HARJOITUS 2 MALLIRATKAISUT

1. Tarkastellaan stationaarista VAR(1)-prosessia

$$\begin{bmatrix} z_t \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{t-1} \\ x_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \zeta_t \\ \xi_t \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \zeta_t \\ \xi_t \end{bmatrix} \sim \mathsf{iid}\,(0, \Omega)\,, \quad A_{12} = 0.$$

(i) Osoitettava, että z_t on stationaarinen VAR(1)-prosessi ja että

$$\mathsf{E}\,(z_{t+h} \mid z_s,\ s \leq t) = A_{11}^h z_t, \quad h \geq 1.$$

Oletuksen $A_{12} = 0$ ja prosessin määrittely-yhtälön nojalla

$$z_t = A_{11} z_{t-1} + \zeta_t,$$

jossa ζ_t on iid odotusarvona nolla. Siten z_t:n stationaarisuus seuraa, jos matriisin A_{11} ominaisarvot ovat itseisarvoltaan ykköstä pienempiä (ks. luentomoniste, s. 8).

Merkitään

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

ja huomataan, että stationaarisuusoletuksen nojalla A:n ominaisarvot ovat itseisarvoltaan ykköstä pienempiä. Jos siis λ on A:n ominaisarvo, niin $|\lambda| < 1$ ja (ks. Liite A.2)

$$\begin{aligned} 0 &= \det\,(A - \lambda I_n) = \det \left(\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda I & 0 \\ 0 & \lambda I \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} A_{11} - \lambda I & 0 \\ A_{21} & A_{22} - \lambda I \end{bmatrix} \right) \\ &= \det\,(A_{11} - \lambda I) \det\,(A_{22} - \lambda I)\,. \end{aligned}$$

Tässä viimeinen yhtälö seuraa ositetun matriisin determinantin laskukaavasta (ks. Liite A.5). Näin ollen, λ on myös matriisin A_{11} ominaisarvo ja toteuttaa $|\lambda| < 1$.

Osoitetaan nyt, että

$$\mathsf{E}\left(z_{t+h} \mid z_s,\ s \leq t\right) = A_{11}^h z_t, \quad h \geq 1.$$

Yhtälöstä $z_t = A_{11} z_{t-1} + \zeta_t$ saadaan edellä todetun perusteella (ks. luentomonisteen s. 14 ja ehdollisen odotusarvon ominaisuus EO4 Liitteessä A.6)

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left(z_{t+1} \mid z_s,\ s \leq t\right) &= A_{11}\mathsf{E}\left(z_t \mid z_s,\ s \leq t\right) = A_{11} z_t \\
\mathsf{E}\left(z_{t+2} \mid z_s,\ s \leq t\right) &= A_{11}\mathsf{E}\left(z_{t+1} \mid z_s,\ s \leq t\right) = A_{11}^2 z_t \\
\mathsf{E}\left(z_{t+3} \mid z_s,\ s \leq t\right) &= A_{11}\mathsf{E}\left(z_{t+2} \mid z_s,\ s \leq t\right) = A_{11}^3 z_t \\
&\vdots \\
\mathsf{E}\left(z_{t+h} \mid z_s,\ s \leq t\right) &= A_{11}^h z_t.
\end{aligned}$$

(ii) Osoitettava, että

$$\mathsf{E}\left(z_{t+h} \mid y_s,\ s \leq t\right) = A_{11}^h z_t, \quad h \geq 1,$$

jossa $y_s = (z_s, x_s)$. Prosessin määrittely-yhtälöstä seuraa

$$\left(\zeta_{t+h}, \xi_{t+h}\right) \perp\!\!\!\perp \left(y_s,\ s \leq t\right) \Rightarrow \zeta_{t+h} \perp\!\!\!\perp \left(y_s,\ s \leq t\right), \quad h \geq 1,$$

ja siten (ks. ehdollisen odotusarvon ominaisuus EO2 Liitteessä A.6)

$$\mathsf{E}\left(\zeta_{t+h} \mid y_s,\ s \leq t\right) = \mathsf{E}\left(\zeta_{t+h}\right) = 0.$$

Kuten kohdassa (i) saadaan yhtälöä $z_t = A_{11} z_{t-1} + \zeta_t$ käyttäen

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left(z_{t+1} \mid y_s,\ s \leq t\right) &= A_{11}\mathsf{E}\left(z_t \mid y_s,\ s \leq t\right) = A_{11} z_t \\
\mathsf{E}\left(z_{t+2} \mid y_s,\ s \leq t\right) &= A_{11}\mathsf{E}(z_{t+1} \mid y_s,\ s \leq t) = A_{11}^2 z_t \\
&\vdots \\
\mathsf{E}\left(z_{t+h} \mid y_s,\ s \leq t\right) &= A_{11}^h z_t.
\end{aligned}$$

2. Tarkastellaan stationaarisesta prosessista $y_t = (y_{1t}, y_{2t})$ saatua realisaatiota $y_1, ..., y_T$ ja oletetaan $y_{it} \sim \mathsf{iid}\left(\mu_i, \omega_i^2\right)$ $(i = 1, 2)$. Johdetaan ristikorrelaatioestimaattoreihin $r_{12,k}$, $k = -K, ..., K$ perustuva asymptoottisesti χ^2–jakautunut testi nollahypoteesille, jonka mukaan y_{1t} ja y_{2t} ovat riippumattomia iid-prosesseja eli $\{y_{1t}\} \perp\!\!\!\perp \{y_{2t}\}$.

Nollahypoteesin voimassa ollessa estimaattoreille $r_{12,k}$, $k = -K, ..., K$ pätee (ks. luentomoniste s. 20)

$$r_{12,-K}, ..., r_{12,K} \underset{as}{\sim} \mathsf{N}\left(0, 1/T\right) \quad \perp\!\!\!\perp$$

eli

$$r = (r_{12,-K}, ..., r_{12,K}) \underset{as}{\sim} \mathsf{N}\left(0, T^{-1} I_{2k+1}\right) \quad \text{tai} \quad \sqrt{T} r \underset{as}{\sim} \mathsf{N}\left(0, I_{2k+1}\right).$$

Nollahypoteesin voimassa ollessa pätee siten (vrt. $X'X = \sum_{i=1}^{m} X_i^2 \sim \chi_m^2$, kun $X = (X_1, ..., X_m) \sim \mathsf{N}(0, I_m)$; formaalimpi perustelu saadaan Liitteen B Lauseesta B2)

$$\left(\sqrt{T} r\right)' \left(\sqrt{T} r\right) = T \sum_{k=-K}^{K} r_{12,k}^2 \underset{as}{\sim} \chi_{2K+1}^2.$$

Näin määritellyn testisuuren likimääräiset p-arvot saadaan siten χ_{2K+1}^2–jakaumasta.

3. (i) Kuvaan 1 on piirretty lääkemyynnin sekä sen mainostamisesta seuranneiden kustannusten aikasarjat vuosilta 1907-1960. Kuvassa 2 on näiden aikasarjojen autokorrelaatiot sekä muuttujien väliset ristikorrelaatiot. Aikasarjoja voidaan otosristikorrelaatiokertoimien valossa pitää ristikorreloituneina.

Kuvaan piirretyt siniset katkoviivat ovat havaintojen otosauto- ja otosristikorrelaatiokertoimien (likimääräiset) 95 %:n kriittiset rajat $\left(\pm.96/\sqrt{T}\right)$ prosessia y_t koskevan iid-oletuksen ollessa voimassa. Koska kuvissa on selkeästi viitteitä komponenttisarjojen autokorreloituneisuudesta, iid-oletus ei ole realistinen eivätkä rajat ole oikeita ristikorrelaatioita tarkasteltaessa.

(ii) Kuvaan 3 on piirretty indeksi, joka kuvaa saksalaisten yritysten odotuksia talouden tilan muutoksesta. Alempi aikasarja kuvaa tuotannon kuukausittaista muutosta prosentteina. Kuvan 4 perusteella odotukset ovat vahvasti autokorreloituneita, mutta tuotannon muutoksissa ei ole havaittavissa vahvaa autokorreloituneisuutta. Ristikorrelaatio aikasarjojen välillä on heikkoa.

4. (i) Tehtävässä on tarkoitus tutkia myyntitulojen ja mainontamenojen välistä yhteyttä. Muuttujia kuvaaviin aikasarjoihin on sovitettu (riittäviksi todetut) yksiulotteiset AR(2)- ja AR(5)-mallit. Mallien estimoinnin jälkeen on laskettu mallien residuaalisarjat $\hat{\varepsilon}_{1t}$ ja $\hat{\varepsilon}_{2t}$. Kun AR-mallit on oikein valittu, toteuttavat mallien residuaalit likimain Tehtävän 1 komponenttiprosesseilta y_{1t} ja y_{2t} vaaditut iid-oletukset. Prosessin y_t ristikorreloituneisuuden testaaminen voidaan perustaa näihin residuaalisarjoihin ja niiden ristikorreloitunesisuuteen. Residuaaliaikasarjoja vastaavien teoreettisten virheiden ε_{1t} ja ε_{2t} ollessa toisistaan riippumattomia iid-prosesseja on residuaalisarjoista lasketuilla otosristikorrelaatioilla samat asymptoottiset ominaisuudet kuin Tehtävän 1 ratkaisussa.

Prosessin y_t ristikorreloituneisuuden tutkiminen voidaan siis perustaa residuaalisarjojen ristikorreloituneisuuden tutkimiseen, missä voidaan käyttää tulosta

$$\hat{r}_{12,-K}, ..., \hat{r}_{12,K} \underset{as}{\sim} \mathsf{N}(0, 1/T) \quad \underline{\|} \ ,$$

jossa $\hat{r}_{12,k}$ on residuaaliaikasarjoista $\hat{\varepsilon}_{1t}$ ja $\hat{\varepsilon}_{2t}$ laskettu ristikorrelaatiokerroin. Yksittäinen ristikorrelaatioestimaatti viittaa nollasta ristikorrelaation olemassaoloon, jos $|\hat{r}_{12,k}|$ ylittää valitun kriittisen rajan kuten

$$|\hat{r}_{12,k}| \geq 1.96/\sqrt{T} = 1.96/\sqrt{54} \approx 0.27.$$

Taulukosta

k	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
$\hat{r}_{12,k}$	0.18	-0.13	-0.01	0.13	-0.09	0.15	0.03	0.09	-0.05	0.41

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\hat{r}_{12,k}$	0.40	0.09	-0.14	0.03	0.18	-0.22	-0.15	-0.15	0.08	0.10	-0.24

havaitaan, että viipymillä $k = -1$ ja $k = 0$ on selvät ylitykset, mikä viittaa vahvasti ristikorrelaation olemassaoloon.

Tehtävän 1 testisuuretta

$$\left(\sqrt{T}\hat{r}\right)' \left(\sqrt{T}\hat{r}\right) = T \sum_{k=-K}^{K} \hat{r}_{12,k}^2 \underset{as}{\sim} \chi^2_{2K+1}$$

käytettäessä saadaan valinnoilla $K = 2, 6, 8$ tulokseksi

K	2	4	8
Testisuuren arvo	19.35	27.11	29.59
p-arvo	< 0.01	0.01	0.03

eli vahvaa näyttöä ristikorrelaatiosta.

(ii) Tässä kohdassa on tarkoitus tutkia odotussarjan ja tuotannon muutossarjan välistä ristikorreloituneisuutta samalla tavalla kuin edellisessä kohdassa. Odotussarjalle sovitettiin AR(3)-malli ja tuotannon muutossarjalle ARMA(3,1)-malli. Residuaalien ristikorrelaatiot ovat

k	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
$\hat{r}_{12,k}$	0.08	0.02	-0.00	0.08	0.09	0.01	0.08	0.10	0.12	0.13

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\hat{r}_{12,k}$	0.07	0.02	0.11	0.12	0.06	0.13	0.04	0.03	-0.05	-0.03	0.11

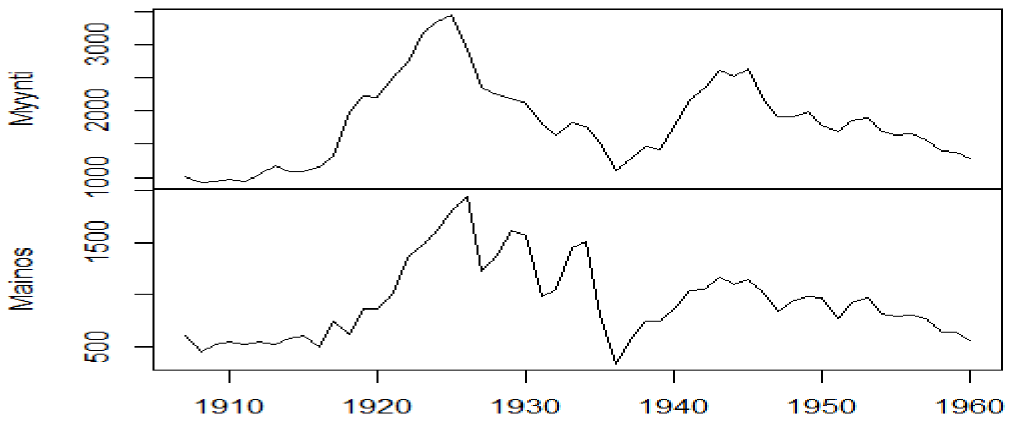
ja 95%:n kriittinen raja on

$$|\hat{r}_{12,k}| \geq 1.96/\sqrt{T} = 1.96/\sqrt{204} \approx 0.14.$$

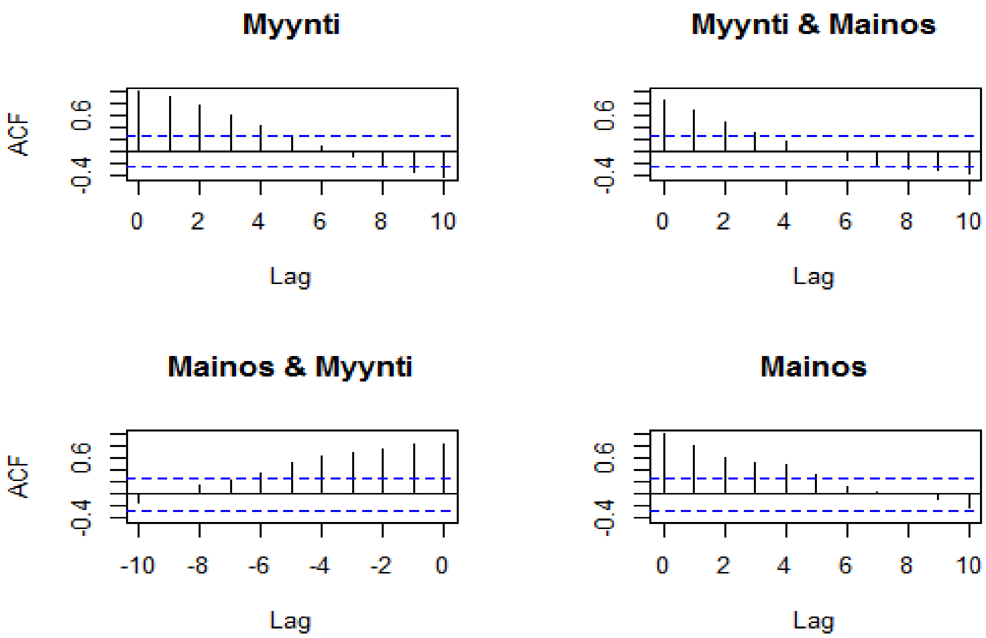
Tämä ylittyy lähes viipymillä $k = -1$ ja $k = 5$. Tehtävän 1 testisuuretta käytettäessä saadaan valinnoilla $K = 2, 6, 8$ tulokseksi

K	2	4	8
Testisuuren arvo	9.93	22.40	24.40
p-arvo	0.08	0.05	0.11

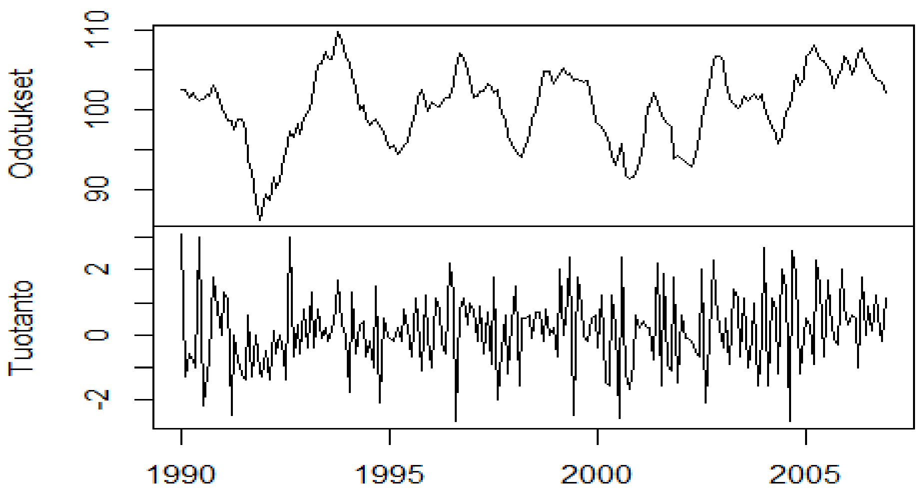
eli näyttöä ristikorrelaatiosta, joskaan ei kovin vahvaa.



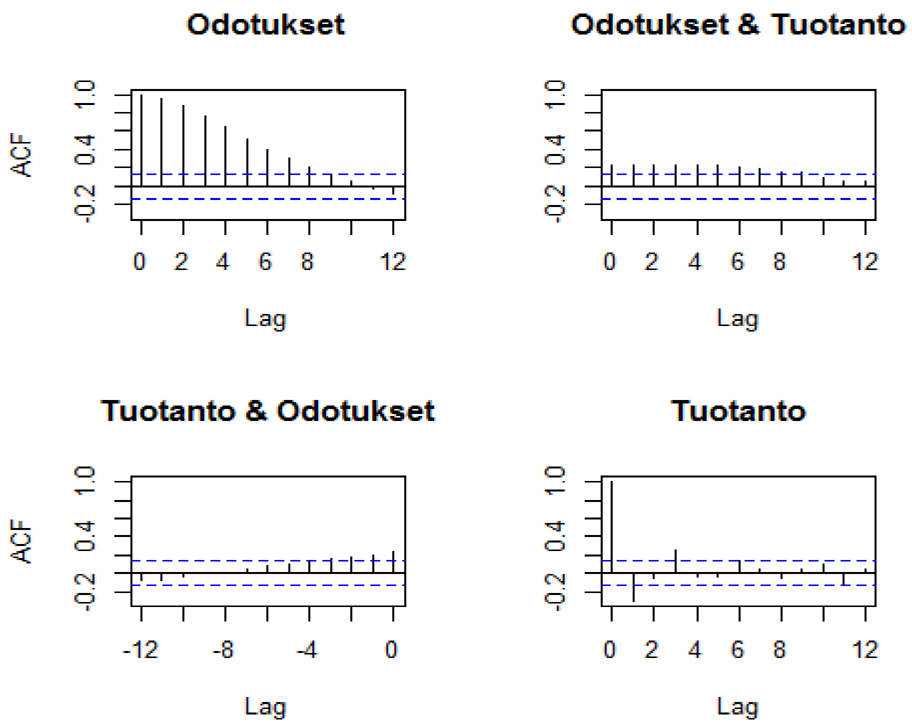
Kuva 1: Kuvassa on esitetty lääkeyhtiön valmistaman lääkkeen myynti (1000 $, ylempi kuva) ja lääkeyhtiön lääkkeen mainostamiseen käyttämät kulut (1000 $, alempi kuva.)



Kuva 2: Kuvassa on lääkemyynnin ja siihen käytettyjen mainoskulujen autokorrelaatiot sekä muuttujien väliset ristikorrelaatiot.



Kuva 3: Saksalaisten yritysten näkemystä talouden tilasta kuvaava aikasarja (ylhäällä) ja tuotannon muutosta kuvaava aikasarja (alhaalla).



Kuva 4: Yritysten odotuksia kuvaavan indeksin ja tuotannon muutoksen autokorrelaatiot ja niiden väliset ristikorrelaatiot.