- Kovarianssimatriisin Ω estimaattoria johdettaessa on kätevää johtaa käänteismatriisin $\Omega^{-1} =: \Phi$ SU–estimaattori ja vedota SU–estimoinnin invarianssiperiaatteeseen.
- Log–uskottavuusfunktiossa

$$l(\pi, \Omega) = -\frac{T}{2} \log \det(\Omega) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} (y_t - X_t' \pi)' \, \Omega^{-1} (y_t - X_t' \pi)$$

suoritetaan siis uudelleen parametrointi $\Phi = \Omega^{-1}$.

- Päädytään log–uskottavuusfunktioon

$$l(\pi, \Phi) = \frac{T}{2} \log \det(\Phi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t(\pi)' \, \Phi \varepsilon_t(\pi), \quad \varepsilon_t(\pi) = y_t - X_t' \pi.$$

- Log–uskottavuusfunktio

$$l(\pi, \Phi) = \frac{T}{2} \log\det(\Phi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t(\pi)' \Phi \varepsilon_t(\pi), \quad \varepsilon_t(\pi) = y_t - X_t' \pi.$$

- Liitteessä A.7 esitettyjen derivointikaavojen mukaan on
  -
$$\frac{\partial}{\partial \Phi} \log\det(\Phi) = \Phi^{-1} = \Omega.$$
  -
$$\frac{\partial}{\partial \Phi} \partial \varepsilon_t(\pi)' \Phi \varepsilon_t(\pi) = \varepsilon_t(\pi) \varepsilon_t(\pi)'.$$

- Ω:n uskottavuusyhtälöksi saadaan

$$\frac{\partial}{\partial \Phi} l(\pi, \Phi) = \frac{T}{2} \Omega - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t(\pi) \varepsilon_t(\pi)' = 0.$$

- Ω:n uskottavuusyhtälö

$$\frac{\partial}{\partial \Phi} l(\pi, \Phi) = \frac{T}{2}\Omega - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t(\pi)\,\varepsilon_t(\pi)' = 0.$$

- Koska π:n usk. yhtälölle saatiin ratkaisu $\hat{\pi}$, päädytään tästä ratkaisuun

$$\hat{\Omega} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t(\hat{\pi})\,\varepsilon_t(\hat{\pi})'.$$

- ja, koska $\varepsilon_t(\hat{\pi}) = y_t - X_t'\hat{\pi}$, tämä voidaan kirjoittaa

$$\hat{\Omega} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \left(y_t - X_t'\hat{\pi}\right)\left(y_t - X_t'\hat{\pi}\right)'.$$

- Log–uskottavuusfunktio

$$l(\pi, \Omega) = -\frac{T}{2} \log \det(\Omega) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} \left(y_t - X_t'\pi\right)' \Omega^{-1} \left(y_t - X_t'\pi\right),$$

josta

$$\frac{\partial}{\partial \pi} l(\pi, \Omega) = \left(\Omega^{-1} \otimes I_{np+1}\right) \sum_{t=1}^{T} X_t \left(y_t - X_t'\pi\right).$$

- Lasketaan havaittu informaatiomatriisi $-\partial^2 l(\pi, \Omega) / \partial\pi\partial\pi'$:
  - $\partial a'x/\partial x = a$ (Liite A.7) ja vastaaavasti $\partial Ax/\partial x = A'$, kun $A = [a_1 : \cdots : a_m]' \quad (m \times n)$
  - $$\frac{\partial^2}{\partial\pi\partial\pi'} l(\pi, \Omega) = -\left(\Omega^{-1} \otimes I_{np+1}\right) \sum_{t=1}^{T} X_t X_t' = -\Omega^{-1} \otimes \sum_{t=1}^{T} x_t x_t',$$

- Koska $x_t = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{y}'_{t-1} \end{bmatrix}'$, on parametrin π *Fisherin informaatiomatriisi*

$$\mathcal{I}_{\pi\pi}(\pi, \Omega) := -\mathrm{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\pi\partial\pi'} l(\pi, \Omega)\right] = T\left(\Omega^{-1} \otimes \mathbf{\Gamma}_x\right),$$

jossa

$$\mathbf{\Gamma}_x = \mathrm{E}\left(x_t x_t'\right) = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{E}\left(\mathbf{y}'_{t-1}\right) \\ \mathrm{E}\left(\mathbf{y}_{t-1}\right) & \mathrm{E}\left(\mathbf{y}_{t-1}\mathbf{y}'_{t-1}\right) \end{bmatrix}.$$

- Lisäksi

$$\mathrm{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\pi\partial\omega_{ij}} l(\pi, \Omega)\right] = 0$$

eli parametrit π (AR–parametri) ja Ω $(= \mathrm{Cov}(\varepsilon_t))$ ovat *ortogonaaliset*.

- Parametrien π ja Ω ortogonaalisuus & yleinen SU–teoria $\Rightarrow$
  - $\hat{\pi}$ ja $\hat{\Omega}$ ovat asymptoottisesti riippumattomat ja
  - estimaattorin $\hat{\pi}$ asymptoottinen jakauma on sama kuin tapauksessa, jossa parametrin Ω arvo tunnettaisiin.
- Siis,

$$\hat{\pi} \underset{as}{\sim} \mathrm{N}\left(\pi, \mathcal{I}_{\pi\pi}\left(\pi, \Omega\right)^{-1}\right)$$

- tai, koska

$$\mathcal{I}_{\pi\pi}\left(\pi, \Omega\right)^{-1} = \left[T\left(\Omega^{-1} \otimes \mathbf{\Gamma}_x\right)\right]^{-1} = T^{-1}\left(\Omega \otimes \mathbf{\Gamma}_x^{-1}\right),$$

  - niin

$$\hat{\pi} \underset{as}{\sim} \mathrm{N}\left(\pi, T^{-1}\left(\Omega \otimes \mathbf{\Gamma}_x^{-1}\right)\right).$$

- Estimaattorista $\hat{\Omega}$ todetaan vain tarkentuvuus $\hat{\Omega} \xrightarrow{p} \Omega$.

- Parametrien π ja Ω ortogonaalisuuteen ja tulokseen

$$\frac{\partial^2}{\partial\pi\partial\pi'} l\left(\pi,\Omega\right) = -\Omega^{-1} \otimes \sum_{t=1}^{T} x_t x_t'$$

alkuarvojen $y_{-p+1}, ..., y_0$ oletettu stationaarisuus ei vaikuta.

- Alkuarvojen jakaumasta riippumatta pätee siten

$$\hat{\pi} \underset{as}{\sim} \mathrm{N}\left(\pi, \mathcal{I}_{\pi\pi}\left(\pi,\Omega\right)^{-1}\right),$$

kunhan Fisherin informaatiomatriisi määritellään

$$\mathcal{I}_{\pi\pi}\left(\pi,\Omega\right) = \Omega^{-1} \otimes \sum_{t=1}^{T} \mathrm{E}\left(x_t x_t'\right).$$

- Vastaava huomautus pätee myös seuraavaan rajoitettuun estimointiin ja testimenetelmiin.

- VAR(p)–malli

$$y_t = \nu + A_1 y_{t-1} + \cdots + A_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad t = 1, ..., T,$$

jossa alkuarvot $y_{-p+1}, ..., y_0$ on myös havaittu ja kerroinmatriisit $A_1, ..., A_p$ $(n \times n)$ toteuttavat stationaarisuus- tai stabiilisuusehdon ja

$$\varepsilon_t \sim \text{nid}\,(0, \Omega)\,, \qquad \Omega \;\; \text{positiivisesti definiitti.}$$

- Lyhennysmerkinnöin:

$$y_t = X_t' \pi + \varepsilon_t, \quad t = 1, ..., T,$$

jossa

$$\pi \;=\; \left[\pi_1' \;\; \cdots \;\; \pi_n'\right]' = \text{vec}\left[\nu : A_1 : \cdots : A_p\right]'$$

$$X_t' \;=\; I_n \otimes x_t', \quad x_t = \left[1 \;\; y_{t-1}' \;\; \cdots \;\; y_{t-p}'\right]'.$$

- Tarkastellaan mallia

$$y_t = X_t' \pi + \varepsilon_t, \quad t = 1, ..., T,$$

lineaarisin rajoittein

$$\pi = H\delta + a, \qquad \text{(C1)}$$

jossa

$$\begin{array}{lll} H & \text{on} & n(np+1) \times m \ \text{ ja tunnettu, r}(H) = m \\ a & \text{on} & n(np+1) \ \text{ ja tunnettu} \\ \delta & \text{on} & m \times 1 \ \text{ ja tuntematon parametri} \end{array}$$

- Esim. $H = \left[I_{n^2 p} : 0 \right]'$ ja $a = 0 \Leftrightarrow \pi$:n n viimeistä komponenttia $= 0$ $\Leftrightarrow y_{t-p}$ ei selitä y_t:n viimeistä komponenttia y_{nt}.

- Koska $y_t = X_t'\pi + \varepsilon_t$ ja $\pi = H\delta + a$, niin

$$\varepsilon_t = y_t - X_t'\pi = (y_t - X_t'a) - X_t'H\delta := z_t - W_t'\delta$$

- Rajoittamattoman mallin log–uskottavuusfunktiosta

$$l\left(\pi, \Omega\right) = -\frac{T}{2}\log\det\left(\Omega\right) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left(y_t - X_t'\pi\right)'\Omega^{-1}\left(y_t - X_t'\pi\right)$$

saadaan siten

- rajoitetun mallin log–uskottavuusfunktio

$$l\left(\delta, \Omega\right) = -\frac{T}{2}\log\det\left(\Omega\right) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left(z_t - W_t'\delta\right)'\Omega^{-1}\left(z_t - W_t'\delta\right).$$

- Derivoidaan log–uskottavuusfunktiota δ:n suhteen

$$l(\delta, \Omega) = -\frac{T}{2}\log\det(\Omega) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left(z_t - W_t'\delta\right)'\Omega^{-1}\left(z_t - W_t'\delta\right).$$

  - Liite A.7: Kun $B = B'$ ja dimensiot ovat sopivat,

$$\frac{\partial}{\partial x}(c - Ax)' B (c - Ax) = -2A'Bc + 2A'BAx = 2A'B(Ax - c).$$

- δ:n uskottavuusyhtälöksi saadaan

$$\frac{\partial}{\partial \delta} l(\delta, \Omega) = \sum_{t=1}^{T} W_t \Omega^{-1}\left(z_t - W_t'\delta\right) = 0,$$

  - jonka ratkaisu jää (yleensä) muotoon

$$\delta = \left(\sum_{t=1}^{T} W_t \Omega^{-1} W_t'\right)^{-1} \sum_{t=1}^{T} W_t \Omega^{-1} z_t.$$

- δ:n uskottavuusyhtälö voitiin kirjoittaa

$$\delta = \left(\sum_{t=1}^{T} W_t \Omega^{-1} W_t' \right)^{-1} \sum_{t=1}^{T} W_t \Omega^{-1} z_t . \qquad (\text{UY}\,(\delta)\,)$$

- Log–uskottavuusfunktion

$$l\,(\delta, \Omega) = -\frac{T}{2} \log \det\,(\Omega) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} \left(z_t - W_t' \delta \right)' \Omega^{-1} \left(z_t - W_t' \delta \right)$$

derivointi Ω:n suhteen johtaa kuten rajoittamattomassa tapauksessa yhtälöön

$$\Omega = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \left(z_t - W_t' \delta \right) \left(z_t - W_t' \delta \right)' . \qquad (\text{UY}\,(\Omega)\,)$$

- Yhtälöitä (UY(δ)) ja (UY(Ω)) ei voida ratkaista (yleensä) suljetussa muodossa, vaan joudutaan käyttämään numeerisia menetelmiä.