HARJOITUS 1 MALLIRATKAISUT

1. Matriisin $A = [a_{ij}]$ $(n \times m)$ normi $||A||$ määritellään $||A|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2}$.
(i) Osoitetaan, että $\max|a_{ij}| \leq ||A|| \leq \sqrt{nm}\max|a_{ij}|$, jossa $i = 1, ..., n$ ja $j = 1, ..., m$. Valitaan kokonaisluvut g ja h siten, että $\max|a_{ij}| = |a_{gh}|$. Tällöin suoralla laskulla

$$\max|a_{ij}| = \sqrt{a_{gh}^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2} = ||A|| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{gh}^2} = \sqrt{nm\, a_{gh}^2} = \sqrt{nm}\,|a_{gh}| = \sqrt{nm}\max|a_{ij}|.$$

(ii) Todetaan, että $A_N = [a_{ij,N}] \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} [a_{ij}] = A$ on yhtäpitävää tuloksen $||A_N - A|| \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$ kanssa. Kohdan (i) perusteella

$$\max|a_{ij,N} - a_{ij}| \leq ||A_N - A|| \leq \sqrt{nm}\max|a_{ij,N} - a_{ij}|.$$

Väittetty yhtäpitävyys seuraa suoraan tästä. Jos $||A_N - A|| \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$, nähdään $\max|a_{ij,N} - a_{ij}| \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$ majoranttiperiaatteen avulla ja siten $a_{ij,N} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} a_{ij}$ kaikilla i, j. Toisaalta siitä, että $a_{ij,N} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} a_{ij}$ kaikilla i, j seuraa $\sqrt{nm}\max|a_{ij,N} - a_{ij}| \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$ ja $||A_N - A|| \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$ majoranttiperiaatteen nojalla.

2. Oletetaan, että $n \times n$ neliömatriisin A ominaisarvot $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ovat erisuuria ja $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$. Yhtä ominaisarvoa vastaa yhtälö $Ap_i = \lambda_i p_i$, missä p_i on ominaisarvoa λ_i vastaava ominaisvektori. Muodostetaan näistä $(n \times n)$ matriisi P siten, että $P = [p_1 : \ldots : p_n]$ $(n \times n)$. Ominaisarvojen erisuuruudesta seuraa, että matriisin P sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomat. Täten $\det P \neq 0$, jolloin myös käänteismatriisi P^{-1} on olemassa.

Edellä esitetystä seuraa, että neliömatriisin A ominaisarvot toteuttavat yhtälön

$$AP = P\Lambda, \tag{1}$$

mistä saadaan

$$\begin{aligned} APP^{-1} &= P\Lambda P^{-1} \\ A &= P\Lambda P^{-1}. \end{aligned}$$

Osoitetaan seuraavaksi, että $A^N = P\Lambda^N P^{-1}$, jossa $N = 1, 2, ...$ Valinnalla $N = 1$ saadaan yhtälö (1). Olkoon nyt $N = k$, $k \geq 1$, ja tehdään induktio-oletus

$$A^k = P\Lambda^k P^{-1}$$

ja lasketaan

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k A \\ &= (P\Lambda^k P^{-1})(P\Lambda P^{-1}) \\ &= P\Lambda^k \Lambda P^{-1} \\ &= P\,\mathrm{diag}[\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k]\,\mathrm{diag}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n] P^{-1} \\ &= P\,\mathrm{diag}[\lambda_1^{k+1}, \ldots, \lambda_n^{k+1}]\, P^{-1} \\ &= P\Lambda^{k+1} P^{-1}. \end{aligned}$$

Väite pätee siis myös valinnalla $N = k+1$. Näin ollen väite pätee kaikilla $N = 1, 2, \ldots$.

3. A on $n \times n$ matriisi kuten edellisessä tehtävässä ja A:n (erisuurille) ominaisarvoille $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ pätee $|\lambda_i| < 1, i = 1, \ldots, n$. Osoitetaan, että A^N:n alkioille pätee $\left|[A^N]_{ij}\right| \leq Cr^N$, $C < \infty$ ja $r < 1$, jolloin A^N konvergoi geometrisesti nollaan.

Olkoon $\Lambda = \mathrm{diag}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ kuten edellisessä tehtävässä ja valitaan kaikista ominaisarvoista itseisarvoltaan suurin: $\rho = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| < 1$. Tällöin,

$$\begin{aligned} \left|[A^N]_{ij}\right| \leq ||A^N|| =& ||P\Lambda^N P^{-1}|| \leq ||P||\,||P^{-1}||\,||\Lambda^N|| = ||P||\,||P^{-1}|| \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^{2N}} \\ \leq& ||P||\,||P^{-1}||\,\sqrt{n\rho^{2N}} = ||P||\,||P^{-1}||\,\sqrt{n}\rho^N, \end{aligned}$$

jossa ensimmäinen epäyhtälö seuraa tehtävästä 1(i) ja toinen matriisinormin submultiplikatiivisuudesta ($||A_1 A_2|| \leq ||A_1||||A_2||$). Valitsemalla $C = ||P||\,||P^{-1}||\sqrt{n}$ ja $r = \rho$, saadaan haluttu tulos.

4. Tarkastellaan VAR(p)-prosessia

$$y_t = A_1 y_{t-1} + \ldots + A_p\, y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathsf{iid}(0, \Omega).$$

Luentojen s. 12 mukaisesti,

$$\Gamma'_k = A_1 \Gamma'_{k-1} + A_2 \Gamma'_{k-2} + \cdots + A_p\, \Gamma'_{k-p},$$

mistä saadaan valinnoilla $k = 1, .., p$ yhtälöt

$$\begin{aligned} \Gamma'_1 &= A_1 \Gamma'_0 + A_2 \Gamma'_{-1} + \ldots + A_p\, \Gamma'_{1-p}, \\ \Gamma'_2 &= A_1 \Gamma'_1 + A_2 \Gamma'_0 + \ldots + A_p\, \Gamma'_{2-p} \\ &\vdots \\ \Gamma'_p &= A_1 \Gamma'_{p-1} + A_2 \Gamma'_{p-2} + \ldots + A_p\, \Gamma'_0. \end{aligned}$$

Käyttäen ositettujen matriisien kertolaskukaavaa[1] nähdään, että nämä yhtälöt voidaan esittää matriisimuodossa

$$\begin{bmatrix} \Gamma_1' & \Gamma_2' & \dots & \Gamma_p' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_0' & \Gamma_1' & \dots & \Gamma_{p-1}' \\ \Gamma_{-1}' & \Gamma_0' & \dots & \Gamma_{p-2}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{1-p}' & \Gamma_{2-p}' & \dots & \Gamma_0' \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{merk.}}{\Leftrightarrow} \quad \Gamma = AG$$

Koska G voidaan osoittaa epäsingulaariseksi, on käänteismatriisi G^{-1} on olemassa ja saadaan

$$A = \Gamma G^{-1}.$$

Huomaa, että ominaisuuden $\Gamma_{-k} = \Gamma_k'$ (tai yhtäpitävästi $\Gamma_{-k}' = \Gamma_k$) perusteella matriisi G on symmetrinen, sillä esimerkiksi tapauksessa $p = 2$

$$G' = \begin{bmatrix} \Gamma_0' & \Gamma_1' \\ \Gamma_{-1}' & \Gamma_0' \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \Gamma_0 & \Gamma_{-1} \\ \Gamma_1 & \Gamma_0 \end{bmatrix} = G.$$

5. Oletetaan todennäköisyyslaskennasta tunnetuksi, että jos $\tilde{Y} = g(X)$ on jokin reaaliarvoisen satunnaismuuttujan Y satunnaisvektoriin X perustuva ennuste, niin

$$\mathsf{MSE}(\tilde{Y}) \geq \mathsf{MSE}\left(\mathsf{E}\left(Y|X\right)\right),$$

jossa $\mathsf{MSE}(\cdot)$ on määritelty monisteen sivulla 14. Laajennetaan tulos tämän avulla moniulotteiseen tapaukseen. Keskineliövirheen lauseke voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} a'MSE(\tilde{Y})a &= a'\mathsf{E}[(Y-\tilde{Y})(Y-\tilde{Y})']a = \mathsf{E}[a'(Y-\tilde{Y})(Y-\tilde{Y})'a] \\ &= \mathsf{E}[(Y-\tilde{Y})'a)'(Y-\tilde{Y})'a] = \mathsf{E}[((Y-\tilde{Y})'a)^2] \\ &= MSE(a'\tilde{Y}) \geq MSE\left(\mathsf{E}(a'Y|X)\right) \\ &= \mathsf{E}[(a'Y-\mathsf{E}(a'Y|X))^2] = \mathsf{E}[(a'(Y-\mathsf{E}(Y|X)))^2] \\ &= \mathsf{E}[a'(Y-\mathsf{E}(Y|X))(Y-\mathsf{E}(Y|X))'a] \\ &= a'MSE[\mathsf{E}(Y|X)]a. \end{aligned}$$

[1] Jos $A = [A_{ij}]$ ja $B = [B_{ij}]$, niin $AB = [\sum_k A_{ik}B_{kj}]$, kun dimensiot ovat yhteensopivat (ks. Liite A.5).