

## Moniulotteiset aikasarjat kl 2016, HT 2, pe 12.2., 12-14, C124

1. Tarkastellaan stationaarista VAR(1)-prosessia

$$\begin{bmatrix} z_t \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{t-1} \\ x_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \zeta_t \\ \xi_t \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \zeta_t \\ \xi_t \end{bmatrix} \sim \text{iid}(0, \Omega).$$

Oletetaan, että  $A_{12} = 0$ .

(i) Osoita, että  $z_t$  on stationaarinen VAR(1)-prosessi ja että

$$\mathbf{E}(z_{t+h} \mid z_s, s \leq t) = A_{11}^h z_t, \quad h \geq 1.$$

(ii) Osoita edelleen, että

$$\mathbf{E}(z_{t+h} \mid y_s, s \leq t) = A_{11}^h z_t, \quad h \geq 1,$$

jossa  $y_s = (z_s, x_s)$ .

2. Tarkastellaan kaksiulotteisesta stationaarisesta prosessista  $y_t = (y_{1t}, y_{2t})$  saatua realisaatiota  $y_1, \dots, y_T$ . Oletetaan, että komponenttiprosesseista  $y_{1t}$  ja  $y_{2t}$  tiedetään, että  $y_{it} \sim \text{iid}(\mu_i, \omega_i^2)$  ( $i = 1, 2$ ). Hyödyntäen tätä tietoa johda pelkästään ristikorrelaatioestimaattoreihin  $r_{12,k}$ ,  $k = -K, \dots, K$  perustuva asymptoottisesti  $\chi^2$ -jakautunut testi nollahypoteesille, jonka mukaan  $y_{1t}$  ja  $y_{2t}$  ovat riippumattomia iid-prosesseja.

*Vihje:* Monisteen s. 20 ja tulos  $X'X = \sum_{i=1}^m X_i^2 \sim \chi_m^2$ , kun  $X = (X_1, \dots, X_m)$  ja  $X_1, \dots, X_m$  ovat riippumattomia ja  $N(0, 1)$ -jakautuneita.

**Taustaa tehtävälle 3.** Seuraavassa tehtävässä tarvittavat aineistot ja R-koodit ovat saatavilla kurssisivulla samoin kuin R-koodeihin liittyvä esimerkkiaineisto (tehtävää 2 varten tarvittavat koodeista vain pätkän alusta kohtaan, jossa alkaa VAR-mallin estimointiin liittyvä osa).<sup>1</sup>

3. (i) Tarkastellaan erään Lydia E. Pinkham -lääkeyhtiön valmistaman tuotteen vuotuisista myyntituloista ( $y_{1t}$ ) ja mainontakuluista ( $y_{2t}$ ) koostuvaa kahden muuttujan aineistoa vuosilta 1907-1960 (luvut esitetty 1000 dollareina). Tätä aineistoa on käytetty lukuisissa mainonnan ja myynnin yhteyttä tarkastelevissa tutkimuksissa.

Esitä aineiston aikasarjat graafisesti ja tutki niiden auto- ja ristikorreloituneisuutta otosauto- ja otosristikorrelaatiofunktioita käyttäen (ks. monisteen s. 20).

(ii) Tässä käytettävä aineisto liittyy Saksalainen CESifo Group'in ylläpitämään Saksan talouden tilaa kuvaavaan indeksiin (Ifo Business Climate Index), joka perustuu

---

<sup>1</sup>R-koodien tukena voit käyttää www-sivulta <http://www.jstatsoft.org/v27/i04/paper> löytyvää dokumentia ja vaihtoehtoisesti voit käyttää jotain soveltuvaa ohjelmistoa kuten kurssisivulla mainittua JMultia.

n. 7000 eri toimialoja edustavalta yritykseltä kuukausittain saataviin arvioihin liike-toiminnan sen hetkisestä tilasta ja tulevien kuuden kuukauden odotuksista.<sup>2</sup> Jotta indeksi kuvaisi sitä mitä halutaan, olisi yritysten odotusten ilmeisesti heijastettava tulevan tuotannon määrää. Tämän (osittaiseksi) tutkimiseksi tarkastellaan edellä mainitusta odotussarjasta ( $y_{1t}$ ) ja Saksan tavaroiden tuotannon määrää kuvaavan indeksin muutoksista ( $y_{2t}$ ) koostuvaa kahden muuttujan kuukausittaista aineistoa ajanjaksolta 1991I-2007XII (alkuperäisessä tuotantoindeksissä oli selvä nouseva trendi, joten tarkasteltavaksi valittiin indeksin peräkkäisten kuukausien muutokset). Koska odotussarja oli saatavana vain kausipuhdistettuna, on myös tuotannon muutossarjasta valittu kausipuhdistettu versio.

Esitä aineiston aikasarjat graafisesti ja tutki niiden auto- ja ristikorreloituneisuutta otosauto- ja otosristikorrelaatiofunktioita käyttäen (ks. monisteen s. 20).

**Taustaa tehtävälle 4.** Tehtävän 1 testi voidaan tehdä realistisemmaksi seuraavasti. Oletetaan, että  $y_{1t}$ :n ja  $y_{2t}$ :n tiedetään olevan ARMA-prosesseja, joiden asteet tunnetaan (käytännössä asteet selvitetään aineistoa käyttäen). Estimoidaan näiden ARMA-prosessien parametrit (normaalijakaumaan perustuvalla) SU-menetelmällä ja lasketaan residuaalit  $\hat{\varepsilon}_{1t}$  ja  $\hat{\varepsilon}_{2t}$ , jotka toteuttavat likimain tehtävässä 1 prosesseilta  $y_{1t}$  ja  $y_{2t}$  vaaditut iid-ominaisuudet. Voidaan osoittaa, että virhevektorin  $\varepsilon_t = (\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t})$  ollessa ajassa riippumaton iid-prosessi näistä residuaaleista lasketuilla ristikorrelaatioestimaattoreilla on monisteen s. 20 mainitut asymptoottiset ominaisuudet, joten monisteen s. 20 esitettyä ja tehtävän 1 testiä voidaan soveltaa residuaaleihin  $\hat{\varepsilon}_{1t}$  ja  $\hat{\varepsilon}_{2t}$  ja tutkia niiden ja siten myös prosessien  $y_{1t}$  ja  $y_{2t}$  ristikorreloimattomuutta.

4. (i) Tehtävässä 2(i) AR(2)-malli osoittautui myyntituloille ( $y_{1t}$ ) riittäväksi, kun taas mainontakuluilla ( $y_{2t}$ ) vaadittiin laajempi AR(5)-malli (säästäväisempää ja riittävää ARMA-mallia ei löytynyt). Jälkimmäisen mallin residuaalit viittasivat ei-normaalisuuteen, mikä ei kuitenkaan ole kriittistä tehtävän testin kannalta. Näiden mallien residuaaleista saatiin seuraavat ristikorrelaatioestimaatit ( $T = 54$ ).

$k$	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	
$r_{12,k}$	0.18	-0.13	-0.01	0.13	-0.09	0.15	0.03	0.09	-0.05	0.41	
$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r_{12,k}$	0.40	0.09	-0.14	0.03	0.18	-0.22	-0.15	-0.15	0.08	0.10	-0.24

Tutki onko myyntitulojen ja mainontakulujen välillä tämän perusteella ristikorrelaatiota. Käytä sekä yksittäisiä ristikorrelaatioestimaatteja että tehtävän 1 testiä (jollain  $K$ :n arvolla).

(ii) Tehtävässä 2(ii) AR(3)-malli osoittautui odotussarjalle ( $y_{1t}$ ) riittäväksi, kun taas tuotannon muutossarjalle ( $y_{2t}$ ) päädyttiin ARMA(3,1)-mallin. Molempien residuaalit

<sup>2</sup>Yksityiskohtaisempaa tietoa indeksistä löytyy www-sivulta <http://www.cesifo-group.de/ifoHome/facts/Survey-Results/Business-Climate.html>.

viittasivat ei-normaalisuuteen. Tuotannon muutossarjan residuaalien neliöissä esiin-  
tyi myös lievää (joskin ”merkitsevää”) korrelaatiota (0.16) viipymällä yksi, minkä  
mahdollinen vaikutus tehtävään analyysiin oletetaan kuitenkin vähäiseksi. Residu-  
aaleista saatiin seuraavat ristikorrelaatioestimaatit ( $T = 204$ ).

$k$	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
$r_{12,k}$	0.08	0.02	-0.00	0.08	0.09	0.01	0.08	0.10	0.12	0.13

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r_{12,k}$	0.07	0.02	0.11	0.12	0.06	0.13	0.04	0.03	-0.05	-0.03	0.11 .

Tutki onko yritysten odotusten ja tuotannon muutosten välillä tämän perusteella  
ristikorrelaatiota. Käytä sekä yksittäisiä ristikorrelaatioestimaatteja että tehtävän 1  
testiä (jollain  $K:n$  arvolla).