

Stationaariset prosessit

VAR(p)-prosessi: odotusarvo ja kovarianssifunktio

- Stationaarisella VAR(p)-mallilla on lineaarinen esitys

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \Omega).$$

- y_t :n odotusarvo ja kov. funktio voidaan johtaa tästä (ks. jakso 2.2):

$$E(y_t) = 0 \quad \text{ja} \quad \Gamma_k = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \Omega \Psi_{j+k}' = \Gamma_{-k}', \quad k \geq 0,$$

- Koska $\Psi_j \rightarrow 0$ geometrisesti, kun $j \rightarrow \infty$, niin $\Gamma_k \rightarrow 0$ geometrisesti, kun $k \rightarrow \infty$.
- Vaimeneminen on sitä hitaampaa mitä lähempänä ykköstä matriisiin \mathbf{A} suurin ominaisarvo on itseisarvoltaan

Stationaariset prosessit

VAR(p)-prosessi: odotusarvo ja kovarianssifunktio

- Stationaarinen VAR(p)-prosessi

$$y_t = A_1 y_{t-1} + \cdots + A_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \Omega),$$

ja sen lineaarinen esitys

$$y_t = \varepsilon_t + \Psi_1 \varepsilon_{t-1} + \Psi_2 \varepsilon_{t-2} + \Psi_3 \varepsilon_{t-3} + \cdots .$$

- Näistä saadaan $\varepsilon_t \perp\!\!\!\perp y_{t-j}, j > 0$, ja lisäksi

$$E(y_{t-j} \varepsilon_t') = E(y_{t-j}) E(\varepsilon_t') = 0$$

ja [esim. $E(A_1 y_{t-1} \varepsilon_t') = A_1 E(y_{t-1} \varepsilon_t') = 0$]

$$E(y_t \varepsilon_t') = E(\varepsilon_t \varepsilon_t') = \Omega.$$

Stationaariset prosessit

VAR(p)-prosessi: odotusarvo ja kovarianssifunktio

Kertomalla yhtälö

$$y_t = A_1 y_{t-1} + \cdots + A_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \Omega),$$

oikealta y'_{t-k} :lla, ottamalla odotusarvo puolittain ja saadaan

$$\Gamma_{-k} = A_1 \Gamma_{1-k} + \cdots + A_p \Gamma_{p-k}, \quad k > 0,$$

tai yhtäpitävästi (*Yule-Walker -yhtälöt*)

$$\Gamma'_k = A_1 \Gamma'_{k-1} + \cdots + A_p \Gamma'_{k-p}, \quad k > 0.$$

Stationaariset prosessit

VAR(p)-prosessi: odotusarvo ja kovarianssifunktio

- Yule-Walker -yhtälöiden

$$\Gamma'_k = A_1 \Gamma'_{k-1} + \dots + A_p \Gamma'_{k-p}, \quad k > 0,$$

avulla voidaan kerroinmatriisit A_1, \dots, A_p lausua kovarianssimatriisien $\Gamma'_0, \dots, \Gamma'_{p-1}$ funktiona.

- Niiden avulla voidaan lisäksi laskea kovarianssimatriisit $\Gamma'_k, k \geq p$, kun kerroinmatriisit A_1, \dots, A_p on annettu ja kovarianssimatriisit $\Gamma'_0, \dots, \Gamma'_{p-1}$ tunnetaan.
- Koko kovarianssifunktion Γ_k selvittämiseksi (kerroinmatriisien A_1, \dots, A_p funktiona) on siten vielä selvitettävä kovarianssimatriisien $\Gamma'_0, \dots, \Gamma'_{p-1}$ riippuvuus kerroinmatriiseista A_1, \dots, A_p ja kovarianssimatriisista Ω .

Stationaariset prosessit

VAR(p)-prosessi: odotusarvo ja kovarianssifunktio

- Tarkastellaan prosessia $\mathbf{y}_t = [y_t' \cdots y_{t-p+1}']'$, jolle pätee

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}\mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t \sim \text{iid}(0, \boldsymbol{\Omega}), \quad \boldsymbol{\Omega} = \text{diag}[\Omega \ 0 \ \cdots \ 0]$$

- Kovarianssimatriisit $\Gamma_0', \dots, \Gamma_{p-1}'$ tai yhtäpitävästi $\Gamma_0, \dots, \Gamma_{-p+1}$ saadaan yhtälöistä

$$\text{Cov}(\mathbf{y}_t) = \begin{bmatrix} \Gamma_0 & \Gamma_{-1} & \cdots & \Gamma_{-p+1} \\ \Gamma_1 & \Gamma_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \Gamma_{-1} \\ \Gamma_{p-1} & \cdots & \Gamma_1 & \Gamma_0 \end{bmatrix} := \boldsymbol{\Gamma}_0.$$

ja

$$\boldsymbol{\Gamma}_0 = \mathbf{A}\boldsymbol{\Gamma}_0\mathbf{A}' + \boldsymbol{\Omega}.$$

Stationaariset prosessit

VAR(p)-prosessi: odotusarvo ja kovarianssifunktio

- Yhtälö

$$\Gamma_0 = \mathbf{A}\Gamma_0\mathbf{A}' + \mathbf{\Omega}.$$

voidaan ratkaista käyttäen $\text{vec}(\cdot)$ -operaattoria ja Kroneckerin tuloa.

- $A = [a_1 : \dots : a_m]$, jossa a_i ($n \times 1$) on A :n i . sarake, ja

$$\text{vec}(A) = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \quad (nm \times 1).$$

- Dimensioista riippumatta matriisien A ja B Kroneckerin tulo $A \otimes B$ määritellään yhtälöllä $A \otimes B = [a_{ij}B]$. (ks. Liite A.5).
- Lisäksi, $\text{vec}(A + B) = \text{vec}(A) + \text{vec}(B)$ ja

$$\text{vec}(ABC) = (C' \otimes A) \text{vec}(B)$$

Stationaariset prosessit

VAR(p)-prosessi: odotusarvo ja kovarianssifunktio

- Saadaan yhtälö

$$(I_{n^2 p^2} - \mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \text{vec}(\Gamma_0) = \text{vec}(\mathbf{\Omega}),$$

josta

$$\text{vec}(\Gamma_0) = (I_{n^2 p^2} - \mathbf{A} \otimes \mathbf{A})^{-1} \text{vec}(\mathbf{\Omega}).$$

- Käänteismatriisi on olemassa, sillä
 - matriisin \mathbf{A} ominaisarvot $\lambda_1, \dots, \lambda_{np}$ itseisarvoltaan $< 1 \implies$ sama pätee matriisin $\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}$ ominaisarvoille, jotka ovat $\lambda_i \lambda_j, i, j = 1, \dots, np$.
- Kun matriisit A_1, \dots, A_p ja $\mathbf{\Omega}$ tunnetaan, tunnetaan matriisi $\Gamma_0 = [\Gamma_{i-j}]$ ja siten myös matriisit $\Gamma_0, \dots, \Gamma_{-p+1}$ tai yhtäpitävästi $\Gamma'_0, \dots, \Gamma'_{p-1}$.

Stationaariset prosessit

VAR(p)-prosessi: ennustaminen

- T_n -laskenta \implies s_m :n Y sv:iin X perustuva "optimaalinen" ennuste on $E(Y|X)$ eli Y :n ehdollinen odotusarvo ehdolla X (ks. Liite A.6).
- "Optimaalisella" tarkoitetaan tässä ennustetta, joka minimoi ennusteen keskineliövirheen.
- Jos Y on vektori, pätee sama tulos, kun kriteerinä on keskineliövirhematriisin minimointi.
- Jos $\tilde{Y} = g(X)$ on mikä tahansa sv :n Y ennuste, joka on sv :n X funktio, niin ennusteen \tilde{Y} keskineliövirhematriisi on

$$\text{MSE}(\tilde{Y}) = E[(Y - \tilde{Y})(Y - \tilde{Y})']$$

- Reaalisessa tapauksessa saadaan tuttu määritelmä

$$\text{MSE}(\tilde{Y}) = E[(Y - \tilde{Y})^2]$$

Stationaariset prosessit

VAR(p)-prosessi: ennustaminen

- Edelleen, jos $\tilde{Y} = g(X)$ on mikä tahansa sv:n Y ennuste, joka on sv:n X funktio, niin

$$a' \text{MSE}(\tilde{Y}) a \geq a' \text{MSE}(E(Y|X)) a \quad \text{kaikilla sopivilla vektoreilla } a$$

- Toisin sanoen, matriisi $\text{MSE}(\tilde{Y}) - \text{MSE}(E(Y|X))$ on positiivisesti semidefiniitti eli symbolein

$$\text{MSE}(\tilde{Y}) - \text{MSE}(E(Y|X)) \geq 0.$$

- Valitsemalla $a = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ nähdään, että ennusteen \tilde{Y} jokaisen komponentin keskineliövirhe on vähintään yhtäsuuri kuin ennusteella $E(Y|X)$.

Seuraavat laskusäännöt ovat voimassa ehdolliselle odotusarvolle.

- **EO1** $E(aY_1 + bY_2 | X) = aE(Y_1 | X) + bE(Y_2 | X)$, kun a ja b ovat vakioita (lineaarisuus)
- **EO2** $E(Y | X) = E(Y)$, kun $Y \perp\!\!\!\perp X$.
- **EO3** $E(Y) = E[E(Y | X)]$ (ns. iteroidun odotusarvon laki)
- **EO4** $E[g(X) Y | X] = g(X) E(Y | X)$ mille tahansa funktiolle g (jolla tulo $g(X) Y$ on määritelty ja sen odotusarvo on äärellisenä olemassa).
 - Laskusäännöstä EO4 seuraa erityisesti $E[g(X) | X] = g(X)$.

Stationaariset prosessit

VAR(p)-prosessi: ennustaminen

- Tarkastellaan nyt stationaarista VAR(p)-prosessia

$$y_t = A_1 y_{t-1} + \cdots + A_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \Omega).$$

ja siinä "tulevan" arvon y_{t+h} ($h \geq 1$) ennustamista.

- Merkitään $E_t(\cdot) = E(\cdot | y_{t-j}, j \geq 0)$
- Prosessin lin. esityksestä nähdään, että $\varepsilon_{t+h} \perp\!\!\!\perp y_t, j \geq 1. \quad (*)$
- Tapaus $h = 1$:
- Käyttäen tulosta (*) ja malliyhtälöä saadaan

$$E_t(y_{t+1}) = E(y_{t+1} | y_t, \dots, y_{t-p+1}) =: y_t(1).$$

ja

$$y_t(1) = A_1 y_t + \cdots + A_p y_{t+1-p}.$$

Stationaariset prosessit

VAR(p)-prosessi: ennustaminen

- Tarkastellaan nyt stationaarista VAR(p)-prosessia

$$y_t = A_1 y_{t-1} + \cdots + A_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \Omega).$$

ja siinä "tulevan" arvon y_{t+h} ($h \geq 1$) ennustamista.

- Yleisesti, kun $h \geq 1$, saadaan

$$E_t(y_{t+h}) = A_1 E_t(y_{t+h-1}) + \cdots + A_p E_t(y_{t+h-p})$$

tai kun $y_t(h-j) = E_t(y_{t+h-j})$ ja $y_t(h-j) = y_{t+h-j}$, $h \leq j$,
 $y_t(h) = A_1 y_t(h-1) + \cdots + A_p y_t(h-p)$

- Toisin sanoen, $y_t(h-j)$ on prosessin havaittu arvo y_{t+h-j} , kun sellainen on ennusteajankohtana t tiedossa, ja muulloin ajankohtana t tehty ennuste $E_t(y_{t+h-j})$.

Stationaariset prosessit

VAR(p)-prosessi: ennustaminen

Käyttäen mallin lineaarista esitystä

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \varepsilon_{t-j}$$

saadaan ennusteelle vaihtoehtoinen esitys

$$y_t(h) = E_t(y_{t+h}) = \sum_{j=h}^{\infty} \Psi_j \varepsilon_{t+h-j},$$

josta voidaan johtaa ennustevirheelle yhtälö

$$y_{t+h} - y_t(h) = \sum_{j=0}^{h-1} \Psi_j \varepsilon_{t+h-j} \quad (\Psi_0 = I_n).$$

$$\Rightarrow E(y_{t+h} - y_t(h)) = 0 \quad \text{ja} \quad \text{Cov}(y_{t+h} - y_t(h)) = \sum_{j=0}^{h-1} \Psi_j \Omega \Psi_j'.$$

Stationaariset prosessit

VAR(p)-prosessi: ennustaminen

- *Normaalisessa tapauksessa* $\varepsilon_t \sim \text{nid}(0, \Omega)$ pätee ennustevirheelle

$$y_{t+h} - y_t(h) \sim N\left(0, \sum_{j=0}^{h-1} \Psi_j \Omega \Psi_j'\right),$$

jonka avulla luottamusvälejä ennustettavan y_{t+h} komponenteille.

- Jos $\sigma_i^2(h)$ on matriisin $\sum_{j=0}^{h-1} \Psi_j \Omega \Psi_j'$ i . diagonaalialkio, niin

$$(y_{i,t+h} - y_{i,t}(h)) / \sigma_i(h) \sim N(0, 1)$$

⇒

$$0.95 = P\{y_{i,t}(h) - 1.96\sigma_i(h) \leq y_{i,t+h} \leq y_{i,t}(h) + 1.96\sigma_i(h)\}.$$

- Siis, 95%:n luottamusväli $y_{i,t+h}$:lle on

$$y_{i,t}(h) \pm 1.96\sigma_i(h).$$

- Käytännössä tuntemattomat parametrit korvataan estimaateilla.

Stationaariset prosessit

VAR(p)-prosessi, kun odotusarvo nollasta poikkeava

- Esitetyt tulokset voidaan yleistää helposti tapaukseen $E(y_t) \neq 0$.
- Suoritetaan vain muunnos $y_t \rightarrow y_t - \mu$, jolloin stationaarisessa tapauksessa $\mu = E(y_t)$.
- Koska

$$A(B)(y_t - \mu) = A(B)y_t - A(1)\mu = \varepsilon_t,$$

voidaan vaihtoehtoisesti tarkastella prosessia

$$y_t = v + A_1 y_{t-1} + \cdots + A_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \Omega) \quad (t \in \mathbb{Z}),$$

jossa $v = A(1)\mu$.

- Stationaarisuusehto $\det A(z) \neq 0, |z| \leq 1 \Rightarrow$ matriisi $A(1)$ on epäsingulaarinen $\Rightarrow \mu = A(1)^{-1}v$.

Stationaariset prosessit

VARMA(p,q)-prosessi

- VAR(p)-prosessi voidaan yleistää VARMA(p,q)-prosessiksi kuten yksiulotteisessa tapauksessa:

$$y_t = A_1 y_{t-1} + \cdots + A_p y_{t-p} + \varepsilon_t - M_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - M_q \varepsilon_{t-q}, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \Omega) \quad (t \in \mathbb{Z}),$$

jossa M_1, \dots, M_q ovat $n \times n$ kerroinmatriiseja ja muut merkinnät ovat VAR(p)-prosessissa.

- Sama viivästysoperaattoria käyttäen

$$(I_n - A_1 B - \cdots - A_p B^p) y_t = (I_n - M_1 B - \cdots - M_q B^q) \varepsilon_t$$

eli

$$A(B) y_t = M(B) \varepsilon_t.$$

Stationaariset prosessit

VARMA(p,q)-prosessi

- Kuten yksiulotteisessa tapauksessa voidaan todeta, että riittävä stationaarisuusehto on sama kuin VAR(p)-prosessilla.
- Stationaarisuusehdon voimassa ollessa saadaan lineaarinen prosessi

$$y_t = \Psi(B) \varepsilon_t,$$

jossa nyt $\Psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j B^j = A(B)^{-1} M(B)$ ja $\Psi_0 = I_n$.

- Kuten VAR(p)-prosessin tapauksessakin, $\Psi_j \rightarrow 0$ geometrisesti, kun $j \rightarrow \infty$, ja siten myös VARMA(p,q)-prosessin kovarianssifunktio vaimenee geometrisesti nollaan viipymän kasvaessa rajatta.

Stationaariset prosessit

VARMA(p,q)-prosessi

- VARMA(p,q)-prosessien teoria ja soveltaminen on huomattavasti hankalampaa kuin VAR(p)-prosessien.
- Syynä pitkälti polynomimatriisien ominaisuudet, joiden vuoksi VARMA(p,q)-prosessien rakenneteoria ja siihen liittyvä mallinvalinta monimutkaisempaa kuin VAR(p)-prosesseilla.
- Koskee erityisesti yksikäsitteisyys- tai identifioituvuusehtoa
 - yksiulotteisessa tapauksessa $n = 1$ vaaditaan, että mallin

$$A(B) y_t = M(B) \varepsilon_t$$

(nyt) *polynomeilla* $A(z)$ ja $M(z)$ ei ole yhteisiä tekijöitä ja ainakin toinen korkeimman asteen kertoimista on nolasta poikkeava.

- Seuraava esimerkki havainnollistaa edellä sanottua.

Stationaariset prosessit

VARMA(p,q)-prosessi

- Tarkastellaan kaksiulotteista VARMA(1,1)-prosessia

$$\begin{bmatrix} 1 & aB \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y_t = \begin{bmatrix} 1 & mB \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \varepsilon_t, \quad a \neq m, \quad a \neq 0 \neq m.$$

- Lineaariseksi esitykseksi saadaan VMA(1)-prosessi

$$y_t = \begin{bmatrix} 1 & (m - a)B \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \varepsilon_t.$$

- Lisäksi saadaan VAR(1)-prosessi

$$\begin{bmatrix} 1 & (a - m)B \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y_t = \varepsilon_t.$$

- Ts., kolme eri mallia sopivat aineistoon yhtä hyvin, joten estimointialgoritmi joutuu vaikeuksiin, jos valitaan VARMA(1,1).

Stationaariset prosessit

VARMA(p,q)-prosessi

- VARMA(p,q)-prosesseille on kehitetty varsin täydellinen teoria, johon ei kuitenkaan tarkastella tällä kurssilla.
- Esitettäviä VAR(p)-prosesseihin perustuvia tilastollisia menetelmiä voidaan perustella approksimaatioina.
- Käännettävyyshähdön

$$\det (M(z)) \neq 0, \quad |z| \leq 1,$$

voimassa ollessa, VARMA(p,q)-prosessi voidaan kirjoittaa

$$M(B)^{-1} A(B) y_t = \varepsilon_t,$$

jossa $M(B)^{-1} A(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \Pi_j B^j$ ja $\Pi_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ geometrisesti.

- VARMA(p,q)-prosessia voidaan siten approksimoida VAR(h)-prosessilla, kun aste h on "tarpeeksi suuri".

- Olkoon $y_t = (y_{1t}, \dots, y_{nt})$ stationaarinen prosessi, $E(y_t) = \mu$ ja $\text{Cov}(y_t, y_{t+k}) = \Gamma_k = [\gamma_{ij,k}]$. Oletetaan, että

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|\Gamma_k\| < \infty.$$

- Tarkastellaan otoskeskiarvoa $\bar{y} = T^{-1} \sum_{t=1}^T y_t$ odotusarvon μ estimaattorina.
- Harhattomuus on ilmeinen, sillä

$$E(\bar{y}) = T^{-1} \sum_{t=1}^T E(y_t) = \mu.$$

- Kun merkitään $\bar{y} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$ ja $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, saadaan

$$\text{Var}(\bar{y}_i) \leq T^{-1} \sum_{k=-T}^T \left(1 - \frac{|k|}{T}\right) |\gamma_{i,k}| \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0.$$

- Siis, on todettu

$$E(\bar{y}) = \mu \quad \text{ja} \quad \text{Var}(\bar{y}_i) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0,$$

joten otoskeskiarvo \bar{y}_i on odotusarvon μ_i tarkentuva estimaattori.

- Sama pätee \bar{y} :lle eli pätee stokastinen konvergenssi

$$\bar{y} \xrightarrow{P} \mu.$$

- Vaadittu oletus $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|\Gamma_k\| < \infty$ on voimassa erityisesti VARMA(p,q)-prosesseille, joilla $\Gamma_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ geometrisesti.

- Tarkastellaan otoskovarianssifunktiota

$$C_k = (T - k)^{-1} \sum_{t=1}^{T-k} (y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})', \quad 0 \leq k \leq T - 1,$$

$$C_k = [c_{ij,k}] = C'_{-k}, \quad -T + 1 \leq k < 0.$$

- Kiinnitetään i, j ja $k \geq 0$ ja määritellään muuttuja $x_t = y_{it}y_{j,t+k}$, joka on keskeinen osa estimaattoria $c_{ij,k}$:

$$\begin{aligned} c_{ij,k} &= (T - k)^{-1} \sum_{t=1}^{T-k} (y_{it} - \bar{y}_i)(y_{j,t+k} - \bar{y}_j) \\ &= (T - k)^{-1} \sum_{t=1}^{T-k} y_{it}y_{j,t+k} - (T - k)^{-1} \sum_{t=1}^{T-k} y_{it}\bar{y}_j \\ &\quad - \bar{y}_i(T - k)^{-1} \sum_{t=1}^{T-k} y_{jt} + \bar{y}_i\bar{y}_j \end{aligned}$$

- Oletetaan $E(y_{it}^4) < \infty$ ($i = 1, \dots, n$), jolloin x_t on stationaarinen ja sillä on äärellinen toinen momentti.
- Jos x_t :n autokov. funktio $\gamma_x(k)$ toteuttaa $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_x(k)| < \infty$, niin

$$\bar{x} = (T - k)^{-1} \sum_{t=1}^{T-k} y_{it} y_{j,t+k} \xrightarrow{P} E(y_{it} y_{j,t+k}) = \gamma_{ij,k} + \mu_i \mu_j.$$

- Lisäksi, $(T - k)^{-1} \sum_{t=1}^{T-k} y_{it} \xrightarrow{P} \mu_i$ ja $\bar{y}_i \xrightarrow{P} \mu_i$.

- Kaiken kaikkiaan

$$\begin{aligned} c_{ij,k} &= (T - k)^{-1} \sum_{t=1}^{T-k} y_{it} y_{j,t+k} - (T - k)^{-1} \sum_{t=1}^{T-k} y_{it} \bar{y}_j \\ &\quad - \bar{y}_i (T - k)^{-1} \sum_{t=1}^{T-k} y_{jt} + \bar{y}_i \bar{y}_j \\ &\xrightarrow{P} \gamma_{ij,k}. \end{aligned}$$

- Kun tehdyt oletukset pätevät kaikilla i, j ja $k \geq 0$,

$$C_k \xrightarrow{P} \Gamma_k.$$

- Otoskovarianssifunktio on siis tarkentuva "kohtuullisin" oletuksin.
- Viipymä k kuitenkin kiinteä, joten tarkentuvuus todettu, kun $-K \leq k \leq K$ ja K ei riipu T :stä.
- Käytetyt oletukset helppo todeta erikoistapauksessa $y_t \sim \text{iid}(\mu, \Sigma)$ ja sen jälkeen edelleen VMA(q)-prosessin tapauksessa ($q < \infty$).
- VARMA(p, q)-prosesseilla C_k :n tarkentuvuus voidaan todeta käyttäen approksimaatiota $\text{VARMA}(p, q) \approx \text{VMA}(h)$, kun h on "suuri". Yksityiskohdat ovat kuitenkin hieman teknisiä ja sivuutetaan.

- Tarkastellaan (n -ulotteista) lineaarista prosessia

$$y_t = \mu + \Psi(B) \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \Omega), \quad (*)$$

jossa $\Psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j B^j$ ja $\Psi_0 = I_n$.

- Oletetaan aiempaa vahvemmin $\sum_{j=1}^{\infty} j \|\Psi_j\| < \infty$.
- Tällöin voidaan kirjoittaa (ks. Liite A. 4)

$$\Psi(B) = \Psi(1) + \Delta G(B),$$

jossa $\Delta = 1 - B$ on differensointioperaattori ja

$$G(B) = \sum_{j=0}^{\infty} G_j B^j \text{ toteuttaa } \sum_{j=0}^{\infty} \|G_j\| < \infty.$$

- Soveltamalla tätä yhtälössä (*) saadaan

$$y_t - \mu = \Psi(1) \varepsilon_t + \Delta u_t, \quad u_t = G(B) \varepsilon_t.$$

- Saadaan

$$\sqrt{T} (\bar{y} - \mu) = \Psi(1) \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t + \frac{1}{\sqrt{T}} (u_T - u_0),$$

jossa

$$\Psi(1) \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t \xrightarrow{d} N(0, \Psi(1) \Omega \Psi(1)') \quad \text{ja} \quad \frac{1}{\sqrt{T}} (u_T - u_0) \xrightarrow{p} 0.$$

- Tästä seuraa (Liite B, Lause B.3)

$$\sqrt{T} (\bar{y} - \mu) \xrightarrow{d} N(0, \Psi(1) \Omega \Psi(1)').$$

- Tämä voidaan osoittaa myös ilman lineaarisuusoletusta, mutta perusteluista tulee hankalampia.
- Olennainen oletus usein on, että sv:t y_t ja y_{t-k} "tulevat riippumattomiksi", kun $k \rightarrow \infty$, mikä lineaarisen prosessin seuraa, koska $\Psi_k \rightarrow 0$, kun $k \rightarrow \infty$.

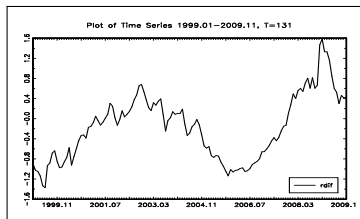
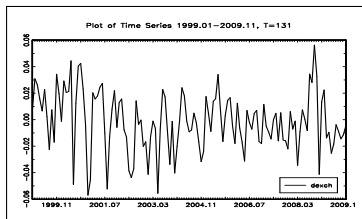
- Tarkastellaan otosauto- ja otosristikorraatiota

$$r_{ij,k} = \frac{c_{ij,k}}{\sqrt{c_{i,0}c_{j,0}}}, \quad c_{i,0} = c_{ii,0}.$$

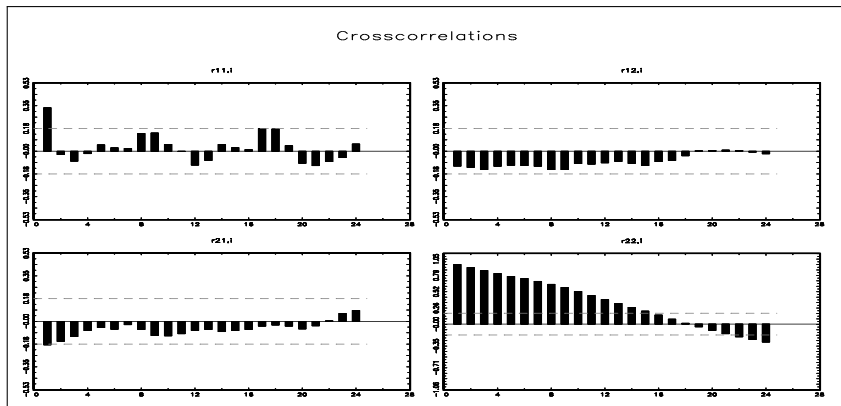
- Näiden asymptoottinen jakauma tunnetaan, mutta se on erikoistapauksia lukuun ottamatta varsin monimutkainen.
- Voidaan osoittaa, että tapauksessa $y_t \sim \text{iid}(\mu, \Sigma)$ pätee

$$r_{ij,k} \underset{as}{\sim} N(0, 1/T).$$

- Tulos pätee myös tapauksessa $k = 0$, kun Σ on diagonaalinen, jolloin $r_{ab,k}$ ja $r_{ab,l}$ ovat asymptoottisesti riippumattomia (olettaen $l \neq k$ ja lisäksi $l, k > 0$, kun $a = b$).



Kuvio 1.1. Euron ja Yhdysvaltojen dollarin välisen kuukausittaisen vaihtokurssin (euro/U.S. dollari) muutos (vasemalla) ja euroalueen ja Yhdysvaltojen 10 vuoden valtioiden obligaatioiden kesikorkojen ero (oikealla) ajanjaksona 1999I - 2009XI.



Kuvio 3.1. Euron ja Yhdysvaltojen dollarin välisen kuukausittaisen vaihtokurssin muutoksen (y_{1t}) ja euroalueen ja Yhdysvaltojen 10 vuoden valtioiden obligaatioiden keskkorkojen eron (y_{2t}) estimoidut autokorrelaatio- ja ristikorrelaatiofunktiot ($t = 1999, \dots, 2009X1$, $T = 131$).