- Oletetaan, että havaittuun n:n aikasarjan aineistoon voidaan soveltaa VAR(p)–mallia

$$y_t = \nu + A_1 y_{t-1} + \cdots + A_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad t = 1, ..., T,$$

  jossa alkuarvot $y_{-p+1}, ..., y_0$ on myös havaittu ja kerroinmatriisit $A_1, ..., A_p$ $(n \times n)$ toteuttavat stationaarisuus- tai stabiilisuusehdon.

- Jotta päästäisiin soveltamaan suurimman uskottavuuden (SU) teoriaa, oletetaan normaalisuus:

$$\varepsilon_t \sim \text{nid}\,(0, \Omega)\,, \qquad \Omega \;\; \text{positiivisesti definiitti.}$$

- Esitettävät asymptoottiset tulokset pätevät yleisemmin oletuksella $\varepsilon_t \sim \text{iid}\,(0, \Omega)$.

- Merkitään

$$x_t = \begin{bmatrix} 1 & y'_{t-1} & \cdots & y'_{t-p} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{y}'_{t-1} \end{bmatrix}' \qquad ((np+1) \times 1)$$

ja

$$\Pi = \begin{bmatrix} \pi'_1 \\ \vdots \\ \pi'_n \end{bmatrix} = [\nu : A_1 : \cdots : A_p] \qquad (n \times (np+1)) .$$

- Tällöin malliyhtälö voidaan kirjoittaa

$$y_t = [\nu : A_1 : \cdots : A_p] \begin{bmatrix} 1 \\ y_{t-1} \\ \vdots \\ y_{t-p} \end{bmatrix} + \varepsilon_t , \qquad t = 1, ..., T,$$

eli $y_t = \Pi x_t + \varepsilon_t , \quad t = 1, ..., T.$

- Yhtälö

$$y_t = \Pi x_t + \varepsilon_t ,$$

voidaan kirjoittaa

$$y_{it} = x_t' \pi_i + \varepsilon_{it} , \quad i = 1, ..., n,$$

- ja edelleen

$$y_t = X_t' \pi + \varepsilon_t , \quad t = 1, ..., T,$$

jossa

$$\begin{aligned} \pi &= \begin{bmatrix} \pi_1' & \cdots & \pi_n' \end{bmatrix}' \ (n(np+1) \times 1) \quad \text{ja} \\ X_t' &= \operatorname{diag}\begin{bmatrix} x_t' & \cdots & x_t' \end{bmatrix} = I_n \otimes x_t' \quad (n \times n(np+1)) \,. \end{aligned}$$

- Merkitään $\mathbf{Y}_t = [y'_{-p+1} \cdots y'_0 \;\; y'_1 \cdots y'_t]'$, $t = 0, 1, ..., T$, jolloin koko aineistoa vastaava sv on $\mathbf{Y}_T$.

- Jos sv:n $\mathbf{Y}_t$ tiheysfunktio on $f_{\mathbf{Y}_t}$, niin ehd. tf:n kaava $\Rightarrow$

$$f_{\mathbf{Y}_T} = \prod_{t=1}^{T} f_{y_t|\mathbf{Y}_{t-1}} \cdot f_{\mathbf{Y}_0}.$$

- VAR(p)–prosessin lineaarinen esitys $\Rightarrow y_{t-j} \perp\!\!\!\perp \varepsilon_t$, $j \geq 1$,

$\Rightarrow \mathbf{Y}_{t-1} \perp\!\!\!\perp \varepsilon_t \Rightarrow X_t \perp\!\!\!\perp \varepsilon_t$

- Saadaan tulos

$$y_t \,|\mathbf{Y}_{t-1} \sim y_t \,|\mathbf{y}_{t-1} \sim \mathrm{N}\left(X_t'\pi, \Omega\right), \quad t = 1, ..., T.$$

  - Jos $Y = X + Z$, jossa $X \perp\!\!\!\perp Z$ ja $Z \sim \mathrm{N}(\mu, \Sigma)$, niin

$$Y|\,(X = x) \sim \mathrm{N}\,(\mu + x, \Sigma)$$

- Selvitettävä $\quad f_{\mathbf{Y}_T} = \prod_{t=1}^{T} f_{y_t|\mathbf{Y}_{t-1}} \cdot f_{\mathbf{Y}_0}.$
- Koska

$$y_t \,|\mathbf{Y}_{t-1} \sim y_t \,|\mathbf{y}_{t-1} \sim \mathrm{N}\left(X_t'\pi, \Omega\right), \quad t = 1, ..., T.$$

niin

$$f_{y_t|\mathbf{Y}_{t-1}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \det\left(\Omega\right)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(y_t - X_t'\pi\right)' \Omega^{-1}\left(y_t - X_t'\pi\right)\right\}.$$

- Stationaarisessa tapauksessa $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{y}_0$ on normaalisti jakautunut ja myös $f_{\mathbf{Y}_0}$ voidaan selvittää.
- Tyydytään kuitenkin ehdolliseen malliin, jossa $\mathbf{y}_0$ tulkitaan kiinteäksi vakioksi.

Stationaarisen VAR–mallin teoriaa

Parametrien rajoittamaton estimointi: Uskottavuusfunktion johto

- Jätetään $f_{\mathbf{Y}_0}$ pois ytf:stä $\quad f_{\mathbf{Y}_T} = \prod_{t=1}^{T} f_{y_t|\mathbf{Y}_{t-1}} \cdot f_{\mathbf{Y}_0}$ ja käytetään tulosta

$$f_{y_t|\mathbf{Y}_{t-1}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \det(\Omega)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(y_t - X_t'\pi)' \Omega^{-1} (y_t - X_t'\pi)\right\}.$$

- Saadaan *ehdollinen uskottavuusfunktio*

$$L(\pi, \Omega) = \det(\Omega)^{-T/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(y_t - X_t'\pi)' \Omega^{-1} (y_t - X_t'\pi)\right\}$$

- ja edelleen *ehdollinen log–uskottavuusfunktio*

$$l(\pi, \Omega) = -\frac{T}{2}\log\det(\Omega) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(y_t - X_t'\pi)' \Omega^{-1} (y_t - X_t'\pi).$$

Stationaarisen VAR–mallin teoriaa

Parametrien rajoittamaton estimointi: Uskottavuusfunktion maksimointi

- Maksimoitava VAR(p)–mallin

$$y_t = \nu + A_1 y_{t-1} + \cdots + A_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad t = 1, ..., T,$$

(ehdollinen) log–uskottavuusfunktio

$$l(\pi, \Omega) = -\frac{T}{2} \log\det(\Omega) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} (y_t - X_t' \pi)' \Omega^{-1} (y_t - X_t' \pi),$$

  - jossa

$$X_t' = \operatorname{diag} \begin{bmatrix} x_t' & \cdots & x_t' \end{bmatrix} = I_n \otimes x_t' \quad (n \times n(np+1))$$

ja

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_1' & \cdots & \pi_n' \end{bmatrix}' \; (n(np+1) \times 1)$$

- Derivoidaan log–uskottavuusfunktiota

$$l(\pi, \Omega) = -\frac{T}{2} \log \det(\Omega) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} (y_t - X_t' \pi)' \Omega^{-1} (y_t - X_t' \pi).$$

  - Liite A.7: Kun $B = B'$ ja dimensiot ovat sopivat,

$$\frac{\partial}{\partial x} (c - Ax)' B (c - Ax) = -2A'Bc + 2A'BAx = 2A'B(Ax - c).$$

- Siis,

$$\frac{\partial}{\partial \pi} l(\pi, \Omega) = \sum_{t=1}^{T} X_t \Omega^{-1} (y_t - X_t' \pi).$$

- Log–uskottavuusfunktion

$$l(\pi, \Omega) = -\frac{T}{2} \log \det (\Omega) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} (y_t - X_t' \pi)' \, \Omega^{-1} \, (y_t - X_t' \pi) \, .$$

derivointi π:n suhteen johtaan uskottavuusyhtälöön

$$\frac{\partial}{\partial \pi} l(\pi, \Omega) = \sum_{t=1}^{T} X_t \Omega^{-1} (y_t - X_t' \pi) = 0.$$

- X_t:n määritelmä ja Kroneckerin tulon ominaisuudet (ks. Liite A.5) $\Rightarrow \cdots \Rightarrow \pi$:n uskottavuusyhtälö voidaan kirjoittaa

$$\sum_{t=1}^{T} X_t X_t' \pi = \sum_{t=1}^{T} X_t y_t$$

- Siis, π:n uskottavuusyhtälö on

$$\sum_{t=1}^{T} X_t X_t' \pi = \sum_{t=1}^{T} X_t y_t$$

- ja sillä on yksikäsitteinen ratkaisu

$$\hat{\pi} = \left(\sum_{t=1}^{T} X_t X_t' \right)^{-1} \sum_{t=1}^{T} X_t y_t$$

  - eli malliyhtälöstä

$$y_t = X_t' \pi + \varepsilon_t, \quad t = 1, ..., T,$$

muodostettu π:n PNS–estimaattori