat parametrien π ja Ω rajoitetut SU–estimaattorit.

- Identiteetti $\text{tr}\,(BD) = \text{tr}(DB)$ (ks. monisteen s. 46) ja suora lasku $\Rightarrow$

$$l(\hat{\pi}, \hat{\Omega}) = -\frac{T}{2}\log\det(\hat{\Omega}) - \frac{Tn}{2} \quad \text{ja} \quad l(\tilde{\pi}, \tilde{\Omega}) = -\frac{T}{2}\log\det(\tilde{\Omega}) - \frac{Tn}{2}.$$

- Siis,

$$\text{LR} = T\left[\log\det(\tilde{\Omega}) - \log\det(\hat{\Omega})\right] \xrightarrow{d} \chi^2_q.$$

Approksimatiiviset P–arvot kuten Waldin testissä.

- Tarkastellaan rajoitettua mallia

$$y_t = X_t'\pi + \varepsilon_t, \quad t = 1, ..., T, \quad \varepsilon_t \sim \text{nid}\,(0, \Omega)\,,$$

jossa $\pi = H\delta + a$ (H ja a tunnettuja).

- Vaihtoehtoisesti:

$$z_t = W_t'\delta + \varepsilon_t, \quad z_t = (y_t - X_t'a) \text{ ja } W_t = X_t'H.$$

- SU–estimaattori:

$$\tilde{\delta} \underset{as}{\sim} \text{N}\left(\delta, \left(\sum_{t=1}^{T} \text{E}\left(W_t\Omega^{-1}W_t'\right)\right)^{-1}\right).$$

- Matriisi $\sum_{t=1}^{T} \text{E}\left(W_t\Omega^{-1}W_t'\right)$ korvataan empiirisellä vastineella $\sum_{t=1}^{T} W_t\tilde{\Omega}^{-1}W_t'$, jota käyttäen Waldin testi voidaan johtaa kuten rajoittamattoman mallin tapauksessa.

- SU–estimaattori:

$$\tilde{\delta} \underset{as}{\sim} \mathrm{N}\left(\delta, \left(\sum_{t=1}^{T} \mathrm{E}\left(W_t \Omega^{-1} W_t'\right)\right)^{-1}\right).$$

- Matriisin $\left(\sum_{t=1}^{T} W_t \tilde{\Omega}^{-1} W_t'\right)^{-1}$ diagonaalialkioiden neliöjuurista saadaan approksimatiiviset keskivirheet $\tilde{\delta}$:n komponenteille.
- i.:nnen komponentin keskivirhe s.e.$(\tilde{\delta}_i)$ $\Rightarrow$

$$\tilde{\delta}_i / \text{s.e.}(\tilde{\delta}_i) \underset{as}{\sim} \mathrm{N}\left(\delta_i, 1\right).$$

- Parametrin δ_i approksimatiivinen 95%:n luottamusväli on siis

$$\tilde{\delta}_i \pm 1.96 \text{s.e.}(\tilde{\delta}_i).$$

- Approksimatiiviset luottamusvälit vastaavalla tavalla rajoittamattomassa mallissa.

- Usein VAR–mallin rakentaminen aloitetaan rajoittamattomasta mallista.
- Tällöin on ensin valittava mallin (yleensä) tuntematon aste.
- Jos asteeksi on valittu p, voidaan valinnan sopivuutta tutkia testaamalla valittua VAR(p)–mallia korkeampaa astetta olevaa vaihtoehtoa vastaan.
- Jos vaihtoehtona on VAR(p+s)–malli

$$y_t = \nu + \sum_{j=1}^{p+s} A_j y_{t-j} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathrm{nid}\,(0, \Omega)\,,$$

testataan (lineaarista) hypoteesia

$$H_0 : A_{p+1} = \cdots = A_{p+s} = 0.$$

- Testattaessa VAR(p)–mallin sopivuutta VAR(p+s)–vaihtoehtoa

$$y_t = \nu + \sum_{j=1}^{p+s} A_j y_{t-j} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{nid}\left(0, \Omega\right),$$

  vastaan testataan (lineaarista) hypoteesia

$$H_0 : A_{p+1} = \cdots = A_{p+s} = 0.$$

- Jos $\hat{\Omega}\left(k\right) = T^{-1} \sum_{t=1}^{T} \left(y_t - X_t' \hat{\pi}\right)\left(y_t - X_t' \hat{\pi}\right)'$ on Ω:n SUE rajoittamattomassa VAR(k)–mallissa, voidaan käyttää testisuuretta

$$\text{LR} = T\left[\log\det(\hat{\Omega}\left(p\right)) - \log\det(\hat{\Omega}\left(p+s\right))\right] \underset{as}{\sim} \chi^2_{n^2 s}.$$

- Huomaa, että $\hat{\Omega}\left(p\right)$ ja $\hat{\Omega}\left(p+s\right)$ perustuvat samaan määrään havaintoja, joten (ehdollisessa) SU–estimoinnissa $y_{-p-s+1}, \ldots, y_0$ toimivat alkuarvoina.

- Aloitetaan testaus jostain "tarpeeksi suuriasteisesta" VAR(P)–mallista.
- Jos $H_P : A_P = 0$ eli VAR(P-1) riittävä jää voimaan, testataan hypoteesia $H_{P-1} : A_{P-1} = 0$ eli VAR(P-2) riittävä.
- Jos H_{P-1} jää voimaan, testataan hypoteesia $H_{P-2} : A_{P-2} = 0$ eli VAR(P-3) riittävä.
- Näin jatketaan, kunnes saadaan ensimmäinen hylkäävä testitulos tai päädytään asteeseen 0 (vrt. osittaisautokorrelaatiofunktio).
- Testijonon i. testisuure on

$$\mathrm{LR}\,(i) = T\left[\log\det(\hat{\Omega}\,(P-i)) - \log\det(\hat{\Omega}\,(P-i+1))\right] \quad (1 \leq i \leq P)$$

jonka saamia arvoja verrataan $\chi^2_{n^2}$–jakauman prosenttipisteisiin.

- Jonon i. testisuure on

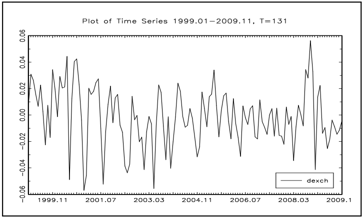
$$\mathrm{LR}\,(i) = T\left[\log\det(\hat{\Omega}\,(P-i)) - \log\det(\hat{\Omega}\,(P-i+1))\right] \quad (1 \le i \le P)$$

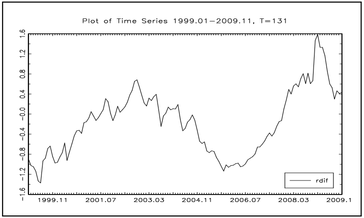
  jonka saamia arvoja verrataan $\chi^2_{n^2}$–jakauman prosenttipisteisiin.

- Oletetaan, että k ensimmäistä hypoteesia on voimassa. Tällöin
  - Testisuureet $\mathrm{LR}\,(i)$ ja $\mathrm{LR}\,(j)$, $i, j \le k$ $(i \ne j)$ asymptoottisesti riippumattomia
  - Approksimatiivinen todennäköisyys hylätä jokin niistä saadaan kaavasta

$$\alpha_k = 1 - (1-\gamma_1)\cdots(1-\gamma_k) \qquad (1 \le k \le P)\,,$$

    jossa γ_i on i:nnessä testissä käytetty merkitsevyystaso.
  - Jos $\gamma_i = 0.05$ kaikilla i, on $\alpha_1 = 0.05$, $\alpha_2 = 0.0975$, $\alpha_3 = 0.143$ ja $\alpha_4 = 0.185$.





Kuvio 1.1. Euron ja Yhdysvaltojen dollarin välisen kuukausittaisen vaihtokurssin (euro/U.S. dollari) muutos (vasemalla) ja euroalueen ja Yhdysvaltojen 10 vuoden valtioiden obligaatioiden keskikorkojen ero (oikealla) ajanjaksona 1999I - 2009XI.

Testisuure :	LR (2)	LR (3)	LR (4)	LR (5)	LR (6)
p–arvo :	p = 0.003	p = 0.678	p = 0.359	p = 0.434	p = 0.866

Tulokset viittaavat asteeseen $p = 2 \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} dexch_t \\ rdif_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{(0.002)}{-0.002} \\ \underset{(0.014)}{0.004} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underset{(0.089)}{0.418} & \underset{(0.012)}{0.023} \\ \underset{(0.672)}{-0.187} & \underset{(0.090)}{1.144} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dexch_{t-1} \\ rdif_{t-1} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \underset{(0.087)}{-0.178} & \underset{(0.012)}{-0.026} \\ \underset{(0.659)}{0.603} & \underset{(0.089)}{-0.179} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dexch_{t-2} \\ rdif_{t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_{1t} \\ \hat{\varepsilon}_{2t} \end{bmatrix}.$$

- Residuaalien $\hat{\varepsilon}_{1t}$ ja $\hat{\varepsilon}_{2t}$ välinen korrelaatiokerroin on -0.259.
- Estimoitu malli toteuttaa stationaarisuusehdon, sillä matriisin $\hat{\mathbf{A}}$ suurin ominaisarvo on itseisarvoltaan 0.953.

- Rajoittamattoman mallin asteen valinnassa voidaan käyttää myös *mallinvalintakriteerejä*, joita on johdettu useita periaatteita käyttäen.
- Olkoon $\hat{\Omega}(k) = T^{-1}\sum_{t=1}^{T}(y_t - X_t'\hat{\pi})(y_t - X_t'\hat{\pi})'$ on Ω:n SUE rajoittamattomassa VAR(k)–mallissa ja P "tarpeeksi suuri" ennalta valittu maksimiaste.
- Eräs yleinen kriteerityyppi on

$$C(k) = \log\det(\hat{\Omega}(k)) + \frac{f(T)}{T}d, \quad k = 1, ..., P,$$

jossa k on mallin aste, $d = n(nk+1)$ vastaava vapaasti estimoitujen autoregressiivisten parametrien lukumäärä (+ vakio) ja ns. *sakkofunktio* f on positiivinen ja toteuttaa $f(T)/T \to 0$, kun $T \to \infty$.

- VAR(k)–mallista laskettu kriteerifunktion arvo:

$$C(k) = \log\det(\hat{\Omega}(k)) + \frac{f(T)}{T} n(nk+1), \quad k = 1, ..., P,$$

  - Sakkofunktio $f(T) > 0$ rankaisee tarpeettoman laajan mallin käyttämisestä.
  - $\log\det(\hat{\Omega}(k)) = -n - \frac{2}{T} \times$ *log-uskottavuusfunktion maksimiarvo* mittaa sovitteen hyvyyttä.
- Jos asteen k kasvattaminen ei pienennä termiä $\log\det(\hat{\Omega}(k))$ tarpeeksi, ei laajempaa mallia suosita.
- "Hyvillä" malleilla $C(k)$ saa pienen arvon.
- Tunnettuja sakkofunktioita:

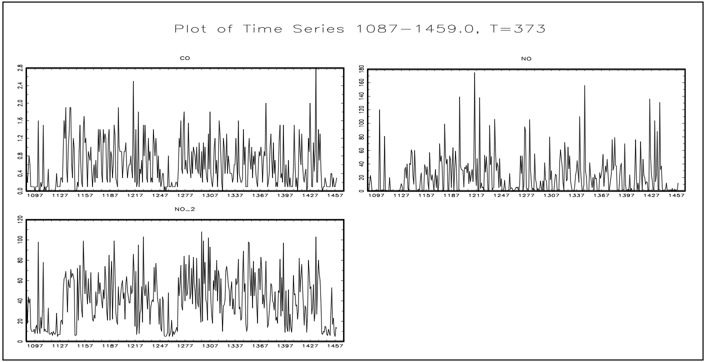
AIC:	$f(T) = 2$	(Akaike, 1974)
HQ:	$f(T) = 2\log(\log T)$	(Hannan ja Quinn, 1979)
BIC:	$f(T) = \log T$	(Schwarz, 1978, Rissanen, 1978).

- Mallinvalintakriteerejä voidaan käyttää myös erilaisten rajoitettujen mallien vertailuun.
- Tällöin

$$C(k) = \log\det(\hat{\Omega}(k)) + \frac{f(T)}{T} d, \quad k = 1, ..., P,$$

jossa k on mallin aste, d on vastaava vapaasti estimoitujen autoregressiivisten parametrien lukumäärä ($+$ vakio) eli $d = \dim(\delta) + n$ ja $\hat{\Omega}(k)$ Ω:n rajoitettu SUE.

- Yksi vaihtoehto on estimoida kaikki mahdolliset mallikombinaatiot ja perustaa valinta saatuihin kriteerifunktion arvoihin.
- Nollarajoitteiden tapauksessa tälle on yksinkertaistettuja vaihtoehtoja, joilla voidaan keventää laskentaa.



Kuvio 4.1. Hiilimonoksidin (CO), typpioksidin (NO) ja typpidioksidin (NO_2) määrät (mg/m^3) Heidelbergissä heinä- ja elokuussa 1991. Kuusi tasavälistä mittausta päivittäin.

- Rajoittamattoman mallin astetta valittaessa $P = 15$ (kaksi ja puoli päivää).
- AIC suositteli astetta 8, HQ astetta 6 ja BIC astetta 2.
- Valitaan AIC:n suosituksen mukaan $p = 8$ ja käytetään askeltavaa menettelyä sovellettaessa ankarampaa HQ–kriteeriä.

Tulokset "t–suhteita" käyttäen.

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} 5.39 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -2.58 & 6.10 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 5.36 \end{bmatrix} \quad \tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} -2.67 & 2.76 & 3.64 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 5.07 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 2.26 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \tilde{A}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 3.17 & \mathbf{0} & -2.29 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Tulokset "t–suhteita" käyttäen.

$$\tilde{A}_5 = \begin{bmatrix} 4.02 & -3.95 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -1.99 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \tilde{A}_6 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 5.14 & 2.49 \\ \mathbf{0} & 9.45 & \mathbf{0} \\ -1.90 & 4.00 & 3.86 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_7 = \begin{bmatrix} 2.34 & -2.30 & -2.00 \\ \mathbf{0} & -3.10 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \tilde{A}_8 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 2.18 \\ 4.14 & -4.03 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

- Matriisin **A** SU–estimaatin suurin ominaisarvo on itseisarvoltaan 0.89.
- Estimaatista $\tilde{\Omega}$ muodostetut korrelaatiokertoimet vaihtelevat 0.6:n ja 0.8:n välillä.