Moniulotteiset aikasarjat kl 2016, HT 1, pe 5.2., 12-14, C124

1. Olkoon $A = [a_{ij}]$ $n \times m$ matriisi ja $\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2}$ sen normi (ks. Liite A.1).
(i) Osoita, että (maksimit yli arvojen $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$)

$$\max |a_{ij}| \leq \|A\| \leq \sqrt{nm} \max |a_{ij}| .$$

(ii) Totea edellisen avulla, että $A_N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} A$ alkioittain eli $a_{ij,N} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} a_{ij}$ kaikilla $i = 1, ..., n$ ja $j = 1, ..., m$ jos ja vain jos $\|A_N - A\| \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (tässä $A_N = [a_{ij,N}]$ on jono $n \times m$ matriiseja).

2. Oletetaan, että $n \times n$ matriisin A ominaisarvot $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ovat erisuuria (ks. Liite A.2). Oletetaan matriisilaskennasta lisäksi tunnetuksi, että tällöin vastaavat ominaisvektorit ovat lineaarisesti riippumattomat (eli vapaat).
Osoita, että matriisi A voidaan lausua muodossa $A = P\Lambda P^{-1}$, jossa $\Lambda = \mathsf{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ (diagonaalimatriisi) ja matriisin P $(n \times n)$ sarakkeet ovat A:n (lineaarisesti riippumattomat) ominaisvektorit. Totea tämän perusteella, että $A^N = P\Lambda^N P^{-1}$.

Vihje: Yhtälö $A = P\Lambda P^{-1}$ voidaan johtaa kirjoittamalla Liitteen A.2 rivillä 3 olevat yhtälöt matriisimuodossa.

3. (Jatkoa edelliselle). Olkoon $n \times n$ matriisi A kuten edellisessä tehtävässä. Oletetaan, että A:n kaikki (erisuuret) ominaisarvot $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ovat itseisarvoltaan ykköstä pienempiä eli $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, ..., n$. Osoita , että tällöin $A^N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$ geometrisesti eli matriisin A^N alkioille $\left[A^N\right]_{ij}$ pätee $\left|\left[A^N\right]_{ij}\right| \leq Cr^N$, jossa $C < \infty$ ja $r < 1$.

Vihje: Tarkastele matriisin A^N normia $\left\|A^N\right\|$ ja johda sille "sopiva" yläraja käyttäen matriisinormin submultiplikatiivisuutta (ks. Liitteen A.1).

Huom.: Tehtävän tulos pätee myös ilman oletusta matriisin A ominaisarvojen erisuuruudesta. Tällöin edellisen tehtävän hajotelman asemesta käytetään A:n Jordanin hajotelmaa (ks. Liite A.2). Tämän ja tehtävän 1(i) jälkimmäisen epäyhtälön avulla voidaan perustella monisteen s. 9 esitetty epäyhtälö $\sum_{j=0}^{\infty} \left\|\boldsymbol{A}^j\right\|^2 < \infty$.

4. Ratkaise monisteen s. 12 johdetuista Yule-Walker -yhtälöistä

$$\Gamma'_k = A_1\Gamma'_{k-1} + \cdots + A_p\Gamma'_{k-p}, \quad k > 0,$$

kerroinmatriisit $A_1, ..., A_p$ kovarianssimatriisien $\Gamma'_0, ..., \Gamma'_p$ funktiona. Ratkaisussa voit olettaa, että tarvittava matriisin kääntäminen on mahdollinen eli kyseinen matriisi voidaan osoittaa epäsingulaariseksi.

5. Oletetaan todennäköisyyslaskennasta tunnetuksi, että jos $\tilde{Y} = g\,(X)$ on jokin reaaliarvoisen satunnaismuuttujan Y satunnaisvektoriin X perustuva ennuste, niin

$$\mathsf{MSE}(\tilde{Y}) \geq \mathsf{MSE}\,(\mathsf{E}\,(Y|X))\,,$$

jossa $\mathsf{MSE}(\cdot)$ on määritelty monisteen sivulla 14. Olkoot Y ja $\tilde{Y} = g(X)$ nyt vektoriarvoisia. Osoita oikeaksi monisteen s. 14 mainittu tulos

$$a'\mathsf{MSE}(\tilde{Y})a \geq a'\mathsf{MSE}\left(\mathsf{E}\left(Y|X\right)\right)a$$

kaikilla dimensioltaan sopivilla vektoreilla a.

Vihje: Voit siirtyä tarkastelemaan lineaarikombinaatioita $a'Y$ ja $a'\tilde{Y}$ ja olennaisesti palauttaa tilanteen yksiulotteiseksi.