

- **Luennoija:** Pentti Saikkonen
- **Luentoajat:** III periodi (viikot 3-9) to 14-16 CK111 ja pe 12-14 C124
- **Tyyppi ja laajuus:** Syventävät opinnot, 5-8 op
- **Suoritustapa:** Kurssikoe tai yleistentti
- **Laskuharjoitukset:** Luentojen yhteydessä (lisätietoja, ks. kurssin [www-sivu](#))

• Esitietovaatimukset

- Tilastotieteen aineopintojen pakolliset kurssit (Tn-laskenta, Til. päättely ja Lin. mallit) sekä niiden vaatimat matematiikan kurssit (erityisesti lineaarialgebra ja matriisilaskenta) tai vastaavat tiedot.
- Lisäksi (yksiulotteisten) stationaaristen aikasarjojen analyysin peruskäsitteet oletetaan tunnetuiksi.

• Käsiteltäviä aiheita:

- Moniulotteisten aikasarjojen analysoinnissa tarvittavat peruskäsitteet
- Stationaarinen vektoriautoregressiivinen (VAR) malli ja siihen liittyvä estimointi ja testiteoria, ennustaminen, Grangerin kausaalisuus sekä impulssivasteanalyysi

- **Kirjallisuus ja muu kurssimateriaali:**

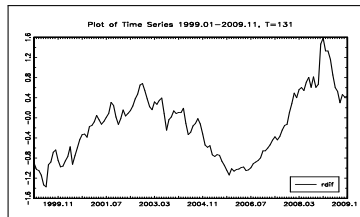
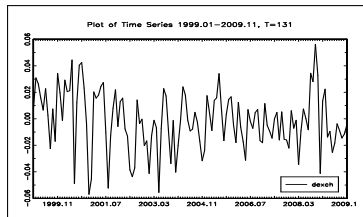
- Luentomoniste. Oheislukemistona voi käyttää soveltuvia osia teoksista:
- H. Lütkepohl "New Introduction to Multiple Time Series Analysis", Springer, 2005.
- J. Hamilton: Time Series Analysis, Princeton University Press, 1994.

- *Moniulotteinen tai vektoriarvoinen aikasarja* on havaintoaineisto, jossa on vektoriarvoisia havaintoja peräkkäisinä (ja meillä yhtä kaukana toisistaan olevina) ajankohtina eli

$$y_t = (y_{1t}, \dots, y_{nt}), \quad t = 1, \dots, T,$$

jossa t on ajankohta, n tarkasteltavien muuttujien lukumäärä ja T havaintojen lukumäärä.

- Esimerkiksi
 - Usean pörssikurssin päivittäinen kehitys Helsingin pörsissä vuonna 2009
 - Hiilimonoksidin, typpioksidin ja typpidioksidin päivittäiset päästöt (mg/m^3) - useita tasavälisiä havaintoja/päivä
 - y_{1t} = euron ja Yhdysvaltojen dollarin välisen kuukausittaisen vaihtokurssin (euro/U.S. dollari) muutos ($dexch_t$) ja y_{2t} = euroalueen ja Yhdysvaltojen 10 vuoden valtioiden obligaatioiden keskiporkojen erolla ($rdif_t$) ajanjaksona 1999I - 2009XI.



Kuvio 1.1. Euron ja Yhdysvaltojen dollarin välisen kuukausittaisen vaihtokurssin (euro/U.S. dollari) muutos (vasemalla) ja euroalueen ja Yhdysvaltojen 10 vuoden valtioiden obligaatioiden kesikorkojen ero (oikealla) ajanjaksona 1999I - 2009XI.

- Aikasarja voidaan tulkita stokastisen prosessin realisaatioksi eli satunnaisilmiön havaituksi kehityskulukuksi ajassa.
- *Stokastinen prosessi* tai usein vain prosessi voidaan määritellä joukoksi satunnaisvektoreita (sv) tai yksiulotteisessa tapauksessa satunnaismuuttujia (sm):

$$\{y_t, t \in \mathbb{Z}\} \quad (\text{diskreetti aika}) \quad \text{tai} \quad \{y_t, t \in \mathbb{R}\} \quad (\text{jatkuva aika}).$$

- Erityisesti jatkuva-aikaisessa tapauksessa käytetään myös merkintää $y(t)$. Aika-muuttuja t voi kuulua myös johonkin \mathbb{Z} :n tai \mathbb{R} :n osajoukkoon kuten \mathbb{N} tai $\{0 \leq t \leq 1\}$.

- Yleensä merkitään lyhyesti $\{y_t\}$ tai vain y_t .
- Merkintä $\{y_t\}$ korostaa sitä, että stokastinen prosessi on (yleisesti ottaen) ääretönulotteinen satunnaisvektori.
- Esimerkiksi reaaliarvoinen diskreettiaikainen prosessi $\{y_t\} = \{\dots, y_{-1}, y_0, y_1, \dots\}$ saa arvoja joukossa $\mathbb{R}^\infty = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots$.
- Jatkuva-aikainen prosessi voi saada arvoja esimerkiksi joukossa $C[0, 1]$ eli kaikkien välillä $[0, 1]$ määriteltyjen jatkuvien reaaliarvoisten funktioiden joukossa.
- Käytännössä havaittu aikasarja on vain yksi ääretönulotteisen satunnaismuuttujan sama arvo tai yleensä vain osa sen saamasta arvosta (esim. $y_1, \dots, y_T, T < \infty$).

- Mitä tarkoitetaan stokastisen prosessin tai ääretönulotteisen s_m :n todennäköisyysjakaumalla, joka on määriteltävä esimerkiksi joukossa \mathbb{R}^∞ tai $C[0, 1]$?
- Tätä jakaumaa tarvitaan todennäköisyysteoreettisissa tarkasteluissa, kun tutkitaan sellaisten tapahtumien todennäköisyyksiä, joita ei voida ilmaista käyttäen todennäköisyyksiä

$$P \{y_{t_1} \in A_1, \dots, y_{t_m} \in A_m\}, \quad 1 \leq m < \infty,$$

eli ns. *äärellisulotteisia jakaumia*.

- Esimerkki tällaisesta tapahtumasta on vaikkapa $\{0 \leq y_t \leq 1 : \forall t \geq 100\}$.

- Keskeinen tulos stokastisten prosessien (kehittyneestä) teoriasta sanoo hieman yksinkertaistaen, että prosessin (ääretönulotteinen) jakauma määräytyy yksikäsitteisesti äärellisulotteisista jakaumista.
- Kääntäen, prosessin äärellisulotteiset jakaumat määräytyvät (ilmeisesti) yksikäsitteisesti ääretönulotteisista jakaumista.
- Prosessin jakauma voidaan siis karakterisoida käyttäen äärellisulotteisia jakaumia.
- Siten prosessi $\{y_t\}$ on esimerkiksi normaalin täsmälleen silloin, kun sen kaikki äärellisulotteiset jakaumat ovat normaalisia eli
 - $sv(y_{t_1}, \dots, y_{t_m})$ noudattaa multinormaalijakaumaa kaikilla t_1, \dots, t_m ja kaikilla $m \geq 1$ ($m \in \mathbb{Z}$, mutta jatkuva-aikaisessa tapauksessa t_1, \dots, t_m eivät välttämättä ole kokonaislukuja).

- Stokastisen prosessin y_t ensimmäiset ja toiset momentit määrittellään seuraavasti (olettaen, että ne ovat äärellisinä olemassa).
- *Odotusarvo(funktio)*

$$\mu_t = E(y_t) \quad (n \times 1)$$

- *Kovarianssifunktio*

$$\Gamma_{s,t} = \text{Cov}(y_s, y_t) = E[(y_s - \mu_s)(y_t - \mu_t)'] \quad (n \times n),$$

josta valinnalla $s = t$ kovarianssmatriisi $\Sigma_t = \Gamma_{t,t}$ eli

$$\Sigma_t = \text{Cov}(y_t) = E[(y_t - \mu_t)(y_t - \mu_t)'] \quad (n \times n).$$

- Jatkuva-aikaisessa tapauksessa alaindeksit s ja t voivat saada mitä reaalityyppisiä arvoja tahansa.

- Stokastinen prosessi y_t ($n \times 1$) on (vahvasti) *stationaarinen*, jos

$$P \{y_{t_1} \in A_1, \dots, y_{t_m} \in A_m\} = P \{y_{t_1+k} \in A_1, \dots, y_{t_m+k} \in A_m\}$$

kaikilla A_1, \dots, A_m , t_1, \dots, t_m , k ja $m \geq 1$ (jatkuva-aikaisessa tapauksessa vain $m:n$ tarvitsee olla kokonaisluku).

- Toisin sanoen, stationaarisen prosessin todennäköisyysstruktuuri on aikainvariantti.
- Seuraa, että sv:t y_t ovat samoin jakautuneita kaikilla t ja samoin sv:t (y_t, y_{t+h}) ja (y_s, y_{s+h}) ovat samoin jakautuneita kaikilla t ja s ja jokaisella (kiinteällä) h .

- Vahvasti stationaariset prosessit säilyttävät luonteensa funktiomuunnoksissa.
- Erityisesti siis, jos z_t on vahvasti stationaarinen diskreettiaikainen prosessi ($t \in \mathbb{Z}$), niin samoin on $y_t = g(z_{t+h}, \dots, z_{t-k})$ ($h, k \geq 0$).
- Tämä pätee millä tahansa "siistillä" (eli esim. jatkuvalla tai yleisemmin ns. mitallisella) funktiolla g .
- Lisäksi h :n tai k :n tai molempien paikalla voi olla ∞ .
- Kun h ja k ovat äärellisiä seuraa tämä ominaisuus jokseenkin suoraan vahvan stationaarisuuden määritelmästä.

Stationaariset prosessit

Määritelmiä

- Prosessi y_t ($n \times 1$) on *heikosti stationaarinen* tai *kovarianssi-stationaarinen*, jos sen toiset (ja siten myös ensimmäiset) momentit ovat äärellisinä olemassa ja ne ovat aikainvariantteja eli

$$E(y_t) = \mu \quad \text{ja} \quad \text{Cov}(y_t, y_{t+k}) = \Gamma_k \quad \text{kaikilla } t \text{ ja } k.$$

(Jatkuva-aikaisessa tapauksessa $t \in \mathbb{R}$ ja myös $k \in \mathbb{R}$.)

- Vahvasta stationaarisuudesta ja toisten momenttien äärellisyydestä seuraa heikko stationaarisuus.
- Käänteinen tulos pitää paikkansa normaalilla prosesseilla, mutta *ei yleisesti*.
- Heikosti stationaariset prosessit eivät yleisesti säilytä luonnettaan funktiomuunnoksissa.

Stationaariset prosessit

Määritelmiä

- Yksinkertaisin esimerkki (diskreettiaikaisesta) stationaarisesta prosessista on jono riippumattomia samoin jakautuneita satunnaisvektoreita.
- Jos y_t ($n \times 1$) on tällainen jono ja lisäksi $E(y_t) = \mu$ ja $\text{Cov}(y_t) = \Sigma$ ovat äärellisinä olemassa, merkitään $y_t \sim \text{iid}(\mu, \Sigma)$ ($t \in \mathbb{Z}$).
- Tällaista prosessia sanotaan (vahvaksi) *valkoiseksi kohinaksi*.
- Jos y_t on lisäksi normaalisti jakautunut, merkitään $y_t \sim \text{nid}(\mu, \Sigma)$.
- Jos edellä oletetaan riippumattomuuden asemesta (lievemmin) korreloimattomuus eli $\text{Cov}(y_s, y_t) = 0$, $t \neq s$, on y_t heikosti stationaarinen eli ns. *heikko valkoinen kohina*.

- Yksiulotteisessa tapauksessa kovarianssifunktio on symmetrinen viipymän k suhteen.
- Moniulotteisessa tapauksessa näin ei ole. Sen sijaan pätee

$$\Gamma_{-k} = \Gamma'_k.$$

- Kuten yksiulotteisessa tapauksessakin, riittää siis tuntea Γ_k vain, kun $k \geq 0$ (tai $k \leq 0$).

Stationaariset prosessit

Määritelmiä

- Olkoon $y_t = (y_{1t}, \dots, y_{nt})$ ja $\Gamma_k = [\gamma_{ab,k}]$ ($a, b = 1, \dots, n$).
- Tällöin $\gamma_{aa,k} =: \gamma_{a,k}$ on prosessin y_{at} *autokovarianssifunktio* ja $\gamma_{ab,k}$ ($a \neq b$) on prosessien y_{at} ja y_{bt} välinen *ristikovarianssifunktio*
- Prosessin y_{at} *autokorrelaatiofunktio* on

$$\rho_{a,k} = \gamma_{a,k} / \gamma_{a,0}, \quad a = 1, \dots, n$$

ja prosessien y_{at} ja y_{bt} välinen *ristikorrelaatiofunktio* on

$$\rho_{ab,k} = \gamma_{ab,k} / \sqrt{\gamma_{a,0} \gamma_{b,0}} \quad a, b = 1, \dots, n.$$

- Määritelmän mukaan $\rho_{ab,k}$ on sm:ien y_{at} ja y_{bt} välinen tavanomainen korrelaatiokerroin

- Käytännössä stationaariseen prosessiin voidaan yleensä liittää oletus

$$\Gamma_k \rightarrow 0, \text{ kun } |k| \rightarrow \infty, \quad (*)$$

jossa suppeneminen voidaan tulkita tapahtuvaksi alkioittain.

- Tällöin y_t ja y_{t+k} ovat lähes korreloimattomia, kun $|k|$ on "suuri"
 - eli, kun y_t ja y_{t+k} ovat ajallisesti "kaukana" toisistaan (ei seuraa stationaarisuudesta.)
- Jos ehto (*) pätee, riittää y_t :n ensimmäisten ja toisten momenttien estimoimiseksi (olennaisesti) estimoida vain äärellinen määrä parametreja
 - eli μ ja Γ_k , $k = -K, \dots, K$, "suurella" K :n arvolla.

Stationaariset prosessit

Lineaarinen prosessi

- Yksiulotteisen (kausaalisen) lineaarisen prosessin määrittely-yhtälö on

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid} (0, \omega^2), \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (*)$$

jossa $\psi_0 = 1$ ja

$$\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty. \quad (**)$$

- Yhtälössä (*) oleva ääretön summa voidaan tulkita osasummien $\sum_{j=0}^N \psi_j \varepsilon_{t-j}$ jonon kvadraattiseksi raja-arvoksi ($N \rightarrow \infty$).
- Stokastisten prosessien (kehittyneestä) teoriasta tiedetään, että ehdon (**) voimassa ollessa tämä kvadraattinen raja-arvo on olemassa ja lisäksi, että raja-arvolla on äärellinen toinen momentti.
- iid-prosessista ε_t käytetään nimityksiä virhe, sokki tai innovaatio.
- $\{\varepsilon_t\}$ vahvasti stationaarinen $\implies \{y_t\}$ vahvasti stationaarinen

Stationaariset prosessit

Lineaarinen prosessi

- Moniulotteisen (kausaalisen) *lineaarisen prosessin* $y_t = (y_{1t}, \dots, y_{nt})$ määrittely-yhtälö on

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \Omega), \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (\text{x})$$

jossa $\Psi_0 = I_n$ ($n \times n$ yksikkömatriisi), ε_t on $n \times 1$ ja kerroinmatriisit Ψ_j ($n \times n$) toteuttavat

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|\Psi_j\|^2 < \infty. \quad (\text{xx})$$

- Matriisnormi $\|\Psi_j\|$ määritellään muodostamalla matriisin Ψ_j alkiosta vektori ja soveltamalla tavallista \mathbb{R}^{n^2} :n (Euklidista) vektorinormia.
- Kun $\Psi_j = [\psi_{ab,j}]$, voidaan ehto (xx) esittää yhtäpitävästi muodossa

$$\sum_{j=0}^{\infty} \psi_{ab,j}^2 < \infty \quad \text{kaikilla } a, b, = 1, \dots, n.$$

Stationaariset prosessit

Matriisinormi

- Reaalisen matriisin $A = [a_{ij}]$ ($n \times m$) (Euklidinen) *normi* on

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^2}.$$

- Olkoon $A = [a_1 : \cdots : a_m]$, jossa a_i ($n \times 1$) on A :n i . sarake, ja

$$\text{vec}(A) = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \quad (nm \times 1).$$

- Tällöin $\|A\|$ on vektorin $\text{vec}(A)$ normi eli

$$\|A\| = \sqrt{\text{vec}(A)' \text{vec}(A)}.$$

- Matriisinormilla on vektorinormin tavanomaiset ominaisuudet

(i) $\|A\| \geq 0$ ja $\|A\| = 0$ jos ja vain jos $A = 0$

(ii) $\|cA\| = |c| \|A\|$ kaikilla $c \in \mathbb{R}$

(iii) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ kaikilla yhteensopivilla A ja B

- Näiden lisäksi pätee

(iv) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ kaikilla A $n \times m$ ja B $m \times l$

- Ominaisuus (iii) on kolmioepäyhtälö ja (iv) ns. submultiplikatiivisuus

Stationaariset prosessit

Lineaarinen prosessi

- Moniulotteisen (kausaalisen) *lineaarisen prosessin* $y_t = (y_{1t}, \dots, y_{nt})$ määrittely-yhtälö on

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \Omega), \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (\text{x})$$

jossa $\Psi_0 = I_n$ ($n \times n$ yksikkömatriisi) ja kerroinmatriisit Ψ_j toteuttavat

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|\Psi_j\|^2 < \infty. \quad (\text{xx})$$

- Yhtälön (x) oikea puoli voidaan tulkita komponenteittain kvadraattisina raja-arvoina aivan kuten yksiulotteisessa tapauksessa.
- Prosessin $\{y_t\}$ (vahva) stationaarisuus seuraa seuraava prosessin $\{\varepsilon_t\}$ vastaavasta ominaisuudesta kuten yksiulotteisessa tapauksessakin.

Stationaariset prosessit

Lineaarinen prosessi: heikko stationaarisuus

- Lasketamalla nähdään, että

$$E(y_t) = 0$$

ja

$$\text{Cov}(y_t, y_{t+k}) = E(y_t y_{t+k}') = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \Omega \Psi_{j+k}'.$$

Koska $\|\Psi_j \Omega \Psi_j'\| \leq \|\Omega\| \|\Psi_j\|^2$ ja $\sum_{j=0}^{\infty} \|\Psi_j\|^2 < \infty$, niin $\text{Cov}(y_t, y_t)$ on äärellinen, joten vahvan stationaarisuuden pätiessä pätee myös heikko stationaarisuus.

- Heikko stationaarisuus voidaan päätellä myös yo momenttien lausekkeista, jotka pätevät, kun ε_t on heikko valkoinen kohina.

Stationaariset prosessit

AR(p)-prosessi

- Astetta p olevan yksiulotteisen autoregressiivisen prosessin eli *AR(p)-prosessin tai AR(p)-mallin* lähtökohtana on yhtälö

$$y_t = a_1 y_{t-1} + \cdots + a_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \omega^2) \quad (t \in \mathbb{Z}).$$

- Havaittavan prosessin y_t arvo ajankohtana t riippuu siis lineaarisesti sen omista viipymistä y_{t-1}, \dots, y_{t-p} ja ei-havaittavasta virhetermistä ε_t aivan kuten lineaarisessa regressiomallissa.

Stationaariset prosessit

VAR(p)-prosessi

- Moniulotteisessa tapauksessa $y_t = (y_{1t}, \dots, y_{nt})$ vastaava on *VAR(p)-prosessi tai VAR(p)-mallia* ('V' \leftrightarrow vektori)

$$y_t = A_1 y_{t-1} + \dots + A_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \Omega) \quad (t \in \mathbb{Z}),$$

jossa A_1, \dots, A_p ovat $n \times n$ kerroinmatriiseja ja ε_t ($n \times 1$) on ei-havaittava virhetermi (tai sokki tai innovaatio).

- Ellei toisin mainita, oletetaan kovarianssimatriisi Ω positiivisesti definiitiksi (ja siten epäsingulaariseksi eli kääntyväksi).
- Jokaista y_t :n komponenttia selitetään sen omilla viipymillä ja myös y_t :n muiden komponenttien viipymillä kuten lineaarisessa regressiomallissa.
- Moniulotteisessa tapauksessa voidaan siten tarkastella myös muuttujien välisiä viivästettyjä vaikutussuhteita kuten $y_{2t} \rightarrow y_{1,t+k}$ ja miten $y_{1t} \rightarrow y_{2,t+k}$, $k > 0$.

Stationaariset prosessit

VAR(p)-prosessi

VAR(p)-prosessin stationaarisuusehtoa varten tarkastellaan yhtälöä

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}\mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (t \in \mathbb{Z}), \quad (*)$$

jossa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_{p-1} & A_p \\ I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & 0 \end{bmatrix} \quad (np \times np).$$

$$\mathbf{y}_t = [y_t' \cdots y_{t-p+1}']' \quad (np \times 1) \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t = [\varepsilon_t' \mathbf{0}' \cdots \mathbf{0}']' \quad (np \times 1).$$

Lisäksi, $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim \text{iid}(0, \boldsymbol{\Omega})$, $\boldsymbol{\Omega} = \text{diag}[\boldsymbol{\Omega} \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}]$.

Stationaariset prosessit

VAR(p)-prosessi

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}\mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (*)$$



$$\begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ \vdots \\ y_{t-p+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_{p-1} & A_p \\ I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ \vdots \\ y_{t-p+1} \\ y_{t-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_t \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$y_t = A_1 y_{t-1} + \cdots + A_p y_{t-p} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \Omega)$$

Stationaariset prosessit

VAR(p)-prosessi: Stationaarisuusehto I

- Koska

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}\mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (*)$$

\Leftrightarrow

$$y_t = A_1 y_{t-1} + \cdots + A_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \Omega),$$

on $\mathbf{y}_t = [y_t' \cdots y_{t-p+1}']'$ stationaarinen jos ja vain jos y_t on stationaarinen.

- Riittävä ehto on, että matriisin \mathbf{A} kaikki ominaisarvot ovat itseisarvoltaan ykköstä pienempiä tai yhtäpitävästi jos

$$\det(I_{np} - \mathbf{A}z) \neq 0, \quad |z| \leq 1 \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Stationaariset prosessit

VAR(p)-prosessi: Stationaarisuusehto I

- Tarkastellaan yhtälöä $\mathbf{y}_t = \mathbf{A}\mathbf{y}_{t-1} + \varepsilon_t$ tapauksessa $t \geq 1$, jolloin prosessi \mathbf{y}_t on hyvin määritelty, kun alkuarvo \mathbf{y}_0 spesifioidaan.
- Peräkkäisillä sijoituksilla saadaan

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}^t \mathbf{y}_0 + \sum_{j=0}^{t-1} \mathbf{A}^j \varepsilon_{t-j}.$$

- Kun \mathbf{A} :n kaikki ominaisarvot ovat itseisarvoltaan ykköstä pienempiä, $\mathbf{A}^j \rightarrow 0$ geometrisesti, kun $j \rightarrow \infty$, joten (ks. Liite A.3)

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|\mathbf{A}^j\| < \infty \quad \implies \quad \sum_{j=0}^{\infty} \|\mathbf{A}^j\|^2 < \infty.$$

- Voidaan siis määritellä lineaarinen prosessi

$$\mathbf{y}_t^* = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{A}^j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

joka on sekä vahvasti että heikosti stationaarinen.

Stationaariset prosessit

VAR(p)-prosessi: Stationaarisuusehto I

- On siis todettu, että

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}^t \mathbf{y}_0 + \sum_{j=0}^{t-1} \mathbf{A}^j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}.$$

ja on voitu määritellä lineaarinen prosessi

$$\mathbf{y}_t^* = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{A}^j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

- Valitsemalla edellisessä alkuarvoksi $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_0^*$ saadaan lineaarinen prosessi

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}^t \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{A}^j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j} + \sum_{j=0}^{t-1} \mathbf{A}^j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{A}^j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}, \quad t \geq 1.$$

- Tällöin $\{\mathbf{y}_t, t \geq 1\}$ on sekä vahvasti että heikosti stationaarinen ja samoin sen laajennettu versio $\{\mathbf{y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$.

Stationaariset prosessit

VAR(p)-prosessi: Stationaarisuusehto I

- Siis, kun matriisin \mathbf{A} kaikki ominaisarvot ovat itseisarvoltaan < 1 , on prosessi $\mathbf{y}_t = [y_t' \cdots y_{t-p+1}']'$ sekä vahvasti että heikosti stationaarinen ja

$$\mathbf{y}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{A}^j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}, \quad (t \in \mathbb{Z}) \quad (*)$$

- Sama pätee siten myös VAR(p)-prosessille y_t ($n \times 1$).
- Koska $\boldsymbol{\varepsilon}_t = [\varepsilon_t' \ 0' \cdots 0']'$ ($np \times 1$), on

$$y_t = \mathbf{J} \mathbf{y}_t \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{J}' \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad \mathbf{J} = [I_n : 0 : \cdots : 0] \quad (n \times np)$$

- Yhtälöstä (*) seuraa siten

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{\Psi}_j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}, \quad (t \in \mathbb{Z}),$$

jossa $\boldsymbol{\Psi}_j = \mathbf{J} \mathbf{A}^j \mathbf{J}'$, $\boldsymbol{\Psi}_0 = I_n$ ja $\boldsymbol{\Psi}_j \rightarrow 0$ geometrisesti, kun $j \rightarrow \infty$.

Stationaariset prosessit

VAR(p)-prosessi: Stationaarisuusehto I

- Edellä todettiin, että prosessille $\{\mathbf{y}_t, t \geq 1\}$ pätee

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}^t \mathbf{y}_0 + \sum_{j=0}^{t-1} \mathbf{A}^j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}.$$

- Olipa alkuarvo \mathbf{y}_0 mikä tahansa, sen vaikutus häviää t :n kasvaessa ja prosessi "stationarisoituu".
- Koska $\mathbf{y}_t = [y_t' \cdots y_{t-p+1}']'$, pätee sama prosessille $\{y_t, t \geq 1\}$ eli

$$y_t = A_1 y_{t-1} + \cdots + A_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \Omega), \quad t \geq 1.$$

- Tässä yhteydessä puhutaan usein stabiilisuudesta tai asymptoottisesta stationaarisuudesta.
- Myöhemmin esitettävät estimointi- ja testaustulokset soveltuvat myös tällaisille prosesseille.

Stationaariset prosessit

VAR(p)-prosessi: Stationaarisuusehto II

- Määritellään viivästysoperaattori B yhtälöllä $B^k x_t = x_{t-k}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (x_t mahdollisesti vektori).

- Tällöin VAR(p)-prosessi

$$y_t = A_1 y_{t-1} + \dots + A_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \Omega), \quad (t \in \mathbb{Z}).$$



$$A(B) y_t = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \Omega) \quad (t \in \mathbb{Z}),$$

jossa $A(B) = I_n - A_1 B - \dots - A_p B^p$.

- Esitetylle stationaarisuusehdolle pätee

$$\det(I_{np} - \mathbf{A}z) \neq 0, \quad |z| \leq 1 \quad (z \in \mathbb{C})$$



$$\det A(z) \neq 0, \quad |z| \leq 1 \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Stationaariset prosessit

VAR(p)-prosessi: Stationaarisuusehto II - Polynomimatriiseista

- *Polynomimatriisi* on matriisi, jonka alkiot ovat polynomeja:

$$P(z) = [p_{ij}(z)], \quad p_{ij}(z) = \sum_{k=0}^{m_{ij}} a_{ij,k} z^k.$$

- Asettamalla $m = \max \{m_{ij}\}$ voidaan vaihtoehtoisesti kirjoittaa

$$P(z) = \sum_{k=0}^m A_k z^k, \quad A_k = [a_{ij,k}] \quad \text{ja} \quad a_{ij,k} = 0, \quad \text{kun} \quad k > m_{ij}.$$

- Voidaan siis puhua myös *matriisipolynomeista* eli polynomeista, joiden kertoimet ovat matriiseja.

Stationaariset prosessit

VAR(p)-prosessi: Stationaarisuusehto II - Polynomimatriiseista

- Polynomimatriiseilla laskutoimitukset

$$A(z) + B(z) \quad \text{ja} \quad A(z) B(z).$$

määritellään kuten tavanomaisilla reaalilukumatriiseilla.

- Samoin determinantti $\det(A(z))$, joka voidaan siis muodostaa summaamalla $A(z)$:n alkioista laskettuja tuloja, joten

$$A(z) \text{ polynomimatriisi} \Rightarrow \det(A(z)) \text{ on polynomi.}$$

- Edelleen, jos $A(z)$ ($m \times m$), niin käänteismatriisi $A(z)^{-1}$ on olemassa jos ja vain jos $\det(A(z)) \neq 0$ ja

$$A(z)^{-1} A(z) = A(z) A(z)^{-1} = I_m.$$

Stationaariset prosessit

VAR(p)-prosessi: Stationaarisuusehto II - Polynomimatriiseista

- Käänteismatriisi voidaan laskea kaavalla

$$A(z)^{-1} = \frac{1}{\det(A(z))} A(z)^* \quad (\det(A(z)) \neq 0),$$

jossa $A(z)^* = [a_{ij}^*(z)]$ on $A(z)$:n ns. adjungaattimatriisi.

- Ts., $a_{ij}^*(z) = (-1)^{i+j}$ kertaa determinantti siitä $A(z)$:n alimatriisista, joka saadaan poistamalla $A(z)$:sta j . rivi ja i . sarake.
- $a_{ij}^*(z)$ on siis polynomi, joten $A(z)^{-1}$:n alkiot ovat rationaalifunktioita eli tyyppiä $\sum_{j=0}^q a_j z^j / \sum_{j=0}^r b_j z^j$ ($q, r < \infty$).

Stationaariset prosessit

VAR(p)-prosessi: Stationaarisuusehto II

- Kun stationaarisuusehto

$$\det A(z) \neq 0, \quad |z| \leq 1 \quad (z \in \mathbb{C}).$$

on voimassa, voidaan VAR(p)-yhtälö

$$A(B) y_t = \varepsilon_t$$

ratkaista formaalisti kertomalla vasemmalta käänteismatriisilla $A(B)^{-1}$.

- Saadaan (vrt. AR(p)-prosessien vastaava tulos)

$$y_t = \Psi(B) \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \varepsilon_{t-j} \quad (t \in \mathbb{Z}),$$

jossa $\Psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j B^j = A(B)^{-1}$.

Stationaariset prosessit

VAR(p)-prosessi: Stationaarisuusehto II

- Aikaisemmin todettiin, että $\Psi_j = \mathbf{J}\mathbf{A}^j\mathbf{J}'$, $\Psi_0 = \mathbf{I}_n$.
- Nyt $\Psi(\mathbf{B}) = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \mathbf{B}^j = \mathbf{A}(\mathbf{B})^{-1}$, josta $\Psi(\mathbf{B})\mathbf{A}(\mathbf{B}) = \mathbf{I}_n$.

- Siis,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_n &= (\Psi_0 + \Psi_1\mathbf{B} + \Psi_2\mathbf{B}^2 + \dots) (\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_1\mathbf{B} - \dots - \mathbf{A}_p\mathbf{B}^p) \\ &= \Psi_0 + (\Psi_1 - \Psi_0\mathbf{A}_1)\mathbf{B} + (\Psi_2 - \Psi_1\mathbf{A}_1 - \Psi_0\mathbf{A}_2)\mathbf{B}^2 + \dots \end{aligned}$$

- Tästä seuraa

$$\mathbf{I}_n = \Psi_0$$

$$0 = \Psi_1 - \Psi_0\mathbf{A}_1$$

$$0 = \Psi_2 - \Psi_1\mathbf{A}_1 - \Psi_0\mathbf{A}_2$$

$$\vdots$$

- Yhtälöt

$$I_n = \Psi_0$$

$$0 = \Psi_1 - \Psi_0 A_1$$

$$0 = \Psi_2 - \Psi_1 A_1 - \Psi_0 A_2$$

⋮

voidaan esittää muodossa

$$\Psi_0 = I_n$$

$$\Psi_j = \sum_{i=1}^j \Psi_{j-i} A_i, \quad j = 1, 2, \dots,$$

jossa $A_i = 0$, kun $i > p$.

Stationaariset prosessit

VAR(p)-prosessi: Impulssivasteet

- VAR(p)-malli

$$y_t = A_1 y_{t-1} + \dots + A_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \Omega),$$

voidaan ajatella usean lineaarisen regressiomallin systeeminä, jossa selittävät muuttujat ovat selitettävien muuttujien viivästettyjä arvoja.

- Regressiomallien tapaan voidaan kerroinmatriisien A_1, \dots, A_p alkioiden tulkita kuvaavan selittävien muuttujien y_{t-1}, \dots, y_{t-p} komponenttien vaikutusta selitettäviin muuttujiin eli y_t :n komponentteihin.
- Kerroinmatriisien A_1, \dots, A_p alkioiden tulkinnallinen hyöty on kuitenkin varsin rajallinen.
- Yleensä kiinnostavat muuttujien väliset dynaamiset vaikutukset.
 - Esimerkiksi, miten y_{1t} :ssä tapahtuva muutos vaikuttaa kaikkien y_t :n komponenttien tulevaan kehitykseen.
- Tällaisten dynaamisten vaikutuksien selvittäminen suoraan kerroinmatriisien A_1, \dots, A_p alkioiden avulla on hankalaa.

Stationaariset prosessit

VAR(p)-prosessi: Impulssivasteet

- VAR(p)-mallin vaihtoehtoinen tulkinta perustuu lineaariseen esitykseen

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \varepsilon_{t-j} \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \Omega).$$

- Tässä virhetermin ε_t komponentit tulkitaan prosessiin y_t vaikuttaviksi impulsseiksi tai sokeiksi.
- Kysymys: Miten yhden yksikön kokoisen impulssin vaikutus ilmenee prosessin y_t komponenteissa ja niiden tulevissa arvoissa?
- Matriisin Ψ_j alkiot eli ns. *impulssivasteet* kuvaavat ajankohtana t_0 tapahtuneen impulssin vaikutusta y_t :n komponenttien saamiin arvoihin ajankohtana $t_0 + j$.