

## HARJOITUS 4

## MALLIRATKAISUT

Seuraavissa kolmessa tehtävässä aineistona käytetään lääkeyhtiö Lydia E. Pinkhamin valmistamien tuotteen myyntituloja ja mainoskuluja. Vuosiaineisto on peräisin ajalta 1907–1960 (luvut ovat 1000 dollareita). Aineistoa on käsitelty harjoituksissa 2 ja 3 ja kolme ensimmäistä tehtävää jatkavat sen harjoituksen pohjalta.

**1.** Tutkitaan ensin valitun VAR(3)-mallin diagnostiikkaa. Kuvassa 1 on esitetty residuaalisarjojen aikasarjakuvat ja Kuvissa 2 ja 3 residuaalien otosautoristikorrelaatiot ja otosristikorrelaatiot sekä näiden neliöidyt vastineet. Silmämääräisesti vaikuttaa siltä, että VAR(3)-malli pystyy selittämään aikasarjojen dynamiikan. Residuaalisarjoissa ei näytä olevan selviä systemaattisia piirteitä eikä niissä tai niiden neliöissä havaita juurikaan korrelaatiota.

Kuvioiden lisäksi tarkastellaan residuaalien korreloituneisuutta Portmanteau-testin avulla. Testisuure  $Q_{16}^* = 55.26$  ja tätä vastaava p-arvo on 0.35 eli näyttöä residuaalien korreloitumattomuutta vastaan ei havaita. Tässä testisuure noudattaa siis  $\chi^2$ -jakaumaa vapausasteilla  $2^2(16 - 3) = 52$ .

Virheiden ehdollista heteroskedastisuutta voidaan testata Lagrangen kerroin testillä (eli pistemäärätestillä), jossa vaihtoehtona on moniulotteinen ARCH( $q$ )-malli. Tässä mallin aste  $q$  on valittava samaan tapaan kuin Portmanteau-testissä (testi ei kuitenkaan vaadi, että  $q$  on ”suuri”). Valinnoilla  $q = 1, 3$  ja  $8$  saadaan testisuureen arvot 17.50, 30.47 ja 61.17. Testien p-arvot saadaan testisuureen asympotoottisesta  $\chi_{q(2^2(2+1)/4)}^2$ -jakaumasta ja ne ovat 0.04, 0.29 ja 0.81. Näistä ensimmäinen ( $q = 1$ ) viittaa ehdolliseen heteroskedastisuuteen tai yleisemmin jonkinlaiseen (epälineaariseen) riippuvuuteen. Valinnoilla  $q = 3$  ja  $q = 8$  p-arvot ovat kuitenkin suuria (mikä voi johtua siitä, että havaintomäärän ollessa pieni ja tarkasteltavan vaihtoehtoisen hypoteesin varsin laaja on testin voima heikko).

Koska (ainakin teoriassa) virhetermin on oletettu noudattavan normaalijakaumaa, tarkastellaan tämän oletuksen realistisuutta vielä kvantiili-kvantiili –kuvion avulla. Kuvasta 4 havaitaan, jakauman hännissä residuaalien jakauma poikkeaa hieman normaalijakaumasta.

**2.** Seuraavaksi tarkastellaan Grangerin kausaalisuutta. Katsomalla edellisten harjoi-

tusten estimoitua yhtälöä ja luentomonisteen jaksoa 4.5 voisi olettaa, että Grangerin kausaalisuutta ilmenee myyntituloista mainoskuluihin, mutta ei toisinpäin. Estimoitu yhtälö on (ks. HT 3.1(i))

$$\begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 215.87 \\ (100.48) \\ -64.42 \\ (80.59) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.37 & -0.16 \\ (0.17) & (0.18) \\ 0.59 & 0.52 \\ (0.14) & (0.14) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.31 & -0.28 \\ (0.27) & (0.21) \\ -0.54 & -0.34 \\ (0.21) & (0.16) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,t-2} \\ y_{2,t-2} \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 0.00 & 0.10 \\ (0.18) & (0.19) \\ 0.26 & 0.27 \\ (0.15) & (0.15) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,t-3} \\ y_{2,t-3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_{1t} \\ \hat{\varepsilon}_{2t} \end{bmatrix}.$$

Luentomonisteesta hieman poiketen R:n koodissa testisuureen jakaumaa approksimoidaan F-jakaumalla, joka on ”suurilla” havaintomäärillä lähellä monisteessa mainittua  $\chi^2$ -jakamaa (tarkemman tiedon voi katsoa R:n ohjeesta).

Nollahypoteesi testille on, että Grangerin kausaalisuus suuntaan  $y_i \rightarrow y_j$  ei päde eli  $y_i \not\rightarrow y_j$ . Testisuureen p-arvo on pienempi kuin 0.001, kun nollahypoteesina on  $y_{\text{myynti}} \rightarrow y_{\text{mainonta}}$ . Nollahypoteesi tulee siten selvästi hylätyksi. Vastaavasti havaitaan, että näyttöä nollahypoteesia  $y_{\text{mainonta}} \rightarrow y_{\text{myynti}}$  vastaan ei vaikuta olevan, sillä p-arvo on 0.15.

Testin pätevyys vaatii virheiden iid-oletuksen, joka vaikutti kohtuullisen realistiselta, joskin jonkin verran viitteitä ehdollisesta heteroskedastisuudesta tai jonkinlaisesta (epälineaarista) riippuvuudesta saatiin. Testituloksia voidaan kuitenkin pitää suuntaa antavia.

**3.** Tässä tehtävässä estimoidaan impulssivastefunktiot aikasarjoille. Impulssivasteissa tarkastellaan, miten sokki jossakin virhetermissä vaikuttaa aikasarjoihin. Edellisessä tehtävässä havaittiin, että Granger kausaalisuutta on myynnistä mainontaan. *Oletetaan*, että samanaikainen vaikutus ilmenee samalla tavalla eli myynnistä mainontaan, jolloin sokki myyntiin vaikuttaa välittömästi molempiin sarjoihin, mutta sokki mainoskuluihin vaikuttaa myyntiin vasta viiveellä. Tällöin monisteen s. 42 oleva Choleskyn hajotelmaan perustuva muunnosmatriisi  $C$  valitaan alakolmiomatriisiksi. (Tämä on oletuksena R-koodissa, joten jos haluttaisiin käyttää yläkolmiomatriisia täytyy muuttujien järjestys vaihtaa.)

Kuviossa 5 on piirretty estimoidut impulssivastefunktiot 20 vuotta eteenpäin. Kuvassa on myös eräällä bootstrap-menetelmällä lasketut luottamusvälit. Kuvioista nähdään monisteen sivulla 41 todettu (stationaarisuudesta seuraava) tulos sokkien vaikutuksen häviämisestä ajan kuluessa.

Kuvion 5 ensimmäisestä kuvasta havaitaan, että yhden yksikön (positiivinen) sokki myynnin yhtälön virhetermissä aiheuttaa positiivisen vaikutuksen myyntiin jopa neljä vuotta eteenpäin. Matriisin  $C$  valinnasta seuraa myös, että sokki vaikuttaa mainoskuluihin hetkellä  $t = 0$  eli samana vuonna, kun sokki iskee. Tällä vaikuttaa olevan positiivinen vaikutus mainoskuluihin myös 5-6 vuotta eteenpäin.

Kuvion 5 toisesta kuvasta voidaan havaita matriisin  $C$  rakenteen vaikutus, sillä sokilla mainoskulumien yhtälöön ei ole mitään vaikutusta myyntituloihin hetkellä  $t = 0$ . Muutoin saadaan (ainakin markkinoinnin mielessä) outo tulos, että mainostamisen äkillinen lisääminen vain vähentää myyntituloja. Tosin luottamusvälejä tarkastelemalla tämä ei ole tilastollisesti merkitsevää. Myöskään itse mainostaminen ei kasva kuin vain seuraavana vuonna. (Kuvia on tässä tulkittu ”kirjaimellisesti”.)

Lopuksi Kuvassa 6 on esitetty (ortogonaaliset) kumulatiiviset impulssivasteet. Ne kertovat, mikä on sokin kokonaisvaikutus yli tarkastellun aikaperiodin. Havaitaan, että myyntiin vaikuttavalla sokilla on pysyviä positiivisia vaikutuksia niin myyntituloihin kuin mainoskuluihin. Toisaalta mainoskuluihin vaikuttavalla sokilla ei ole tilastollisesti merkitseviä vaikutuksia mainoskuluihin eikä juuri myöskään myyntituloihin.

Tutkitaan seuraavaksi harjoituksissa 2 ja 3 tarkasteltua aineistoa, joka koostuu Saksalaisten yritysten liiketoiminnan odotuksia kuvaavasta indeksistä ja Saksassa tuotettujen tavaroiden määrää kuvaavan indeksin muutoksista ajanjaksolta 1991I-2007XII. Mallinvalintakriteerien ja uskottavuusosamäärätestien perusteella VAR(3)-malli tuntui sopivalta kuvaukselta tälle aineistolle.

4. Tutkitaan ensin valitun VAR(3)-mallin diagnostiikkaa. Kuvassa 7 on residuaalien aikasarja. Kuvissa 8 ja 9 residuaalien sekä niiden neliöiden otosautoristikorrelaatiot ja otosristikorrelaatiot. Residuaalit eivät vaikuta autokorreloituneilta eivätkä ristikorreloituneilta. Sen sijaan neliöidyissä residuaaleissa on havaittavissa heikkoa autokorrelaatiota. Portmanteau-testi residuaalien korreloituneisuudelle saa arvon  $Q_{16}^* = 40.95$  p-arvon ollessa 0.87, joten näyttöä korreloituneisuudesta ei havaita. Moniulotteiseen ARCH(q)-malliin perustuva Lagrangen kerroin -testi residuaalien neliöiden korreloituneisuudelle saa valinnoilla  $q = 1$  ja  $q = 3$  arvot 19.71 ja 41.14. Vastaavat p-arvot 0.020 ja 0.040 viittaavat jonkin asteiseen ehdolliseen heteroskedastisuuteen tai (epälineaariseen) riippuvuuteen.

Kuvassa 10 olevien kvantiili-kvantiili -kuvien perusteella residuaalien normaalisuusoletusta voidaan pitää ainakin jossain määrin kyseenalaisena.

5. Harjoituksessa 3.3 valitun VAR(3)-mallin estimointi tuotti tulokseksi

$$\begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.91 \\ (2.36) \\ -8.43 \\ (1.87) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.20 & 0.08 \\ (0.07) & (0.09) \\ 0.15 & -0.48 \\ (0.05) & (0.07) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.07 & 0.20 \\ (0.11) & (0.10) \\ -0.03 & 0.26 \\ (0.09) & (0.08) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,t-2} \\ y_{2,t-2} \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} -0.25 & 0.20 \\ (0.07) & (0.09) \\ -0.03 & 0.06 \\ (0.05) & (0.07) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,t-3} \\ y_{2,t-3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_{1t} \\ \hat{\varepsilon}_{2t} \end{bmatrix}.$$

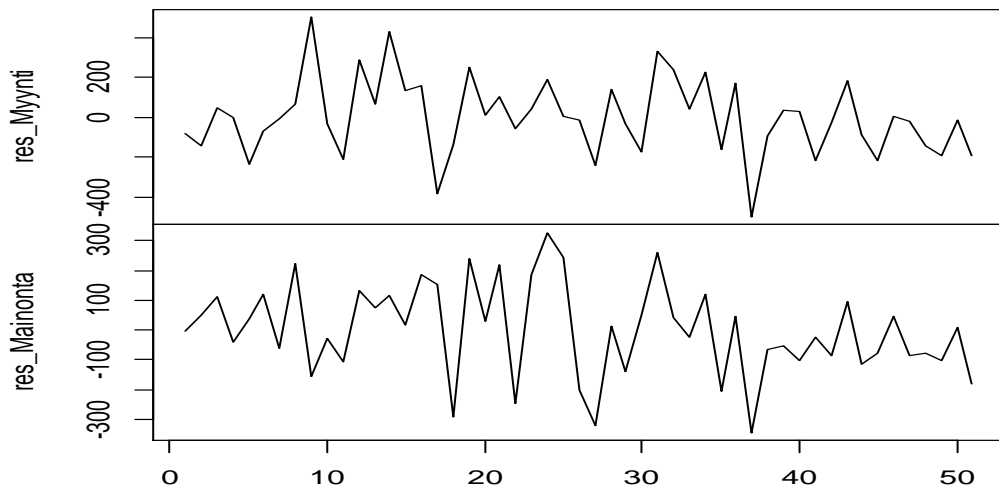
Estimointituloksia katsomalla ei ole helppoa löytää selviä viitteitä Grangerin kausaalisuudesta. Formaalisissa testauksessa hypoteesi  $y_{\text{odotukset}} \rightarrow y_{\text{tuotanto}}$  hylätään testin p-arvon ollessa pienempi kuin 0.001. Sen sijaan hypoteesia  $y_{\text{tuotanto}} \rightarrow y_{\text{odotukset}}$  vastaan ei löydy vahvaa näyttöä, sillä testin p-arvo on 0.098.

Grangerin kausaalisuustestit viittaavat siihen, että korkeat odotukset tulevasta talouden tilasta saivat tuotannon kasvamaan keskimääräistä vauhdikkaammin, mutta tuotannon keskimääräistä ripeämpi kasvuvauhti ei näyttäisi vaikuttavan yritysten tulevaisuuden odotuksiin. Testituloksiin on kuitenkin suhtautua varauksin, sillä residuaalien tarkastelu antoi viitteitä neliöityjen virhetermien korreloituneisuudesta, jolloin testin kannalta olennainen virhetermien iid-oletus ei ole voimassa ja testeissä käytetty asymp-toottinen jakauma voi olla virheellinen.

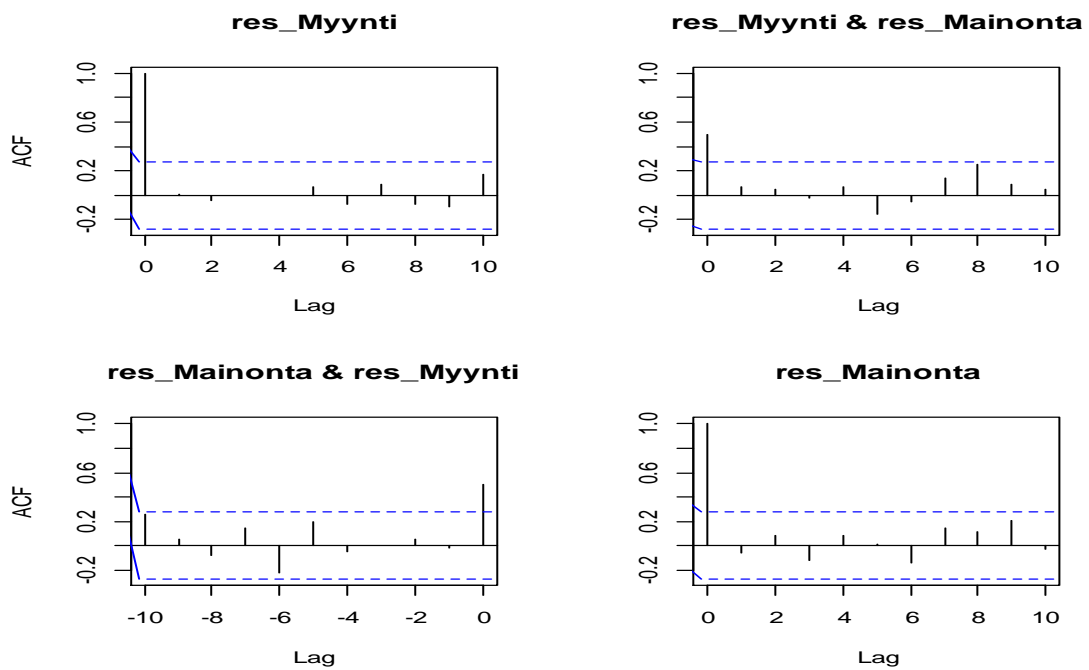
6. Tutkitaan vielä odotusten ja tuotannon kasvun välistä yhteyttä impulssivasteanalyysin avulla. Kuten edellisessä kohdassa saatiin näyttöä Grangerin kausaalisuudesta odotuksista tuotantoon. Jos jälleen *oletetaan*, että samanaikainen vaikutus ilmenee samalla tavalla ja käytetään ortogonaalisia impulssivasteita, valitaan muunnosmatriisi  $C$  alakolmiomatriisiksi. Tämän voisi tulkita niin, että kuluttajien luotto tulevaisuuteen ajankohtana  $t$  saa kysynnän kasvamaan heti ja sitä kautta tuotannon lisääntymään. Sen sijaan tuotannon lisääntyminen ajankohtana  $t$  havaitaan vasta viiveellä, joten mahdollinen vaikutus tulevaisuuden näkyymiin ilmenee vasta myöhemmin.

Ortogonaaliset impulssivasteet on piirretty Kuvaan 11, josta havaitaan, että odotuksiin kohdistuva sokki saa odotukset pysyttelemään korkealla pitkän aikaa, noin vuoden verran, kun taas sokin (heikko) vaikutus tuotantoon ei näytä tilastollisesti merkitsevältä. Positiivista tuotantosokkia taas näyttäisi seuraavan keskimääräistä hitaamman kasvun kuukausi, minkä jälkeen sokki tasoittuu hyvin nopeasti. Matriisin  $C$  muotoilusta johtuen tuotantosokki vaikuttaa vasta viiveellä odotuksiin. Odotukset näyttäisivät nousevan ja pysyttelevän korkeammalla tasolla pitkänkin aikaa, mutta vaikutus on vain hädin tuskin tilastollisesti merkitsevä.

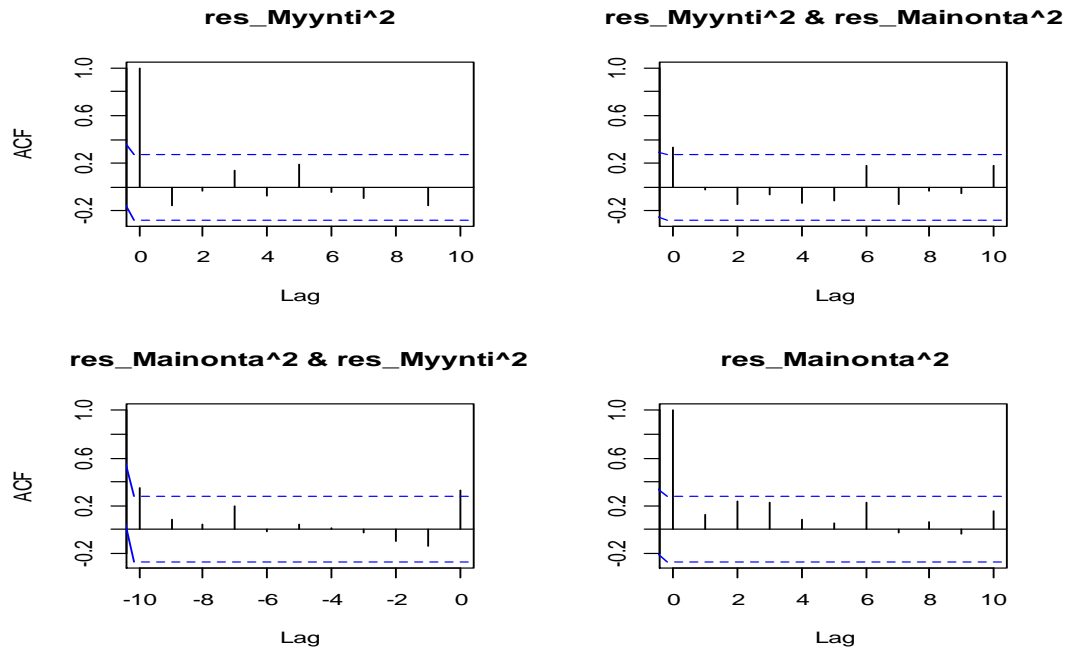
Kuvassa 12 on ortogonaaliset kumulatiiviset impulssivasteet. Odotuksiin kohdistuva positiivinen sokki vaikuttaa odotuksiin positiivisesti yli ajan. Myös tuotanto vaikuttaisi kasvavan hieman, vaikka vaikutus onkin hädän tuskin tilastollisesti merkitsevä. Positiivinen tuotantosokki saa tuotannon lisääntymään yli ajan. Se saa myös odotukset paranemaan selvästi tilastollisesti merkitsevästi.



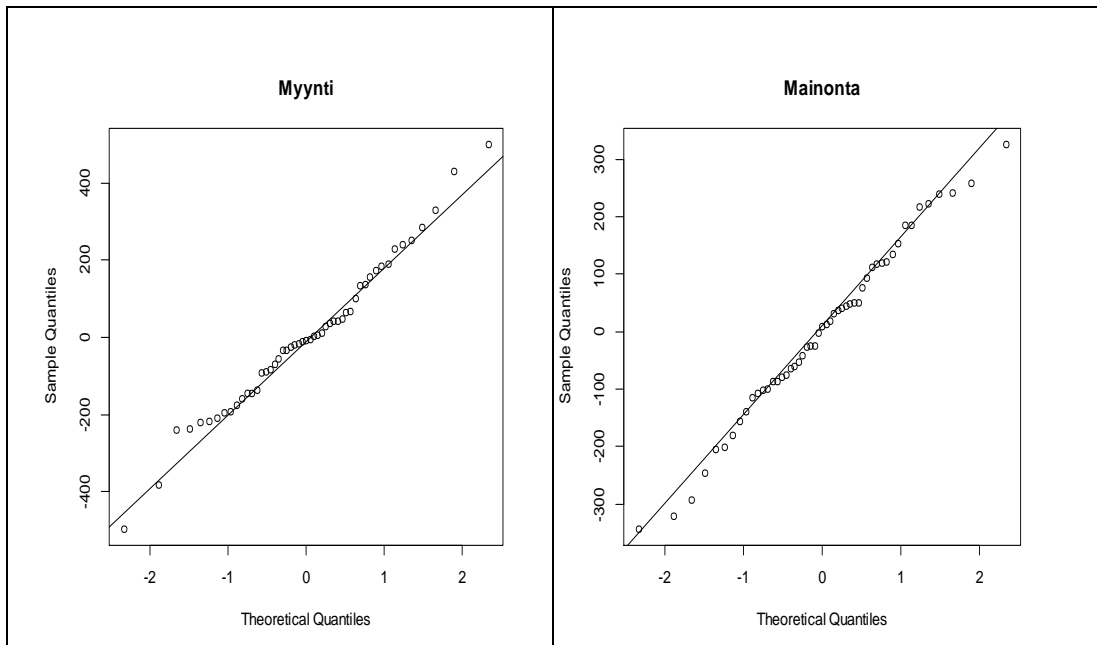
Kuva 1. Lydia E. Pinkahm aineistoon sovitetun VAR(3)-mallin residuaalien aikasarjat



Kuva 2. Lydia E. Pinkahm aineistoon sovitetun VAR(3)-mallin residuaalien otosauto- ja otosristikorrelaatiofunktiot

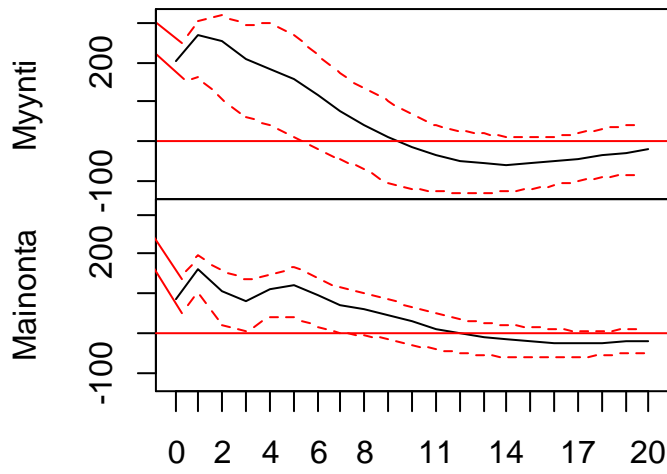


Kuva 3. Lydia E. Pinkahm aineistoon sovitetun VAR(3)-mallin neliöityjen residuaalien otosauto- ja otosristikorrelaatiofunktiot



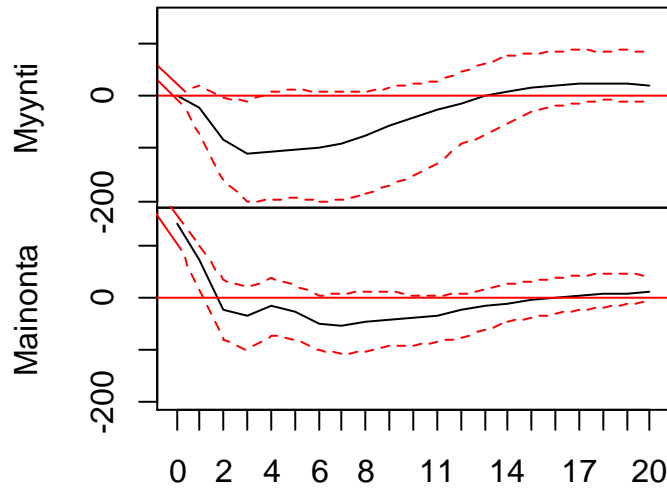
Kuva 4. Lydia E. Pinkahm aineistoon sovitetun VAR(3)-mallin residuaalien kvantiili-kvantiili -kuvat.

### Orthogonal Impulse Response from Myynti



95 % Bootstrap CI, 100 runs

### Orthogonal Impulse Response from Mainonta

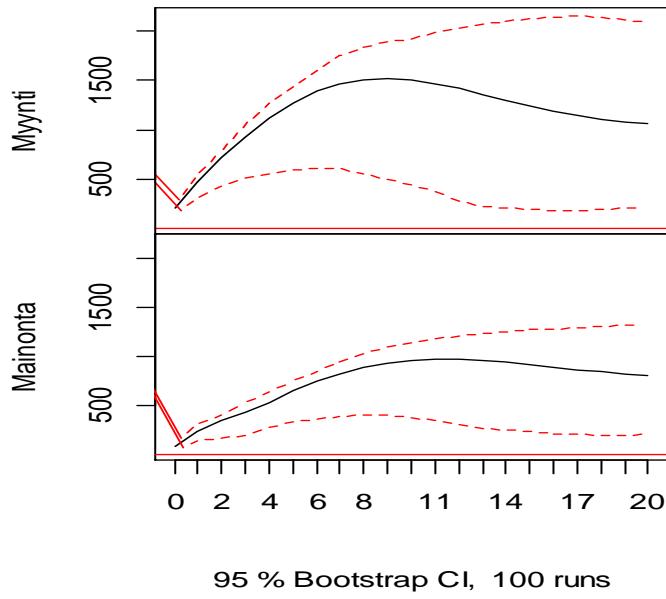


95 % Bootstrap CI, 100 runs

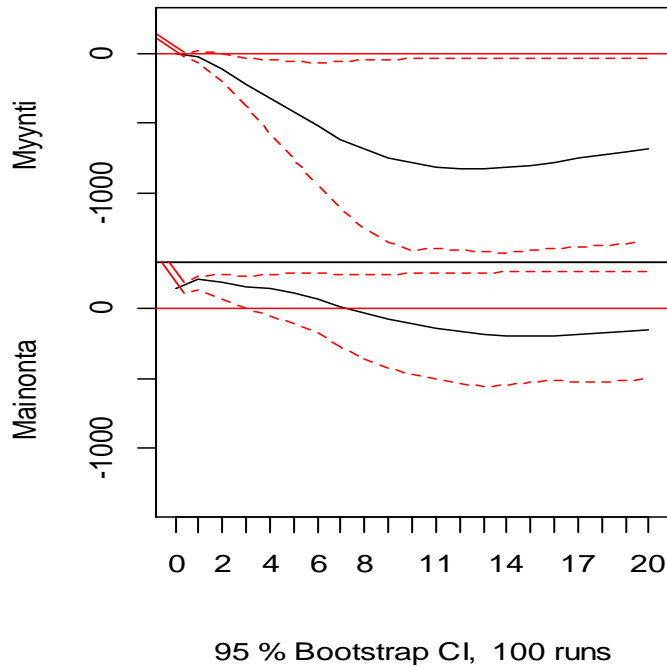
Kuva 5. Lydia E. Pinkahm aineistoon sovitetun VAR(3)-mallin ortogonaaliset impulssivasteet



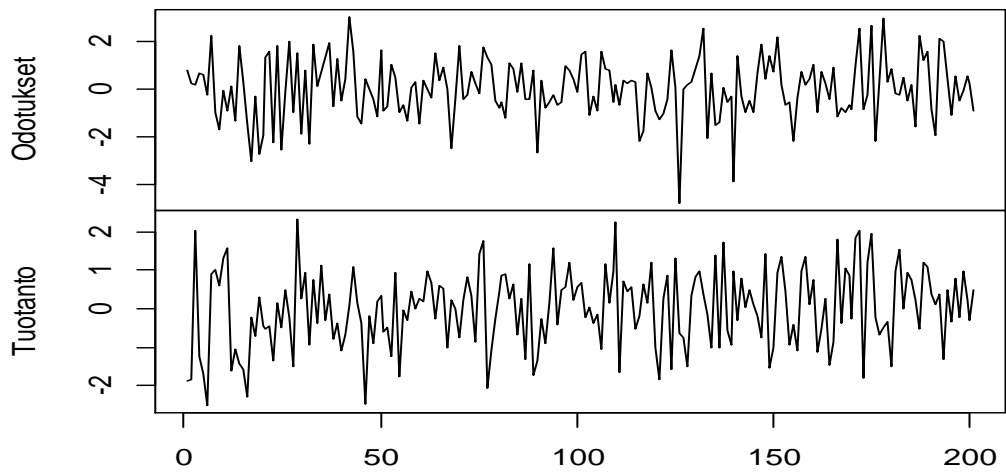
Orthogonal Impulse Response from Myynti (cumulative)



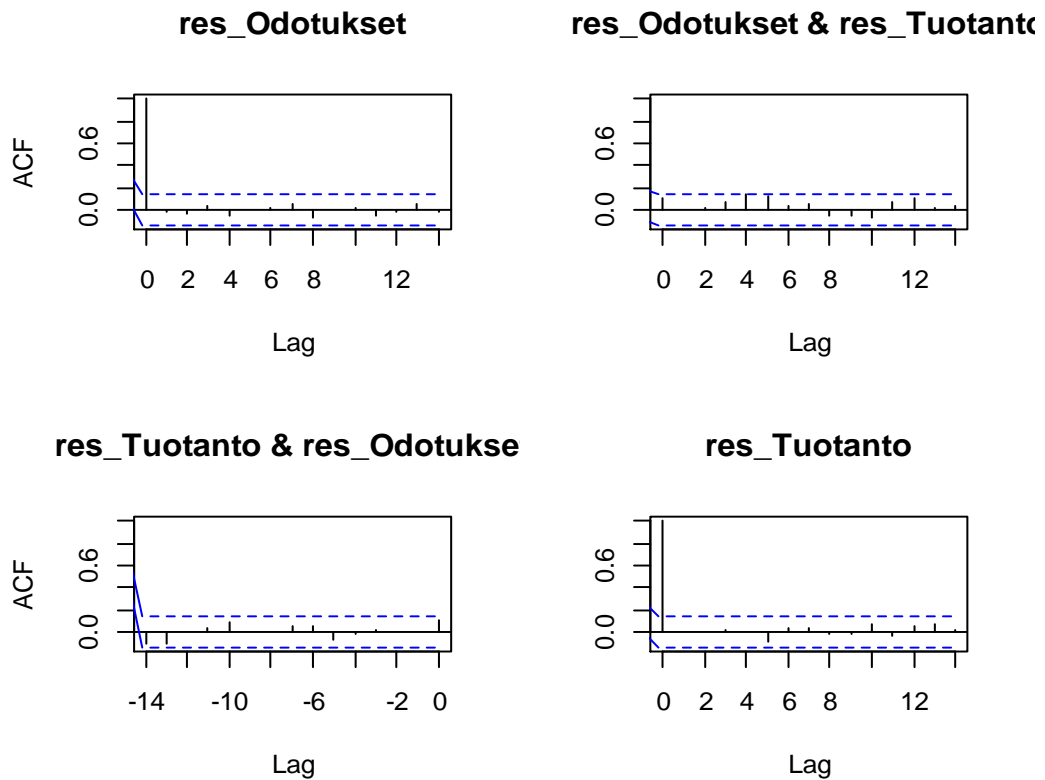
Orthogonal Impulse Response from Mainonta (cumulative)



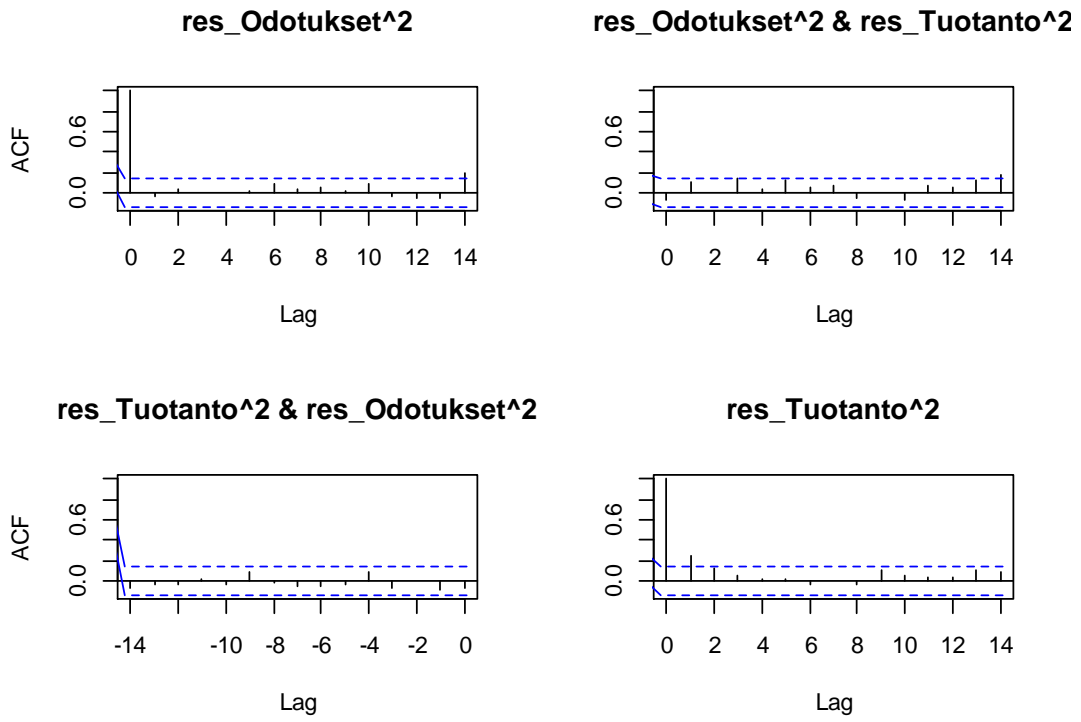
Kuva 6. Lydia E. Pinkahm aineistoon sovitetun VAR(3)-mallin kumulatiiviset ortogonaaliset impulssivasteet



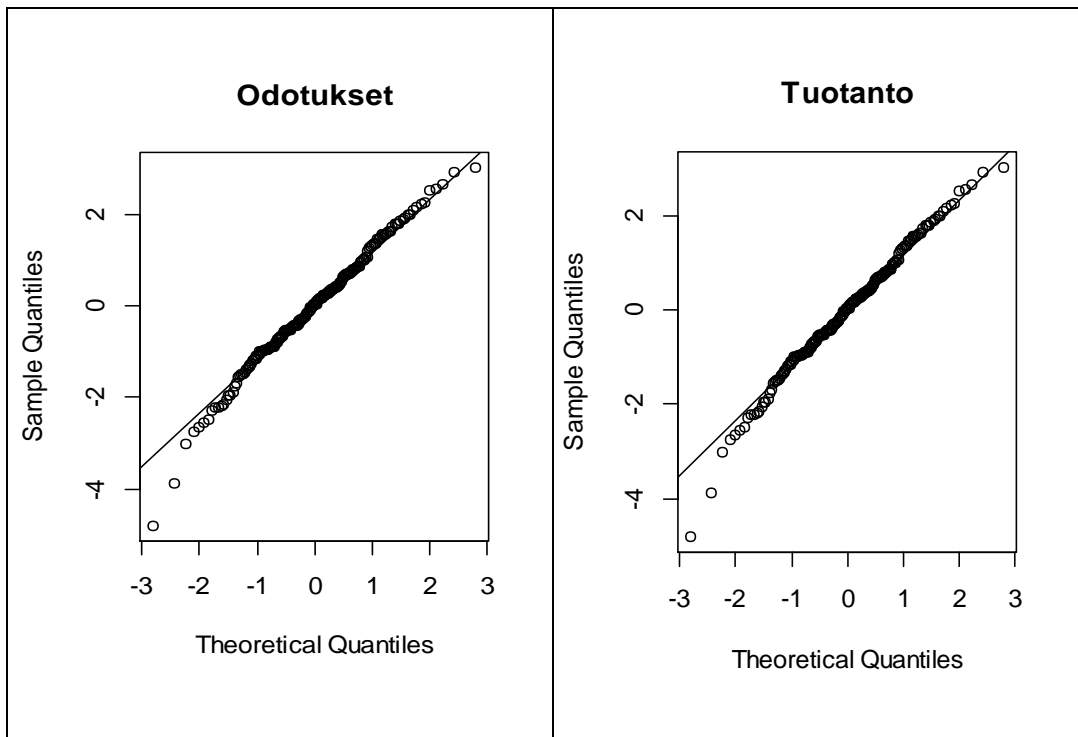
Kuva 7: Odotuksia ja tuotantoa kuvaavaan sarjaan sovitetun VAR(3)-mallin residuaalien aikasarjat



Kuva 8: Odotuksia ja tuotantoa kuvaavaan sarjaan sovitetun VAR(3)-mallin residuaalien otosauto- ja otosristikorraatiofunktiot

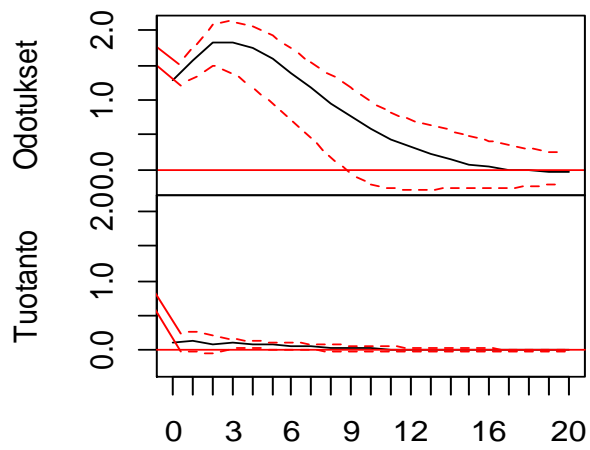


Kuva 9: Odotuksia ja tuotantoa kuvaavaan sarjaan sovitetun VAR(3)-mallin neliöityjen residuaalien otosauto- ja otosristikorraatiofunktiot



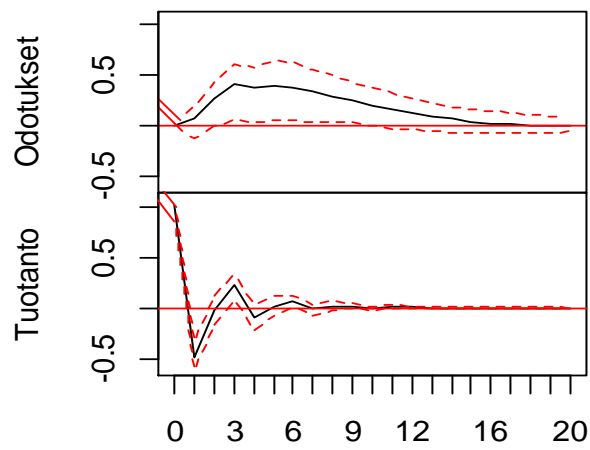
Kuva 10: Odotuksia ja tuotantoa kuvaavaan sarjaan sovitetun VAR(3)-mallin residuaalien kvantiili-kvantiili –kuvat

### Orthogonal Impulse Response from Odotukset



95 % Bootstrap CI, 100 runs

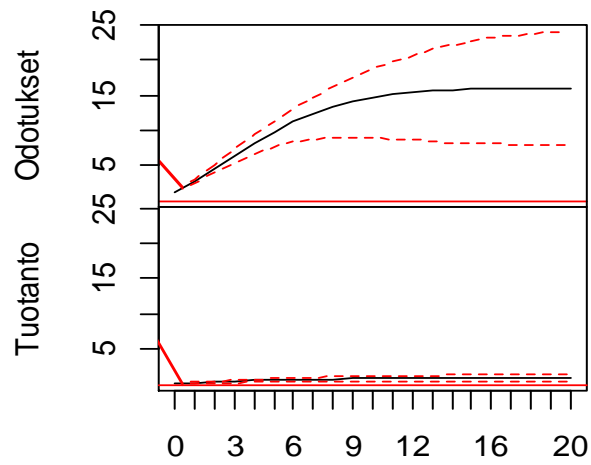
### Orthogonal Impulse Response from Tuotanto



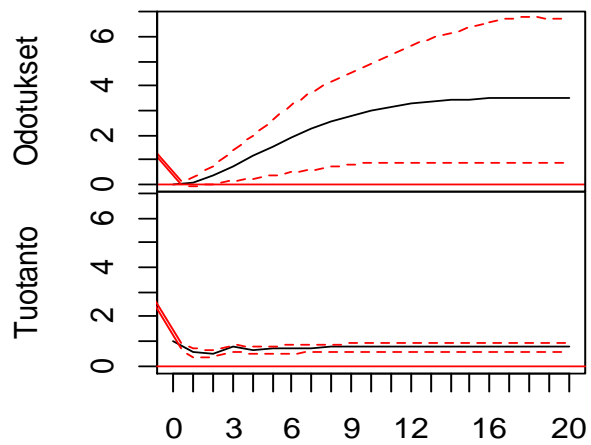
95 % Bootstrap CI, 100 runs

Kuva 11: Odotuksia ja tuotantoa kuvaavaan sarjaan sovitetun VAR(3)-mallin ortogonaalisten impulssivasteiden

Orthogonal Impulse Response from Odotukset (cumulative)



Orthogonal Impulse Response from Tuotanto (cumulative)



Kuva 12: Odotuksia ja tuotantoa kuvaavaan sarjaan sovitetun VAR(3)-mallin kumulatiiviset ortogonaaliset impulssivasteet