MITTA JA INTEGRAALI

TUOMAS HYTÖNEN

1. Johdanto: Riemann vs. Lebesgue

Useimmat integroimisteoriat perustuvat siihen, että on jokin joukko ”helppoja” funktioita, jotka ilman muuta ”osataan” integroida, ts. on selvä näkemys, mikä niiden integraalin ”pitää” olla, ja tämä otetaan integraalin määritelmäksi. Lopullinen integroitavien funktioiden joukko muodostetaan näistä helpoista funktioista sopivalla raja-arvoprosessilla.

Riemannin integraalin kannalta ”helppoja” funktioita ovat *porrasfunktiot* (step functions)

$$f(x) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k 1_{I_k}(x),$$

missä $\alpha_k \in \mathbb{R}$, kukin I_k on reaaliakselin väli ja merkintä 1_E (edellä $E = I_k$) tarkoittaa joukon E *indikaattoria*

$$1_E(x) := \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in E, \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

(Merkintä ”:=” tarkoittaa ”määritellään yhtäsuureksi kuin”.) Monesti käytetään myös merkintää χ_E ja nimitystä *karakteristinen funktio.*

Em. funktion Riemannin integraali on

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x := \sum_{k=1}^{K} \alpha_k |I_k|,$$

missä $|I_k|$ on välin I_j pituus. Yleisesti Riemannin mielessä integroituvia funktioita ovat kaikki, joita voidaan (sopivassa mielessä) arvioida tällaisilla porrasfunktioilla.

Lebesguen teoriassa lähtökohdaksi otetaan yleisemmin ns. *yksinkertaiset funktiot* (simple functions). Niiden lauseke on lähes sama, nimittäin

$$f(x) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k 1_{E_k}(x),$$

sillä erolla, että tässä E_k saa olla mikä tahansa ns. *mitallinen joukko.* (Vielä ei tarvitse tietää, mitä se tarkoittaa.) Tällaisen funktion (Lebesguen) integraali määritellään vastaavasti

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x := \sum_{k=1}^{K} \alpha_k |E_k|,$$

missä $|E_k|$ on joukon *mitta.* (Tähänkin palataan.) Lebesguen mielessä integroituvia funktioita ovat kaikki, joita voidaan (taas sopivassa mielessä) arvioida yksinkertaisilla funktioilla. Koska näiden luokka on rikkaampi kuin porrasfunktioiden luokka, saadaan lopputuloksena integrointiteoria, jolla osataan integroida enemmän funktioita. Vaikeutena kuitenkin on, että edes alkuun pääsemiseksi tarvitaan uusi mitan käsite melko yleisille joukoille.

Versio: 26. helmikuuta 2016.

1.1. **Esimerkki.** Tarkastellaan funktioita $f = 1_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$, joka saa arvon 1 välin $[0,1]$ rationaalipisteissä ja arvon 0 muualla. Yritetään laskea $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Olkoon $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_K = 1$ välin $[0,1]$ ositus. Koska kullakin välillä $I_k := [a_{k-1}, a_k]$ on rationaalipiste, jossa siis $f(x) = 1$, niin ositusta vastaava Riemannin yläsumma on

$$\sum_{k=1}^{K} \max_{x\in I_k} f(x)|I_k| = \sum_{k=1}^{K} 1\cdot|I_k| = 1.$$

Koska kullakin välillä I_k on myös irrationaalipiste, jossa siis $f(x) = 0$, niin vastaava Riemannin alasumma puolestaan on

$$\sum_{k=1}^{K} \min_{x\in I_k} f(x)|I_k| = \sum_{k=1}^{K} 0\cdot|I_k| = 0.$$

Tämä pätee kaikille osituksille, joten ylä- ja alasummat eivät voi koskaan lähestyä toisiaan. Ko. funktio ei ole Riemannin mielessä integroituva.

Toisaalta $f = 1_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ on yksinkertainen funktio Lebesguen mielessä, joten suoraan määritelmästä pitäisi seurata, että

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = |\mathbb{Q}\cap[0,1]|,$$

ja kysymykseksi jää joukon $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ mitta. Vaikka mittaa ei ole vielä kunnolla määritelty, esitetään tässä kuitenkin idea. Muistetaan, että $\mathbb{Q}$ on numeroituva, eli voidaan esittää jonona $\mathbb{Q}\cap[0,1] = \{q_k\}_{k=1}^{\infty}$. Nyt $q_k \in I_k := (q_k - \varepsilon/2^k, q_k + \varepsilon/2^k)$, missä I_k on väli, jonka pituus on $2\varepsilon/2^k$. Siis $\mathbb{Q}\cap[0,1] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ voidaan peittää väleillä, joiden yhteispituus

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| = 2\varepsilon$$

voidaan valita mielivaltaisen pieneksi. Kuten myöhemmin täsmällisen määritelmän myötä osoittautuu, tämä tarkoittaa, että joukon $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ mitta on nolla. Siis Lebesguen mielessä $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Motivaatio Lebesguen integraalille ei ole kuitenkaan ainoastaan mahdollisuus integroida uusia ja eksoottisia funktioita. Lebesguen teoria antaa myös tehokkaita työkaluja raja-arvojen

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{ja} \qquad \int \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

vertaamiseen; paljon tehokkaampia kuin Riemannin teoria jopa siinä tilanteessa, että funktiot f_n ja $\lim_{n\to\infty} f_n$ olisivat myös Riemannin mielessä integroituvia!

2. Mitalliset joukot, σ-algebra, mitta

Kehitellään mittateoriaa yleisessä viitekehyksessä, joka ei ole yhtään sen vaikeampi kuin reaaliakselin tilanne!

Olkoon Ω jokin joukko, esim. $\Omega = \mathbb{R}$, mutta ei rajoituta tähän. Olkoon $\mathscr{F}$ jokin kokoelma Ω:n osajoukkoja (siis: jos $A \in \mathscr{F}$ niin $A \subset \Omega$).

2.1. **Määritelmä** (σ-algebra)**.** Kokoelma $\mathscr{F}$ on Ω:n *σ-algebra* (sigma-algebra) jos:
(1) $\Omega \in \mathscr{F}$,
(2) jos $A_k \in \mathscr{F}$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots$, niin myös $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{F}$, ja
(3) jos $A \in \mathscr{F}$, niin myös $A^c := \Omega \setminus A \in \mathscr{F}$.

Kokoelmaan $\mathscr{F}$ kuuluvia joukkoja kutsutaan *mitallisiksi joukoiksi* (measurable sets).

2.2. **Lause** (Kaikki äärelliset ja numeroituvat joukko-operaatiot pysyvät σ-algebran sisällä.)**.** *Jos $\mathscr{F}$ on σ-algebra ja $A_k \in \mathscr{F}$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots$, niin*

$$\varnothing \in \mathscr{F}, \quad \bigcup_{k=1}^{N} A_k \in \mathscr{F}, \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{F}, \quad \bigcap_{k=1}^{N} A_k \in \mathscr{F}, \quad A_1 \setminus A_2 \in \mathscr{F}.$$

Todistus. $\varnothing = \Omega^c \in \mathscr{F}$ kohtien (i) ja (iii) perusteella, ja $\bigcup_{k=1}^{N} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{F}$ kohdan (ii) perusteella kun valitaan esim. $A_k = A_N$ kaikilla $k > N$ (tai $A_k := \varnothing$ ja hyödynnetään jo todistettua kohtaa).

De Morganin laista seuraa, että

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c \Big)^c \in \mathscr{F}$$

kohtien (ii) ja (iii) perusteella ja $\bigcap_{k=1}^{N} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{F}$ edellisen perusteella kun valitaan esim. $A_k = \Omega$ tai $A_k = A_N$ kaikilla $k > N$.

Lopuksi $A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap A_2^c \in \mathscr{F}$ komplementtia ja äärellistä leikkausta koskevien tulosten perusteella. $\square$

2.3. **Määritelmä** (Mitta)**.** Olkoon $\mathscr{F}$ σ-algebra. Kuvaus $\mu : \mathscr{F} \to [0, \infty]$ on *mitta*, jos

(1) $\mu(\varnothing) = 0$, ja
(2) jos $A_k \in \mathscr{F}$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots$ ja nämä joukot ovat erillisiä (ts. $A_i \cap A_j = \varnothing$ kun $i \neq j$), niin

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Jälkimmäistä ominaisuutta sanotaan *täysadditiivisuudeksi.*

2.4. **Lause** (Mitan ominaisuuksia)**.** *Olkoon μ mitta ja joukot A_k, $k = 1, 2, \ldots$ mitallisia. Tällöin*

(1) *jos joukot A_k ovat erillisiä, niin*

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{N} A_k \Big) = \sum_{k=1}^{N} \mu(A_k),$$

(2) *jos $A_1 \subset A_2$, niin $\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$,*
(3) *jos $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, niin*

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n).$$

(4) *jos $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ ja $\mu(A_1) < \infty$, niin*

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n).$$

Todistus. (1) seuraa määritelmästä valitsemalla $A_k = \varnothing$ kaikilla $k > N$.

(2) seuraa kirjoittamalla $A_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1)$ (erillinen yhdiste) ja käyttämällä edellistä kohtaa (arvolla $N = 2$) ja mitan ei-negatiivisuutta:

$$\mu(A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) \geq \mu(A_1) + 0 = \mu(A_1).$$

(3): Jotta päästään käyttämään mitan tunnettuja ominaisuuksia, tarvitaan erillisyyttä. Määritellään $B_1 := A_1$ ja $B_n := A_n \setminus A_{n-1}$ kun $n \geq 2$. Nämä ovat erillisiä joukkoja. (Mieti, miksi.) Lisäksi

$$A_N = \bigcup_{n=1}^{N} B_n, \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Perustellaan jälkimmäinen (ensimmäinen joko samaan tapaan tai kuvasta – äärettömässä tapauksessa kuvan piirto on vaikeampaa): Koska $B_n \subset A_n$, niin "$\supset$" seuraa heti. Entä "$\subset$"? Jos $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, niin yhdisteen määritelmästä seuraa, että on ainakin yksi n, jolla $x \in A_n$. Olkoon n *pienin* sellainen luku. Jos $n = 1$, niin $x \in A_1 = B_1$. Jos $n > 1$, niin n:n valinnan perusteella $x \notin A_{n-1}$. Siis $x \in A_n \setminus A_{n-1} = B_n$. Joka tapauksessa $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

Näistä väite seuraakin:

$$\begin{aligned}
\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) &= \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big) && \text{(samat joukot)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) && \text{(täysadditiivisuus erillisillä joukoilla)} \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu(B_n) && \text{(sarjan summan määritelmä)} \\
&= \lim_{N\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{N} B_n\Big) && \text{(täysadditiivisuus äärellisellä yhdisteellä)} \\
&= \lim_{N\to\infty} \mu(A_N) && \text{(samat joukot).}
\end{aligned}$$

(4): Samaan tapaan, mutta siivuutetaan. □

Kolmikkoa $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$, missä $\mathscr{F}$ on Ω:n σ-algebra ja μ on mitta, sanotaan *mitta-avaruudeksi.* Usein puhutaan yksinkertaisesti mitta-avaruudesta Ω, jos $\mathscr{F}$ ja μ ymmärretään asiayhteydestä.

2.5. **Esimerkki.** (1) Olkoon $\Omega = \mathbb{Z}$ (tai $\mathbb{N}$ tai $\{1, \ldots, N\}$ tai muu äärellinen tai numeroituva joukko) ja olkoon $\mathscr{F}$ sen kaikkien osajoukkojen kokoelma. Kaikilla $A \in \mathscr{F}$ määritellään

$$\mu(A) := \text{joukon } A \text{ alkioiden lukumäärä.}$$

On helppo todeta, että tämä on mitta. (Melkein kaikki muut esimerkit mitasta ovatkin vähän vaativampia.)

(2) Olkoon $\Omega = \mathbb{R}$. Myöhemmin kurssilla osoitetaan, että on olemassa σ-algebra $\mathfrak{M}$, joka sisältää kaikki avoimet ja suljetut välit (a, b), $[a, b]$ (ja yleisemmin kaikki reaalilukujen avoimet ja suljetut joukot, ja paljon muuta, mutta ei kuitenkaan kaikkia reaalilukujen osajoukkoja) ja on olemassa mitta $m : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$, joka toteuttaa

$$m((a, b)) = m([a, b]) = b - a,$$

eli jokaisen välin mitta on sen tavallinen pituus. Tämä on ns. *Lebesguen mitta.* Se on epäilemättä tärkein yksittäinen mitta, mutta sen rakentaminen vaatii jonkin verran työtä, johon palataan myöhemmin kurssilla.

(3). Olkoon $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ mitta-avaruus, joka toteuttaa lisäksi $\mu(\Omega) = 1$. Tällaista mitta-avaruutta sanotaan *todennäköisyysavaruudeksi* ja mittaa μ *todennäköisyysmitaksi* tai vain *todennäköisyydeksi.* Todennäköisyysteoriassa mitallisia joukkoja kutsutaan *tapahtumiksi.* Täten $\mu(A)$ on tapahtuman A todennäköisyys.

Seuraavaksi määritellään *mitallinen funktio* ja sen *integraali.* Todennäköisyysteoriassa näitä kutsutaan *satunnaismuuttujaksi* ja sen *odotusarvoksi.* Todennäköisyysteoria rikastuttaa mittateoriaa omilla käsitteillään, joista tärkein on *riippumattomuus*, mutta on hyvä huomata, että yleinen mittateoria on myös todennäköisyysteorian pohjalla; Riemannin integraalin laajentaminen ei suinkaan ole sen ainoa sovellus.

3. Yksinkertaisen funktion integraali

3.1. **Määritelmä** (Mitallinen ositus, yksinkertainen funktio)**.** Olkoon Ω mitta-avaruus. Kuvaus $f : \Omega \to Y$ (jokin arvojoukko) on *yksinkertainen*, jos se saa korkeintaan äärellisen monta arvoa $a_k \in Y$ ja kunkin näistä mitallisella joukolla $A_k \in \mathscr{F}$. Toisin sanoen on olemassa äärellinen ositus $\Omega = \bigcup_{k=1}^{K} A_k$, missä joukot $A_k \in \mathscr{F}$ ovat erillisiä, ja $f(x) = a_k \in Y$ kaikilla $x \in A_k$.

Yksinkertaisella funktiolla on muodollinen esitys

$$f = \sum_{k=1}^{K} a_k 1_{A_k}.$$

Jos arvojoukko on esim. $[0, \infty)$ tai $\mathbb{R}$ tai $\mathbb{R}^n$, missä yhteenlasku ja kertolasku on määritelty, voidaan em. summalauseke tulkita tavallisessa mielessä. Tarkastellaan toistaiseksi arvojoukkoa $[0, \infty)$.

Haluttaisiin määritellä yksinkertaisen funktion integraali

$$\int_{\Omega} f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{k=1}^{K} a_k \mu(A_k).$$

Koska joukon mitta $\mu(A_k)$ voi olla ∞, tarvitaan *sopimus*:

$$\begin{aligned} &0 \cdot \infty := \infty \cdot 0 := 0, \\ &a \cdot \infty := \infty \cdot a := \infty, \quad \forall a \in (0, \infty], \\ &a + \infty := \infty + a := \infty, \quad \forall a \in [0, \infty], \end{aligned}$$

(Sopimusta ei voi soveltaa raja-arvojen laskemiseen, esim. $n \to \infty$, $1/n \to 0$, mutta $n \cdot 1/n = 1 \not\to 0 = \infty \cdot 0$.) Näillä laskusäännöillä yo. lauseke antaa tulokseksi jonkin arvon $[0, \infty]$. Mutta onko tämä *hyvin määritelty*? Jos f:llä on toinenkin esitys $f = \sum_{j=1}^{J} b_j 1_{B_j}$, antaako se saman arvon yo. integraalille? Seuraava aputulos auttaa tässä ja antaa sivutuotteena vähän muutakin:

3.2. **Lemma.** *Oletetaan, että*

$$\sum_{k=1}^{K} a_k 1_{A_k} \leq \sum_{j=1}^{J} b_j 1_{B_j}, \tag{3.3}$$

missä kumpikin kokoelma $(A_k)_{k=1}^{K}$ *ja* $(B_j)_{j=1}^{J}$ *muodostaa* Ω*:n mitallisen osituksen Tällöin pätee*

$$\sum_{k=1}^{K} a_k \mu(A_k) \leq \sum_{j=1}^{J} b_j \mu(B_j),$$

Todistus. Perustellaan ensin, että kaikilla k, j pätee

$$a_k \mu(A_k \cap B_j) \leq b_j \mu(A_k \cap B_j) : \tag{3.4}$$

Jos $A_k \cap B_j = \varnothing$, niin kumpikin puoli on nolla, ja tämä on selvä. Olkoon sitten $A_k \cap B_j \neq \varnothing$ ja valitaan jokin $x \in A_k \cap B_j$. Laskemalla (3.3) pisteessä x, saadaan vasemmalta puolelta a_k (sillä $1_{A_k}(x) = 1$ ja $1_{A_{k'}}(x) = 0$ kun $k' \neq k$ erillisyyden perusteella) ja vastaavasti oikealta puolelta b_j. Siis $a_k \leq b_j$ ja (3.4) saadaan, kun kerrotaan epäyhtälön molemmat puolet luvulla $\mu(A_k \cap B_j) \geq 0$.

Nyt voidaan laskea

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^K a_k\mu(A_k) &= \sum_{k=1}^K a_k\mu\Big(\bigcup_{j=1}^J A_k\cap B_j\Big) &&\text{(ositus)}\\
&= \sum_{k=1}^K a_k \sum_{j=1}^J \mu(A_k\cap B_j) &&\text{(täysadditiivisuus erillisillä joukoilla)}\\
&\leq \sum_{k=1}^K b_j \sum_{j=1}^J \mu(A_k\cap B_j) &&\text{(aputulos (3.4))}\\
&= \sum_{j=1}^J b_j \sum_{k=1}^K \mu(A_k\cap B_j) &&\text{(järjestyksen vaihto)}\\
&= \sum_{j=1}^J b_j\mu(B_j) &&\text{(täysadditiivisuus ja ositus toiseen suuntaan).}
\end{aligned}$$

□

3.5. **Määritelmä.** Määritellään yksinkertaisen funktion $f:\Omega\to[0,\infty]$ integraali

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu := \sum_{k=1}^K a_k\mu(A_k)\qquad\text{kun}\qquad f=\sum_{k=1}^K a_k 1_{A_k}$$

ja $(A_k)_{k=1}^K$ on mitallinen ositus.

3.6. **Lause.** *Olkoot $f,g:\Omega\to[0,\infty]$ yksinkertaisia.*

(1) *Integraali $\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu$ on hyvin määritelty, eli ei riipu käytetystä f:n esityksestä.*
(2) *Jos $f\leq g$, niin $\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu$.*

Todistus. Olkoon $f=\sum_{k=1}^K a_k 1_{A_k}$ ja $g=\sum_{j=1}^J b_j 1_{B_j}$.

(1) Jos $f=g$ (eli funktiolla f on kaksi eri esitystä), niin erityisesti $f\leq g$ ja Lemman 3.2 perusteella $\sum_{k=1}^K a_k\mu(A_k)\leq\sum_{j=1}^J b_j\mu(B_j)$. Toisaalta myös $g\leq f$, joten jälleen Lemman 3.2 perusteella pätee myös $\sum_{j=1}^J b_j\mu(B_j)\leq\sum_{k=1}^K a_k\mu(A_k)$. Siis lausekkeet ovat yhtä suuret, ja integraali

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^K a_k\mu(A_k) = \sum_{j=1}^J b_j\mu(B_j)$$

on riippumaton käytetystä esityksetä.

(2) Seuraa suoraan Lemmasta 3.2. □

4. Positiivisen funktion integraali

4.1. **Määritelmä.** Funktio $f:\Omega\to[0,\infty]$ on *mitallinen*, jos joukko

$$\{f>a\} := \{x\in\Omega : f(x)>a\}$$

on mitallinen (eli $\{f>a\}\in\mathscr{F}$) kaikilla $a\in[0,\infty)$.

4.2. **Huomautus** (Yksinkertainen on mitallinen)**.** Jos $f=\sum_{k=1}^K a_k 1_{A_k}$ on yksinkertainen (A_k:t erillisiä), niin

$$\{f>a\} = \bigcup_{k:a_k>a} A_k \in\mathscr{F}\qquad\text{(mitallisten joukkojen } A_k \text{ äärellinen yhdiste),}$$

joten f on myös mitallinen.

4.3. **Määritelmä.** Mitallisen funktion $f : \Omega \to [0,\infty]$ integraali on

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu := \sup\Big\{ \int_\Omega s \,\mathrm{d}\mu : s \in S_f \Big\} \in [0,\infty],$$
$$S_f := \Big\{ s : \Omega \to [0,\infty) \text{ yksinkertainen}, s \le f \Big\}.$$

Toisin sanoen:

(1) Tutkitaan kaikkia yksinkertaisia funktioita s, jotka ovat pienempiä kuin f. Merkitään näiden joukkoa S_f:llä. Huomaa, että ainakin $0 \in S_f$. (Tässä 0 tarkoittaa nollafunktiota, joka saa vakioarvon nolla kaikissa pisteissä.)
(2) Lasketaan funktioiden $s \in S_f$ integraalit (mikä jo osataan). Huomaa, että $\int_\Omega 0 \,\mathrm{d}\mu = 0$.
(3) Tarkastellaan kaikkien em. integraalien joukkoa; tämä on jokin välin $[0,\infty]$ osajoukko, joka sisältää ainakin 0:n, eli se on epätyhjä.
(4) Etsitään kyseisen joukon supremum (pienin yläraja). (Muistutus: jokaisella epätyhjällä ja ylärajallisella reaalijoukolla on reaalinen supremum; jos taas joukolla ei ole reaalista ylärajaa, sen supremum määritellään ∞:ksi.)

4.4. **Lemma.** (1) *Jos f on yksinkertainen, niin "uusi" määritelmä 4.3 antaa saman tuloksen kuin "vanha" määritelmä 3.5.*
(2) *Jos $f \le g$ ovat mitallisia, niin $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \le \int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu$.*

Todistus. (1): Olkoon f yksinkertainen. Pitää osoittaa, että

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \sup\Big\{ \int_\Omega s \,\mathrm{d}\mu : s \in S_f \Big\},$$

missä kaikki integraalit ovat vanhan määritelmän 3.5 mukaisia. Jos $s \in S_f$ niin $s \le f$ ja $\int_\Omega s \,\mathrm{d}\mu \le \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$ lauseen 3.6 perusteella. Siis yllä pätee "$\ge$". Toisaalta $f \in S_f$, joten $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$ on mukana joukossa, josta supremum lasketaan; siis kysyinen supremum on vähintään näin suuri, ja siis yllä pätee "$\le$".

(2): Jos $f \le g$, niin jokainen yksinkertainen $s \le f$ toteuttaa myös $s \le g$. Siis $S_f \subset S_g$ ja täten

$$\Big\{ \int_\Omega s \,\mathrm{d}\mu : s \in S_f \Big\} \subset \Big\{ \int_\Omega s \,\mathrm{d}\mu : s \in S_g \Big\}.$$

Koska suuremman joukon supremum on välttämättä suurempi (ts. vähintään yhtä suuri), saadaan väite. □

Lebesguen teorian ihmeitä on se, että jo näin lyhyen esittelyn jälkeen olemme valmiita todistamaan yhden tärkeimmistä ja hyödyllisimmistä suppenemislauseista:

4.5. **Lause** (Monotonisen suppenemisen lause, monotone convergence theorem)**.** *Olkoot $0 \le f_1 \le f_2 \le \ldots$ (pisteittäin) kasvava jono mitallisia funktioita. Tällöin on olemassa pisteittäinen rajafunktio*

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n,$$

joka on jälleen mitallinen, ja lisäksi

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Todistus. Jokaisessa pisteessä $x \in \Omega$ on kasvava jono lukuja $0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots$ Tällaisella jonolla on aina raja-arvo välillä $[0,\infty]$. (Jos kasvava jono on ylärajallinen, sillä on reaalinen raja-arvo. Jos taas se kasvaa rajatta, se määritelmän mukaan lähestyy ääretöntä.) Merkitään kyseistä raja-arvoa $f(x)$:llä. Oletetaan aluksi näin määritellyn funktion f mitallisuus (palataan tähän kohta).

Koska pisteittäin pätee $0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq f$, niin lemman 4.4 nojalla

$$0 = \int_\Omega 0 \, \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega f_{n+1} \, \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu.$$

Siis myös integraalit $\int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu$ muodostavat kasvavan jonon, jolla on ylärajana $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \in [0, \infty]$. Täten tälläkin jonolla on jokin raja-arvo a, joka lisäksi toteuttaa

$$a := \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu.$$

Täytyy vielä osoittaa, että pätee myös

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \leq a.$$

Tämä on helpompaa, kun otamme "ε:in verran tilaa" itsellemme: Riittää osoittaa (mieti miksi!), että kaikilla $b = 1 + \varepsilon > 0$ pätee

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \leq ba.$$

Edelleen integraalin määritelmän perusteella riittää osoittaa, että kaikilla yksinkertaisilla funktioilla $s \leq f$ pätee

$$\int_\Omega s \, \mathrm{d}\mu \leq ba.$$

Kiinnitetään tällainen $s = \sum_{k=1}^K a_k 1_{A_k} \in S_f$. Koska $s \leq f$ ja $1 < b$, niin $s < bf$, kunhan $f > 0$. (Huomaa, että $s < \infty$ sisältyy joukon S_f määritelmään.) Tutkitaan hetki sellaisia pisteitä $x \in \Omega$, joissa tämä on voimassa. Koska siis $s < bf$ ja $f_j \to f$, niin ainakin yhdellä (itse asiassa kaikilla riittävän suurilla) j pätee myös $s < bf_j$. Toisin sanoen

$$\{f > 0\} = \{f > 0\} \cap \bigcup_{j=1}^\infty F_j, \tag{4.6}$$

missä

$$F_j := \{bf_j > s\} \subset F_{j+1}.$$

(Koska $f_{j+1} \geq f_j$, niin jos $bf_j > s$, myös $bf_{j+1} > s$.)

Joukot F_j:t ovat mitallisia, sillä

$$\{bf_j > s\} = \bigcup_{k=1}^K \{bf_j > s\} \cap A_k = \bigcup_{k=1}^K \{f_j > a_k/b\} \cap A_k,$$

missä kaikki oikean puolen joukot ovat mitallisia, ja vasen puoli saadaan äärellisillä joukko-operaatioilla. Myös $\{f > 0\}$ on mitallinen suoraan määritelmästä (kun oletettiin funktio f mitaliseksi).

Huomataan vielä, että jos $a_k > 0$, niin $f \geq s = a_k > 0$ koko joukolla A_k, eli $A_k \subset \{f > 0\}$, ja (4.6):stä seuraa

$$A_k = A_k \cap \bigcup_{j=1}^\infty F_j = \bigcup_{j=1}^\infty A_k \cap F_j \qquad \text{jos } a_k > 0.$$

Täten

$$a_k \mu(A_k) = \lim_{j\to\infty} a_k \mu(A_k \cap F_j), \tag{4.7}$$

mikä pätee triviaalisti jos $a_k = 0$ ja seuraa edellisestä yhtälöstä ja lauseesta 2.4 jos $a_k > 0$.

Nyt voidaan laskea

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b}\int_\Omega s\,\mathrm{d}\mu &= \sum_{k=1}^{K}\frac{a_k}{b}\mu(A_k) \qquad \text{(yksinkertaisen integraalin määritelmä)}\\
&= \sum_{k=1}^{K}\frac{a_k}{b}\lim_{j\to\infty}\mu(A_k\cap F_j) \qquad \text{(aputulos (4.7))}\\
&= \lim_{j\to\infty}\sum_{k=1}^{K}\frac{a_k}{b}\mu(A_k\cap F_j) \qquad \text{(raja-arvon ja äärellisen summan vaihto)}\\
&= \lim_{j\to\infty}\int_\Omega\sum_{k=1}^{K}\frac{a_k}{b}1_{A_k\cap F_j}\,\mathrm{d}\mu \qquad \text{(yksinkertaisen integraalin määritelmä)}\\
&= \lim_{j\to\infty}\int_\Omega 1_{F_j}\sum_{k=1}^{K}\frac{a_k}{b}1_{A_k}\,\mathrm{d}\mu \qquad (1_{A_k\cap F_j}=1_{A_k}1_{F_j})\\
&= \lim_{j\to\infty}\int_\Omega 1_{F_j}\frac{s}{b}\,\mathrm{d}\mu \qquad \text{funktion } s \text{ määritelmä}\\
&\le \lim_{j\to\infty}\int_\Omega 1_{F_j}f_j\,\mathrm{d}\mu \qquad s<bf_j \text{ joukolla } F_j\text{, ja Lemma 4.4}\\
&\le \lim_{j\to\infty}\int_\Omega f_j\,\mathrm{d}\mu \qquad 1_{F_j}\le 1\text{, ja Lemma 4.4}\\
&= \lim_{j\to\infty}\int_\Omega f_j\,\mathrm{d}\mu = a.
\end{aligned}$$

Täytyy enää todistaa f:n mitallisuus, joka sivuutettiin edellä. Tämä seuraa suoraan havainnosta

$$\{f>\alpha\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{f_n>\alpha\}.$$

Nimittäin jos $f>\alpha$, niin raja-arvosta $f_n\to f$ seuraa, että myös $f_n>\alpha$ kaikilla tarpeeksi suurilla n, mikä todistaa "$\subset$":n yllä.

Toisaalta jos jollakin n pätee $f_n>\alpha$, niin koska $f\ge f_n$, myös $f>\alpha$, mikä todistaa "$\supset$":n. □

Ennen kuin jatketaan, on kätevää huomata, että funktioiden mitallisuudessa ei ole niin tarkkaa, tutkitaanko joukkoja $\{f>\alpha\}$ vai $\{f\ge\alpha\}$: voidaan käyttää niitä, jotka kulloinkin ovat kätevämpiä!

4.8. **Lemma.** *Olkoon $f:\Omega\to[-\infty,\infty]$ funktio. Seuraavat ovat yhtäpitäviä:*

(1) $\{f>\alpha\}$ *on mitallinen kaikilla* $\alpha\in\mathbb{R}$.
(2) $\{f\ge\alpha\}$ *on mitallinen kaikilla* $\alpha\in\mathbb{R}$.

Todistus. Jos (1) pätee, niin koska

$$\{f\ge\alpha\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{f>\alpha-\frac{1}{n}\},$$

myös (2) pätee.

Jos (2) pätee, niin koska

$$\{f>\alpha\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{f>\alpha+\frac{1}{n}\},$$

myös (1) pätee. □

Monotonisen suppenemisen lauseen tärkeä kumppani on seuraava tulos:

4.9. **Lause** (Positiivinen mitallinen funktio on yksinkertaisten kasvava raja)**.** *Olkoon $f : \Omega \to [0, \infty]$ mitallinen. Tällöin on olemassa kasvava jono yksinkertaisia funktioita $0 \le f_1 \le f_2 \le \ldots$, joilla $f_n \to f$ pisteittäin.*

Todistus. Määritellään ensin joukko

$$J_n := \Big\{ \frac{j}{2^n} : j = 0, 1, 2, \ldots, 4^n \Big\}.$$

Koska $j/2^n = 2j/2^{n+1}$, huomataan, että $J_n \subset J_{n+1}$. Määritellään

$$f_n(x) := \max\{y \in J_n : y \le f(x)\}.$$

Selvästi $0 \le f_n(x) \le f(x)$, koska $f_n(x)$ on maksimi luvuista, joihin kuuluu ainakin nolla, ja jotka kaikki ovat korkeintaan $f(x)$. Lisäksi $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$, koska suuremman joukon maksimi on välttämättä suurempi. (Tässä suurempi tarkoittaa vähintään yhtä suurta.)

Todistetaan, että f_n on yksinkertainen: Tämä seuraa, kun havaitaan, että se voidaan yhtäpitävästi esittää muodossa

$$f_n = \sum_{j=0}^{4^n-1} \frac{j}{2^n} 1_{\{j/2^n \le f < (j+1)/2^n\}} + 2^n 1_{\{f \ge 2^n\}},$$

ja muotoa $\{f \ge a\}$ olevat joukot ovat mitallisia lemman 4.8 perusteella ja joukot $\{a \le f < b\} = \{f \ge a\} \setminus \{f \ge b\}$ näiden erotuksina.

Todistetaan, että $f_n \to f$. Edetään tapauksittain:

Jos $f(x) = \infty$, niin erityisesti $f(x) \ge 2^n$ kaikilla n, ja täten $f_n(x) = 2^n$. Selvästi $2^n \to \infty = f(x)$ kun $n \to \infty$.

Jos $f(x) < \infty$, niin $f(x) < 2^n$ kaikilla riittävän suurilla n, ja täten löydetään jokin $j \in \{0, 1, 2, \ldots, 4^n - 1\}$, jolla $j/2^n \le f(x) < (j+1)/2^n$. Tällöin

$$f_n(x) = \frac{j}{2^n} \le f(x) < f_n(x) + \frac{1}{2^n},$$

mistä nähdään, että $|f_n(x) - f(x)| < 2^{-n} \to 0$, eli $f_n(x) \to f(x)$ tässäkin tapauksessa.

Kaikkiaan siis f_n on kasvava jono yksinkertaisia funktioita, joka lähestyy pisteittäin f:ää, kuten pitikin. □

5. Summan ja integraalin vaihtaminen

5.1. **Lause.** *Olkoot $f_n : \Omega \to [0, \infty]$ mitallisia funktioita. Tällöin $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ on mitallinen, ja lisäksi*

$$\int_\Omega \sum_{n=1}^{\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Todistus. Edetään useassa vaiheessa.

(1): Summa $f_1 + f_2$ on mitallinen. Tämä perustellaan havaitsemalla, että

$$\{f_1 + f_2 > \alpha\} = \bigcup_{\beta \in \mathbb{Q}} \{f_1 > \beta\} \cap \{f_2 > \alpha - \beta\}. \tag{5.2}$$

Kun tämä tiedetään, niin vasemman puolen mitallisuus seuraa, sillä oikea puoli on mitallisten joukkojen leikkausten numeroituva yhdiste.

Selvästi (5.2):ssä pätee $\supset$: jos $f_1 > \beta$ ja $f_2 > \alpha - \beta$, niin tällöin $f_1 + f_2 > \beta + (\alpha - \beta) = \alpha$.

Entä $\subset$? Tarkastellaan pistettä $x \in \Omega$, jossa $f_1(x) + f_2(x) > \alpha$. Tällöin pätee myös $f_1(x) + f_2(x) > \alpha + \varepsilon$ jollakin $\varepsilon > 0$. Valitaan nyt jokin

$$\beta \in (\alpha - f_2(x), \alpha - f_2(x) + \varepsilon) \cap \mathbb{Q} :$$

Tämä on mahdollista, sillä rationaaliluvut ovat tiheässä reaalilukujen joukossa, eli jokaiselta reaalilukuväliltä löytyy rationaalilukuja.

Nyt pätee ensinnäkin

$$f_1(x) > \alpha + \varepsilon - f_2(x) > \beta$$

ja toisaalta, koska $\beta > \alpha - f_2(x)$, niin $f_2(x) > \alpha - \beta$. Tämä todistaa väitteen.

(2): Minkä tahansa äärellisen summan $\sum_{k=1}^{n} f_k$ mitallisuus seuraa induktiolla. Jos väite tiedetään arvolla n, niin havaitaan, että

$$\sum_{k=1}^{n+1} f_k = \Big(\sum_{k=1}^{n} f_k\Big) + f_{n+1}$$

missä ensimmäinen termi on mitallinen induktio-oletuksen nojalla ja täten näiden kahden funktion summa vaiheen (1) nojalla.

Toisaalta ääretön summa $g := \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ on äärellisten summien $g_k := \sum_{k=1}^{n+1} f_k$ kasvava raja-arvo, joten sen mitallisuus on osa monotonisen suppenemisen lausetta.

(3): Tarkastellaan väitettä

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^{2} f_k \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{2} \int_\Omega f_k \,\mathrm{d}\mu \tag{5.3}$$

ja oletetaan ensin, että molemmat funktiot ovat yksinkertaisia,

$$f_1 = \sum_{k=1}^{K} a_k 1_{A_k}, \qquad f_2 = \sum_{j=1}^{J} b_j 1_{B_j},$$

missä molemmissa summissa on mitallinen ositus.

Tällöin, koska $1 = 1_\Omega = \sum_{j=1}^{J} 1_{B_j}$ ja vastaavasti joukoilla A_k, saadaan

$$\begin{aligned} f_1 &= f_1 \cdot 1 = \sum_{k=1}^{K} a_k 1_{A_k} \sum_{j=1}^{J} 1_{B_j} = \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J} a_k 1_{A_k \cap B_j} \\ f_2 &= \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J} b_j 1_{A_k \cap B_j}, \end{aligned}$$

(Huomaa, että äärellisten summien summausjärjestys on vapaa.) ja edelleen

$$f_1 + f_2 = \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J} (a_k + b_j) 1_{A_k \cap B_j}.$$

Selvästi joukot $A_k \cap B_j$, missä $k = 1, \ldots, K$ ja $j = 1, \ldots, J$ muoodostavat jälleen Ω:n mitallisen osituksen.

Siis suoraan integraalin määritelmästä ja äärellisen summan laskusäännöistä seuraa, että

$$\begin{aligned} \int_\Omega (f_1 + f_2)\,\mathrm{d}\mu &= \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J} (a_k + b_j)\mu(A_k \cap B_j) \\ &= \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J} a_k \mu(A_k \cap B_j) + \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J} b_j \mu(A_k \cap B_j) \\ &= \int_\Omega f_1 \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega f_2 \,\mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

(4): Tarkastellaan samaa väitettä (5.3) yleisillä f_1, f_2. Lauseen 4.9 nojalla on olemassa kasvavat yksinkertaisten funktioiden jonot s_n^1 ja s_n^2, joilla $s_n^i \to f_i$ kun

$n \to \infty$. Tällöin myös $s_n^1 + s_n^2$ on kasvava jono mitallisia funktioita, joka lähestyy funktioita $f_1 + f_2$. Täten

$$\begin{aligned}\int_\Omega f_1 \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega f_2 \,\mathrm{d}\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega s_n^1 \,\mathrm{d}\mu + \lim_{n\to\infty} \int_\Omega s_n^2 \,\mathrm{d}\mu \qquad \text{(monot. suppeneminen)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \Big(\int_\Omega s_n^1 \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega s_n^2 \,\mathrm{d}\mu \Big) \qquad \text{(raja-arvon ominaisuudet)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega (s_n^1 + s_n^2) \,\mathrm{d}\mu \qquad \text{(vaihe (3))} \\ &= \int_\Omega (f_1 + f_2) \,\mathrm{d}\mu \qquad \text{(monot. suppeneminen).}\end{aligned}$$

(5): Tuloksesta (5.3) seuraa induktiolla, että

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^n f_k \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^n \int_\Omega f_k \,\mathrm{d}\mu \tag{5.4}$$

kaikilla n. Koska $\sum_{k=1}^\infty f_k \,\mathrm{d}\mu$ on kasvavan jonon $\sum_{k=1}^n f_k$ raja-arvo, saadaan

$$\begin{aligned}\int_\Omega \sum_{k=1}^\infty f_k \,\mathrm{d}\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \sum_{k=1}^n f_k \,\mathrm{d}\mu \qquad \text{(monot. suppeneminen)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \int_\Omega f_k \,\mathrm{d}\mu \qquad \text{(tulos (5.4))} \\ &= \sum_{k=1}^\infty \int_\Omega f_k \,\mathrm{d}\mu \qquad \text{(sarjan määritelmä).}\end{aligned}$$

Nyt lause on kokonaan todistettu. □

Edellisesllä lauseella on "hupaisa seuraus": Sen avulla voidaan perustella kaksinkertaisen sarjan vaihtosääntö

$$\sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty a_{ij} = \sum_{j=1}^\infty \sum_{i=1}^\infty a_{ij}, \qquad \text{jos } a_{ij} \geq 0,$$

joka on tietenkin mahdollista todistaa myös ilman mittateoriaa. Tämä kuitenkin seuraa, kun merkitään valitaan edellisessä lauseessa $\Omega = \mathbb{Z}_+$, valitaan μ:ksi pistelaskurimitta ja määritellään mitalliset funktiot $f_n(x) := a_{nx}$, $x \in \mathbb{Z}_+$, joilla $\int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{x=1}^\infty f_n(x) = \sum_{x=1}^\infty a_{nx}$.

Edellisestä lauseesta ja seuraavasta helposta havainnosta seuraa integraalin linearisuus positiivisilla funktioilla.

5.5. **Lemma.** *Jos* $f : \Omega \to [0, \infty]$ *on mitallinen ja* $c \in [0, \infty)$*, niin*

$$\int_\Omega cf \,\mathrm{d}\mu = c \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu.$$

Todistus. Jos f on yksinkertainen, yhtälö seuraa suoraan määritelmästä. Jos $s_n \to f$ on kasvava yksinkertainen jono, niin $cs_n \to cf$ on myös kasvava yksinkertainen jono, ja väite seuraa monotonisen suppenemisen lauseesta. (Vaihtoehtoisesti tämä olisi helppo perustella myös suoraan integraalin määritelmästä toteamalla, että $s \in S_f$ jos ja vain jos $cs \in S_{cf}$, kun $c > 0$, ja väite on triviaali, kun $c = 0$.) □

5.6. **Määritelmä** (Integraali osajoukolla)**.** Jos $E \subset \Omega$ on mitallinen joukko (ts. $E \in \mathscr{F}$) ja $f : \Omega \to [0, \infty]$ mitallinen funktio. Määritellään

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu := \int_\Omega 1_E f \,\mathrm{d}\mu.$$

On helppo todeta suoraan määritelmästä, että myös $1_E f$ on mitallinen funktio. Yleisemmin pätee:

5.7. **Lemma** (Tulon mitallisuus)**.** *Jos $f, g : \Omega \to [0, \infty]$ ovat mitallisia funktioita, niin myös tulo fg on mitallinen.*

Todistus. Kun $\alpha > 0$, pätee

$$\{fg > \alpha\} = \bigcup_{\beta \in \mathbb{Q}_+} \{f > \beta\} \cap \{g > \frac{\alpha}{\beta}\}.$$

Tämän toteaminen jätetään harjoitustehtäväksi. Selvästi oikean puolen joukot ovat mitallisia, mistä vasemman puolen mitallisuus seuraa. □

5.8. **Lause.** *Olkoon $f : \Omega \to [0, \infty]$ mitallinen funktio. Tällöin seuraava kuvaus $\varphi : \mathscr{F} \to [0, \infty]$:*

$$\varphi(E) := \int_E f \, \mathrm{d}\mu,$$

on mitta. Jos $g : \Omega \to [0, \infty]$ on mitallinen funktio, niin

$$\int_\Omega g \, \mathrm{d}\varphi = \int_\Omega gf \, \mathrm{d}\mu. \tag{5.9}$$

Todistus. (1) Todistetaan, että φ on mitta. Tulee tarkistaa:

(i) $\varphi(\varnothing) = 0$. Tämä seuraa, kun havaitaan, että $1_\varnothing \equiv 0$ on identtisesti nollafunktio, ja $\int_\Omega 0 \, \mathrm{d}\mu = 0$.

(ii) Täysadditiivisuus. Olkoon $E = \bigcup_{k=1}^\infty E_k$ mitallisten joukkoejn erillinen yhdiste. Tällöin $1_E = \sum_{k=1}^\infty 1_{E_k}$. Jos merkitään $h := 1_E f$ ja $h_k := 1_{E_k} f$, niin $h = \sum_{k=1}^\infty h_k$. Siis summan ja integraalin vaihtolauseen perusteella

$$\varphi(E) = \int_\Omega h \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \sum_{k=1}^\infty h_k \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^\infty \int_\Omega h_k \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^\infty \varphi(E_k),$$

mikä todistaa täysadditiivisuuden.

(2) Tutkitaan lopuksi väitettä (5.9). Olkoon ensin $g = \sum_{k=1}^K a_k 1_{A_k}$ yksinkertainen. Tällöin

$$\begin{aligned}
\int_\Omega g \, \mathrm{d}\varphi &= \sum_{k=1}^K a_k \varphi(A_k) \\
&= \sum_{k=1}^K a_k \int_\Omega 1_{A_k} f \, \mathrm{d}\mu \\
&= \int_\Omega \sum_{k=1}^K a_k 1_{A_k} f \, \mathrm{d}\mu \qquad \text{(lineaarisuus: lause 5.1 ja lemma 5.5)} \\
&= \int_\Omega gf \, \mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

Olkoon lopuksi g yleinen, ja valitaan kasvava jono yksinkertaisia funktioita $s_n \to g$. Tällöin myös $s_n f$ on kasvava jono, ja $s_n f \to f$. Siis

$$\begin{aligned}
\int_\Omega g \, \mathrm{d}\varphi &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega s_n \, \mathrm{d}\varphi \qquad \text{(monot. suppeneminen)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega s_n f \, \mathrm{d}\mu \qquad \text{(edellä todistettu tapaus)} \\
&= \int_\Omega gf \, \mathrm{d}\mu \qquad \text{(monot. suppeneminen).}
\end{aligned}$$

Lause on kokonaan todistettu. □

5.10. **Esimerkki.** Olkoon $\mu = m$ Lebesguen mitta $\mathbb{R}$:llä (vrt. esimerkki 2.5(2)). Myöhemmin osoitetaan, että jokainen Riemannin mielessä integroituva funktio $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ on myös Lebesguen mielessä integroituva (ja erityisesti mitallinen). Jos

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

niin edellisen lauseen mukainen φ määrittelee todennäköisyysmitan ns. normaalijakaumalle. Erityisesti

$$\varphi(E) = \int_E \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \,\mathrm{d}m(x)$$

on todennäköisyys, että normaalijakautunut satunnaismuuttuja saa arvon joukossa E. Integraalit todennäköisyysmitan φ suhteen voidaan edellisen lauseen mukaisesti laskea integraaleina Lebesguen mitan suhteen ja edelleen tärkeissä erikoistapauksissa – kuten myöhemmin osoitetaan – tuttuina Riemannin integraaleina.

6. Viritetty σ-algebra, Borelin σ-algebra

Todetaan lämmittelynä seuraava:

6.1. **Lemma.** *Olkoon $f : \Omega \to \mathbb{R}$ funktio. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

(1) $\{f > \alpha\}$ *on mitallinen kaikilla* $\alpha \in \mathbb{R}$.
(2) $\{f \geq \alpha\}$ *on mitallinen kaikilla* $\alpha \in \mathbb{R}$.
(3) $\{f \in A\}$ *on mitallinen kaikilla avoimilla joukoilla* $A \subset \mathbb{R}$.

Todistus. (1)$\Leftrightarrow$(2): lemma 4.8.

(3)$\Rightarrow$(1): $\{f > \alpha\} = \{f \in (\alpha, \infty)\}$ ja joukko (α, ∞) on avoin.

(1+2)$\Rightarrow$(3): Todetaan, että avoin joukko $A \subset \mathbb{R}$ voidaan esittää muodossa

$$A = \bigcup_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbb{Q} \\ (\alpha,\beta)\subset A}} (\alpha, \beta),$$

(sivuutetaan tässä, sillä yleisempi versio on osana lauseen 6.5 todistusta) joten

$$\{f \in A\} = \bigcup_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbb{Q} \\ (\alpha,\beta)\subset A}} \{f \in (\alpha, \beta)\} = \bigcup_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbb{Q} \\ (\alpha,\beta)\subset A}} \{f > \alpha\} \setminus \{f \geq \beta\},$$

on kohdissa (1) ja (2) esiintyvien joukkojen erotusten numeroituva yhdiste, ja sellaisena mitallinen. □

Tuloksen taustalla oleva yleisempi ilmiö on se, että kokoelmat

$$\{(\alpha, \infty) : \alpha \in \mathbb{R}\}, \qquad \{[\alpha, \infty) : \alpha \in \mathbb{R}\}, \qquad \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ avoin}\}$$

virittävät saman σ-algebran. Mitä tämä tarkoittaa?

Merkitään symbolilla

$$\mathscr{P}(\Omega) : \{E : E \subset \Omega\}$$

joukon Ω kaikkien osajoukkojen kokoelmaa eli ns. potenssijoukkoa.

6.2. **Lause.** *Olkoon $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}(\Omega)$, eli $\mathscr{E}$ on jokin kokoelma Ω:n osajoukkoja. Tällöin on olemassa pienin σ-algebra $\mathscr{F} \supset \mathscr{E}$, t.s. sellainen kokoelma $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(\Omega)$, että*

(1) $\mathscr{E} \subset \mathscr{F}$.
(2) $\mathscr{F}$ *on* σ*-algebra.*
(3) *Jos* $\mathscr{G}$ *on myös* σ*-algebra ja* $\mathscr{E} \subset \mathscr{G}$*, niin* $\mathscr{E} \subset \mathscr{F}$.

Ehto (3) täsmentää, mitä tarkoitetaan sillä, että $\mathscr{F}$ on *pienin* $\mathscr{E}$:n sisältävä σ-algebra. Kokoelmaa $\mathscr{F}$ kutsutaan $\mathscr{E}$:n *virittämäksi σ-algebraksi* ja merkitään $\sigma(\mathscr{E}) := \mathscr{F}$. (Vertaa: Jos $\mathscr{V}$ on joukko vektoreita, niin sen *virittämä aliavaruus* on pienin aliavaruus, joka sisältää $\mathscr{V}$:n. Viritetty aliavaruus saadaan muodostamalla kaikki alkuperäisten vektoreiden lineaarikombinaatiot. Sen sijaan viritetyn σ-algebran sisältöä on yleensä vaikea kuvailla, ja yllä oleva lause onkin puhdas olemassaolotulos.)

Todistus. Tarkastellaan seuraavaa joukkokokoelmien perhettä:

$$\Theta := \{\mathscr{G} \subset \mathscr{P}(\Omega) : \mathscr{E} \subset \mathscr{G},\ \mathscr{G} \text{ on } \sigma\text{-algebra}\}.$$

Havaitaan, että $\mathscr{P}(\Omega) \in \Theta$ (selvästi tämä on σ-algebra ja sisältää $\mathscr{E}$:n), joten $\Theta \neq \varnothing$. Merkitään sitten

$$\mathscr{F} := \bigcap_{\mathscr{G} \in \Theta} \mathscr{G}.$$

Tavoitteena on osoittaa, että $\mathscr{F}$ toteuttaa lauseen vaatimukset.

(1) Koska $\mathscr{E} \subset \mathscr{G}$, niin $\mathscr{E} \subset \bigcap_{\mathscr{G}\in\Theta} \mathscr{G} = \mathscr{F}$.

(3) Jos $\mathscr{G}'$ on σ-algebra ja $\mathscr{E} \subset \mathscr{G}'$, niin $\mathscr{G}' \in \Theta$, joten $\mathscr{F} = \bigcap_{\mathscr{G}\in\Theta} \mathscr{G} \subset \mathscr{G}'$ (leikkaus sisältyy kuhunkin leikkauksessa mukana olevaan joukkoon).

(2) On vielä todettava, että $\mathscr{F}$ on σ-algebra.

(i) Koska $\Omega \in \mathscr{G}$ kaikilla $\mathscr{G} \in \Theta$ (koska kukin näistä on σ-algebra), niin $\Omega \in \bigcap_{\mathscr{G}\in\Theta} \mathscr{G} = \mathscr{F}$.

(ii) Olkoot $F_k \in \mathscr{F}$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots$ Siis $F_k \in \mathscr{G}$ kaikilla $\mathscr{G} \in \Theta$ ja $k = 1, 2, \ldots$. Koska kukin $\mathscr{G} \in \Theta$ on σ-algebra, niin $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \in \mathscr{G}$ kaikilla $\mathscr{G} \in \Theta$. Siis $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \in \mathscr{F}$.

(iii) Jos $F \in \mathscr{F}$, niin $F^c \in \mathscr{F}$ todistetaan aivan vastaavasti kuin kohta (ii).

Nyt kaikki kohdat on todettu. □

Lemman 6.1 taustalla oleva yleisempi ilmiö on seuraava:

6.3. **Lause.** *Olkoon $f : \Omega \to Y$ (jokin maalijoukko) funktio. Olkoot $\mathscr{A}, \mathscr{B} \subset \mathscr{P}(Y)$ kokoelmia, jotka virittävät saman Y-joukon σ-algebran $\mathscr{C} := \sigma(\mathscr{A}) = \sigma(\mathscr{B})$. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä:*

(1) *$\{f \in A\}$ on mitallinen kaikilla $A \in \mathscr{A}$.*
(2) *$\{f \in B\}$ on mitallinen kaikilla $B \in \mathscr{B}$.*
(3) *$\{f \in C\}$ on mitallinen kaikilla $C \in \mathscr{C}$.*

Todistus. (3)⇒(1): Selvä: Koska $\mathscr{A} \subset \sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{C}$, niin jokainen $A \in \mathscr{A}$ toteuttaa myös $A \in \mathscr{C}$.

(1)⇒(3): Todistetaan ensin, että kokoelma

$$\mathscr{E} := \{E \subset Y : \{f \in E\} \text{ on mitallinen}\}$$

on joukon Y (ei siis Ω:n, kuten yleensä) σ-algebra.

(i) Nyt on todettava, että $Y \in \mathscr{E}$. Mutta $\{f \in Y\} = \Omega$, koska kaikki funktion $f : \Omega \to Y$ arvot kuuluvat maalijoukkoon Y, ja Ω on mitallinen. Siis $Y \in \mathscr{E}$.

(iii) Olkoon $E \in \mathscr{E}$, joten $\{f \in E\}$ on mitallinen. Nyt

$$\{f \in E^c\} = \{f \notin E\} = \{f \in E\}^c$$

on myös mitallinen mitallisen joukon komplemettina.

(ii) Yhdistettä koskeva väite todistetaan aivan vastaavasti.

On siis saatu, että $\mathscr{E}$ on σ-algebra. Oletuksen perusteella $\mathscr{A} \subset \mathscr{E}$ (sillä $\{f \in A\}$ on mitallinen kaikilla $A \in \mathscr{A}$). Koska $\mathscr{C} := \sigma(\mathscr{A})$ on pienin $\mathscr{A}$:n sisältävä σ-algebra, on oltava $\mathscr{C} \subset \mathscr{E}$. Määritelmän perusteella tämä tarkoittaa, että $\{f \in C\}$ on mitallinen kaikilla $C \in \mathscr{C}$, mikä todistaa väitteen (3).

(2)⇔(3) seuraa symmetrian perusteella jo todistetusta osasta (1)⇔(3), sillä kokoelmia $\mathscr{A}$ ja $\mathscr{B}$ koskevat oletukset ovat täysin samat. □

Erittäin tärkeä yksittäinen σ-algebra on seuraava:

6.4. **Määritelmä** (Borelin σ-algebra)**.** Avaruuden $\mathbb{R}^d$ Borelin σ-algebra on kaikkien avoimien joukkojen virittämä σ-algebra, ts.

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}^d) := \sigma(\{A \subset \mathbb{R}^d : A \text{ avoin}\}).$$

Sama σ-algebra voidaan virittää usealla eri tavalla. Kun $a = (a_i)_{i=1}^d, b = (b_i)_{i=1}^d \in \mathbb{R}^d$, merkitään

$$(a, b) := (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_d, b_d) \subset \mathbb{R}^d$$

näiden vektoreiden väliin jäävää avointa suorakaidetta.

6.5. **Lause.** *Suorakaiteet $(a, b) \subset \mathbb{R}^d$, missä $a, b \in \mathbb{R}^d$, virittävät Borelin σ-algebran.*

Todistus. Merkitään suorakaiteiden kokoelmaa $\mathscr{R}$:llä ja kaikkien avoimien joukkojen kokoelmaa $\mathscr{A}$:lla. Selvästi $\mathscr{R} \subset \mathscr{A}$, ja on osoitettava, että $\sigma(\mathscr{R}) = \sigma(\mathscr{A})$.

$\subset$: Koska $\mathscr{R} \subset \mathscr{A} \subset \sigma(\mathscr{A})$, niin $\sigma(\mathscr{A})$ on eräs $\mathscr{R}$:n sisältävä σ-algebra. Siis pienin tällainen σ-algebra toteuttaa $\sigma(\mathscr{R}) \subset \sigma(\mathscr{A})$.

$\supset$: Väitetään, että

$$A = \bigcup_{\substack{\alpha,\beta \in \mathbb{Q}^d \\ (\alpha,\beta) \subset A}} (\alpha, \beta). \tag{6.6}$$

Tässä $\supset$ on selvä, joten on tarkistettava $\subset$. Olkoon $x = (x_i)_{i=1}^d \in A$. Avoimuudesta seuraa, että pallo on olemassa $B(x, r) \subset A$ jollakin säteellä $r > 0$. Tutkitaan sitten kuutioita

$$Q := (x_1 - r/\sqrt{d}, x_1 + r/\sqrt{d}) \times \cdots \times (x_d - r/\sqrt{d}, x_d + r/\sqrt{d}).$$

Jos $y \in Q$, niin $|y_i - x_i| < r/\sqrt{d}$ kaikilla $i = 1, \ldots, d$, joten

$$|y - x| = \Big(\sum_{i=1}^d |y_i - x_i|^2\Big)^{1/2} < \Big(\sum_{i=1}^d \frac{r^2}{d}\Big)^{1/2} = \Big(d \cdot \frac{r^2}{d}\Big)^{1/2} = r,$$

siis $|y-x| < r$ ja siis $y \in B(x, r)$. Koska $y \in Q$ oli mielivaltainen, niin $Q \subset B(x, r) \subset A$.

Nyt riittää valita kaikilla $i = 1, \ldots, d$ jotkin rationaaliluvut

$$\alpha_i \in (x_i - r/\sqrt{d}, x_i), \qquad \beta_i \in (x_i, x_i + r/\sqrt{d}).$$

Tällöin $x_i \in (\alpha_i, \beta_i) \subset (x_i - r/\sqrt{d}, x_i + r/\sqrt{d})$ ja täten

$$x \in (\alpha, \beta) := (\alpha_1, \beta_1) \times \cdots \times (\alpha_d, \beta_d) \subset Q \subset B(x, r) \subset A.$$

Erityisesti x sisältyy yhteen kaavan (6.6) oikean puolen yhdisteessä esiintyvään suorakaiteeseen (α, β), ja siten ko. yhdisteeseen. Koska $x \in A$ oli mielivaltainen, tämä osoittaa kaavassa (6.6) suunnan $\subset$. Siis ko. kaava on todistettu.

Kaavasta (6.6) seuraa, että $A \in \sigma(\mathscr{R})$, koska selvästi ko. numeroituvan yhdisteen on kuuluttava suorakaiteiden virittämään σ-algebraan. Siis $\mathscr{A} \subset \sigma(\mathscr{R})$ ja täten (miksi?) $\sigma(\mathscr{A}) \subset \sigma(\mathscr{R})$. □

6.7. **Lause.** *Kun $d = 1$, niin lisäksi*

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{(\alpha, \infty) : \alpha \in \mathbb{R}\}) = \sigma(\{[\alpha, \infty) : \alpha \in \mathbb{R}\})$$

Todistus. Oleellisesti samanlainen, kuin lemman 6.1 todistus. □

6.8. **Lause.** *Olkoon $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ funktio. Seuraavat ovat yhtäpitäviä:*

(1) *$\{f \in (\alpha, \beta)\}$ on mitallinen kaikilla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^d$.*

(2) *$\{f \in A\}$ on mitallinen kaikilla avoimilla $A \subset \mathbb{R}^d$.*
(3) *$\{f \in E\}$ on mitallinen kaikilla $E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$.*

Todistus. Seuraa suoraan lauseesta 6.3 sovellettuna kokoelmiin $\mathscr{A} := \{A \subset \mathbb{R}^d : A \text{ avoin}\}$ ja $\mathscr{B} := \{(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}^d\}$, jotka virittävät saman σ-algebran $\mathscr{C} := \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ lauseen 6.5 perusteella. □

6.9. **Määritelmä.** Funktio $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ on mitallinen, jos se toteuttaa lauseen 6.8.

Huomaa, että lemman 6.1 perusteella tämä määritelmä on yhtäpitävä aiemmin annetun kanssa, kun $d = 1$.

Seuraava jatkuvien ja mitallisten funktioiden yhteispeli on erittäin hyödyllinen:

6.10. **Lause** (Jatkuvan ja mitallisen yhdistetty kuvaus)**.** *Olkoon $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ mitallinen ja $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ jatkuva. Tällöin yhdistetty kuvaus $\phi \circ f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ on mitallinen.*

Todistus. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^m$ avoin. Sen alkukuva $\phi^{-1}(A) = \{y \in \mathbb{R}^d : \phi(y) \in A\}$ jatkuvassa kuvauksessa ϕ on myös avoin. Siis

$$\{\phi \circ f \in A\} = \{x \in \Omega : \phi(f(x)) \in A\} = \{x \in \Omega : f(x) \in \phi^{-1}(A)\}$$

on mitallinen avoimen joukon $\phi^{-1}(A)$ alkukuvana mitallisessa kuvauksessa f. □

Huomataan, että funktio $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ voidaan samaistaa komponenttifunktioittensa vektoriin $(f_i)_{i=1}^d$, missä kukin $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$: jokaisessa pisteessä $x \in \Omega$, on funktion f arvo $f(x)$ jokin $\mathbb{R}^d$:n vektori, jota merkitään $(f_i(x))_{i=1}^d$. Tämän vektorin kukin komponentti määrittää funktion $f_i : \Omega \to \mathbb{R}^d$.

6.11. **Lause.** *Funktio $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ on mitallinen jos ja vain jos sen kukin komponentti $f_i : \Omega \to \mathbb{R}^d$ on mitallinen.*

Todistus. Olkoon kukin f_i mitallinen. Tarkastetaan f:n mitallisuus käyttämällä lauseen 6.8 ehtoa (1): on siis tutkittava joukkoa

$$\{f \in (\alpha, \beta)\} = \{(f_i)_{i=1}^d = (\alpha_1, \beta_1) \times \cdots \times (\alpha_d, \beta_d)\} = \bigcap_{i=1}^d \{f_i \in (\alpha_i, \beta_i)\},$$

ja tässä leikkauksessa jokainen joukko on mitallinen komponenttifunktioiden f_i mitallisuuden perusteella. Siis f on mitallinen.

Olkoon sitten f mitallinen. Merkitään π_i:llä projektioita $\pi_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} : x = (x_j)_{j=}^d \mapsto x_i$. Tällöin $\pi_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja $f_i = \pi_i \circ f$. Siis f_i on mitallinen lauseen 6.10 nojalla. □

Edellisistä lauseesta on helppo johtaa monenlaisia mitalisuustuloksia, esimerkiksi:

6.12. **Seuraus.** *Olkoot $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ mitallisia. Tällöin myös funktiot $f + g$, $f \cdot g$, $\max(f, g)$ ja $\min(f, g)$ ovat mitallisia.*

Todistus. Tämä seuraa kirjoittamalla

$$f + g = \phi_1 \circ F, \qquad f \cdot g = \phi_2 \circ F, \qquad \max(f, g) = \phi_3 \circ F, \qquad \min(f, g) = \phi_4 \circ F,$$

missä $F : \Omega \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto (f(x), g(x))$ on mitallinen lauseen 6.11 perusteella, ja funktiot $\phi_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, missä

$$\phi_1(x, y) = x + y, \quad \phi_2(x, y) = x \cdot y, \quad \phi_3(x, y) = \max(x, y), \quad \phi_4(x, y) = \min(x, y),$$

ovat kaikki jatkuvia. □

7. Integroituvat funktiot ja lisää suppenemistuloksia

7.1. Määritelmä. Lukujonon $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ala- ja yläraja-arvo määritellään

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k, \qquad \limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k.$$

Koska $b_n := \inf_{k\geq n} a_k$ on kasvava n:n suhteen, niin $\lim_{n\to\infty} b_n = \sup_{n\geq 1} b_n$ on olemassa (mahdollisesti laajennetussa reaalilukujoukossa $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$). Vastaavasti $c_n := \sup_{k\geq n} a_k$ on vähenevä n:n suhteen, joten $\lim_{n\to\infty} c_n = \inf_{n\geq 1} b_n$ on olemassa. Lisäksi $b_n \leq a_n \leq c_n$, joten $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$.

7.2. Lause. *Lukujonolla $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ on raja-arvo (mahdollisesti laajennetussa reaalilukujoukossa $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$) jos ja vain jos $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$, ja tällöin*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Todistus. Suoraviivainen analyysin harjoitus, sivuutetaan. □

Funktiojonon $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ala-, ylä- ja tavallinen raja-arvo määritellään pisteittäin. Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ mitallisuus määritellään kuten funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (ts. vaatimalla, että $\{f > \alpha\}$ on mitallinen kaikilla $\alpha \in \mathbb{R}$.

7.3. Lause. *Olkoon $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jono mitallisia funktioita. Tällöin myös seuraavat funktiot ovat mitallisia:*

(1) $\liminf_{n\to\infty} f_n$.
(2) $\limsup_{n\to\infty} f_n$.
(3) $\lim_{n\to\infty} f_n$, *jos se on olemassa.*

Todistus. (1): Todetaan ensin, että $g_n := \inf_{k\geq n} f_k$ on mitallinen. Tämä seuraa havaitsemalla, että

$$\{g_n \geq \alpha\} = \bigcap_{k\geq n} \{f_k \geq \alpha\}.$$

Nyt $\liminf_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} g_n$ on kasvavan mitallisen jonon raja-arvona mitallinen, kuten todettiin osana monotonisen suppenemisen lausetta.

(2): Voidaan todistaa joko samaan tapaan kuin (1), tai havaitsemalla, että

$$\limsup_{n\to\infty} f_n = -\liminf_{n\to\infty} (-f_n),$$

missä sekä miinus merkki (helppoa) että liminf (kohdan (1) perusteella) säilyttävät mitallisuuden.

(3): Seuraa esim. kohdasta (1), sillä jos raja-arvo on olemassa, se on sama kuin alaraja-arvo, joka jo todettiin mitalliseksi. □

7.4. Lause (Fatoun lemma). *Olkoon $f_n : \Omega \to [0, \infty]$ mitallisia funktioita. Tällöin*

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Todistus. Merkitään $g_n := \inf_{k\geq n} f_k$, jolloin $0 \leq g_n \leq g_{n+1} \to \liminf_{n\to\infty} f_n$, ja lisäksi $g_n \leq f_n$. Näistä seuraa, että

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu &= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} g_n \,\mathrm{d}\mu \quad \text{(alaraja-arvon määritelmä)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n \,\mathrm{d}\mu \quad \text{(monotonisen suppenemisen lause)} \\
&= \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega g_n \,\mathrm{d}\mu \quad \text{(lim = liminf, jos olemassa)} \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \quad \text{(integraalin ja liminf:in monotonisuus).}
\end{aligned}$$

Tässä väite olikin. □

7.5. **Huomautus.** Fatoun lemman epäyhtälön suunnan voi palauttaa mieleen seuraavalla esimerkillä. Olkoot $A_0, A_1 \subset \Omega$ erillisiä joukkoja, joilla $\mu(A_i) = 1$, ja olkoon $f_{2n+i} = 1_{A_i}$ kaikilla $n = 0, 1, 2, \dots$ ja $i = 0, 1$. Nyt kussakin pisteessä $x \in \Omega$, jono $f_n(x)$ koostuu joko pelkistä nollista (jos $x \notin A_0 \cup A_1$) tai vuorotellen nollista ja ykkösistä. Joka tapauksessa jonon alaraja-arvo on nolla, eli $\liminf_{n\to\infty} f_n = 0$, ja sen integraali on myös nolla. Toisaalta $\int_\Omega f_{2n+i}\,\mathrm{d}\mu = \mu(A_i) = 1$ kaikilla indekseillä, joten $\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\,\mathrm{d}\mu = \liminf_{n\to\infty} 1 = 1$. Fatoun lemma pätee muodossa $0 \le 1$, mikä samalla osoittaa, että myös aito "$<$" voi toteutua.

7.6. **Määritelmä.** Funktio $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ on integroituva, jos:

(1) f on mitallinen, ja
(2) $\int_\Omega |f|\,\mathrm{d}\mu < \infty$.

Koska $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, x \mapsto |x| = \left(\sum_{i=1}^d |x_i|^2\right)^{1/2}$ on jatkuva, niin $|f| = \phi \circ f$ on mitallinen, ja selvästi ei-negatiivinen. Siis kohdassa (2) esiintyvä integraali on määritelty aiemmin esitetyn teorian mukaisesti. Yleisesti positiivisen funktion integraali saa arvon väliltä $[0, \infty]$? joten ehdon (2) lisävaatimus on, että arvo ∞ suljetaan pois.

Huomaa myös, että vaikka määrittelimme, millainen f on *integroituva* emme vielä ole määritelleet f:n *integraalia*. Ennen kuin teemme sen, todistetaan seuraava:

7.7. **Lause** (Dominoitu suppeneminen, versio 1)**.** *Olkoot $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$ integroituvia funktioita, joilla $f_n \to f$, ja lisäksi $|f_n| \le g$, missä g on integroituva. Tällöin f on integroituva, ja*

$$\int_\Omega |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu \to 0.$$

Todistus. Rajafunktion mitallisuus seuraa lauseista 6.11 ja 7.3: Koska $f_n \to f$, niin kukin komponenttifunktio f_n^i lähestyy f:n vastaavaa komponenttifunktiota f^i. Koska reaaliarvoiset komponentit f_n^i ovat mitallisia, myös niiden rajafunktio f^i on mitallinen. Kun tämä pätee kaikilla $i = 1, \dots, d$, myös vektorifunktio $f = (f^i)_{i=1}^d$ on mitallinen.

Koska kukin $|f_n| \le g$, myös rajafunktio toteuttaa $|f| \le g$, joten $\int_\Omega |f|\,\mathrm{d}\mu \le \int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu < \infty$. Siis f on integroituva. Lisäksi $|f_n - f| \le |f_n| + |f| \le g + g = 2g$.

Tarkastellan sitten mitallisia funktioita $g_n := 2g - |f_n - f| \ge 0$. Oletuksen nojalla $\lim_{n\to\infty} g_n = 2g$, joten Fatoun lemmasta seuraa, että

$$\begin{aligned}
\int_\Omega 2g\,\mathrm{d}\mu &= \int_\Omega \liminf_{n\to\infty}(2g - |f_n - f|)\,\mathrm{d}\mu \\
&\le \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega (2g - |f_n - f|)\,\mathrm{d}\mu \qquad \text{(Fatou)} \\
&= \liminf_{n\to\infty} \Big(\int_\Omega 2g\,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega |f_n - f|)\,\mathrm{d}\mu \Big) \\
&= \int_\Omega 2g\,\mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f|)\,\mathrm{d}\mu,
\end{aligned}$$

missä toiseksi viimeinen vaihe seuraa yhtälöstä $\int_\Omega (h_1 + h_2)\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega h_1\,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega h_2\,\mathrm{d}\mu$ sovellettuna positiivisiin funktioihin $h_1 = 2g - |f_n - f|$ ja $h_2 = |f_n - f|$, ja viimeinen vaihe ala- ja yläraja-arvojen helposti todettavista ominaisuuksista.

Lauseketta sieventämällä (Tässä on oleellista, että $\int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu < \infty$, mikä oletettiin – ei voi "puolittain vähentää ääretöntä"!) saadaan

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f|)\,\mathrm{d}\mu \le 0,$$

ja tästä väite seuraa, sillä selvästi $\int_\Omega |f_n - f|)\,\mathrm{d}\mu \geq 0$ kaikilla n. (Jos $a_n \geq 0$ ja $\limsup a_n = 0$, niin $0 \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq 0$, mistä seuraa, että $\liminf a_n = \limsup a_n = 0$, jolloin myös $\lim a_n = 0$.) $\square$

Annetaan nyt seuraava määritelmä, joka kuitenkin vaatii useita selvennyksiä ollakseen käyttökelpoinen:

7.8. **Määritelmä.** Integroituvan funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ integraali on

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu := \lim_{n\to\infty} \int_\Omega s_n\,\mathrm{d}\mu, \tag{7.9}$$

missä $s_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$ on jono yksinkertaisia funktioita, joilla $s_n \to f$ ja $\sup_n |s_n|$ on integroituva.

7.10. **Huomautus.** Yksinkertainen funktio määritellään kuten ennenkin:

$$s = \sum_{k=1}^K a_k 1_{A_k},$$

missä joukot A_k muodostavat mitallisen osituksen ja $a_k \in \mathbb{R}^d$. Tällaisen funktion integraali on tietenkin

$$\int_\Omega s\,\mathrm{d}\mu := \sum_{k=1}^K a_k \mu(A_k) \qquad (\vec{0}\cdot\infty := \vec{0}) \tag{7.11}$$

Oletus integroituvuudesta takaa sen, että tämä lasku on hyvin määritelty. Nimittäin

$$\int_\Omega |s|\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \Big(\sum_{k=1}^K |a_k| 1_{A_k}\Big)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^K |a_k|\mu(A_k) < \infty \tag{7.12}$$

takaa sen, että jos $\mu(A_k) = \infty$, niin $a_k = 0$ (nollavektori!).

Vielä tarvitaan kuitenkin seuraavia seikkoja, joihin kohta paneudutaan tarkemmin:

- Integraalin määritelmässä esiintyviä yksinkertaisten funktioiden jonoja on olemassa. Tämä osoitetaan soveltamalla aiemmin $[0,\infty]$-arvoisille funktioille todistettua tulosta komponenteittain.
- Integraalin määritelmässä esiintyvä raja-arvo on olemassa. Itse asiassa osoitetaan dominoidun suppenemisen avulla, että integraalit $\int_\Omega s_n\,\mathrm{d}\mu$ muodostavat Cauchyn jonon. Lisäksi on tarkistettava, että raja-arvo ei riipu valitusta jonosta s_n.

7.13. **Lemma.** *Integroituvan yksinkertaisen funktion integraali*

(1) *on hyvin määritelty (erityisesti ei riipu vaitusta s:n esityksestä),*
(2) *on lineaarinen, ts.*

$$\int_\Omega (s_1 \pm s_2)\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega s_1\,\mathrm{d}\mu \pm \int_\Omega s_2\,\mathrm{d}\mu, \qquad \int_\Omega \alpha s\,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_\Omega s\,\mathrm{d}\mu$$

kaikilla yksinkertaisilla $s, s_1, s_2 : \Omega \to \mathbb{R}^d$ ja skalaareilla $\alpha \in \mathbb{R}$,

(3) *ja toteuttaa epäyhtälön*

$$\Big|\int_\Omega s\,\mathrm{d}\mu\Big| \leq \int_\Omega |s|\,\mathrm{d}\mu.$$

Todistus. (1): s:n integroituvuus (7.12) tarkoittaa erityisesti, että $|a_k|\mu(A_k) < \infty$ kaikilla k. Siis jos $\mu(A_k) = \infty$, niin täytyy olla $|a_k| = 0$, jolloin $a_k = \vec{0}$ (nollavektori). Tällöin sopimuksen mukaan $a_k\mu(A_k) = \vec{0}$. Jos taas $\mu(A_k) < \infty$, niin $a_k\mu(A_k)$ on tavallinen vektorin $a_k \in \mathbb{R}^d$ ja skalaarin $\mu(A_k) \in \mathbb{R}$ tulo, siis jokin $\mathbb{R}^d$:n vektori.

Täten (7.11):n oikean puolen summalauseke on jokin $\mathbb{R}^d$:n vektoreiden summa ja siis mielekäs lauseke.

Jos s:llä on toinenkin esitys $s = \sum_{j=1}^J b_j 1_{B_j}$, niin aivan kuten lemman 3.2 todistuksessa nähdään, että $a_k\mu(A_k \cap B_j) = b_j\mu(A_k \cap B_j)$ kaikilla k ja j, ja tästä seuraa (kuten mainitussa todistuksessa), että $\sum_{k=1}^K a_k\mu(A_k) = \sum_{j=1}^J b_j\mu(B_j)$.

(2): Summaa ja erotusta koskeva todistus on aivan sama kuin lauseen 5.1 todistuksen vaihe (3). Skalaarilla kertomista koskeva väite on helppo suoraan määritelmästä.

(3): Seuraa vertaamalla kaavoja (7.11) ja (7.12) sekä käyttämällä $\mathbb{R}^d$:n kolmioepäyhtälöä:

$$\begin{aligned}\Big|\int_\Omega s\,\mathrm{d}\mu\Big| &= \Big|\sum_{k=1}^K a_k\mu(A_k)\Big| \qquad (7.11)\\ &\le \sum_{k=1}^K |a_k|\mu(A_k) \qquad \text{(kolmioepäyhtälö)}\\ &\le \int_\Omega |s|\,\mathrm{d}\mu. \qquad (7.12)\end{aligned}$$

□

Seuraava lause takaa, että määritelmän mukaisia yksinkertaisia jonoja on olemassa.

7.14. **Lause.** *Olkoon $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ mitallinen. Tällöin on olemassa yksinkertaiset funktiot s_n, jotka toteuttavat $s_n \to f$ ja $|s_n| \le |f|$.*

Erityisesti jos $|f|$ on integroituva, niin myös $\sup_n |s_n| \le |f|$ on integroituva.

Todistus. Lause voitaisiin todistaa "elegantimminkin", mutta tyydytään tässä palauttamaan se jo tunnettuun tilanteeseen (lause 4.9) positiivisista mitallisista funktioista yksinkertaisten kasvavina rajoina. Idea on hyvin yksinkertainen: Tarkastellaan funktion $f = (f_i)_{i=1}^d$ kutakin komponenttia, joka on mitallinen funktio $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$, ja vielä erikseen sen positiivista ja negatiivista osaa

$$f_i^+ := \max(f_i, 0), \qquad f_i^- := -\min(f_i, 0),$$

jotka ovat mitallisia funktioita $f_i^\pm : \Omega \to [0, \infty]$. Valitaan lauseen 4.9 avulla kasvavat yksinkertaiset jonot $0 \le s_{i,n}^\pm \to f_i^\pm$ ja kootaan palat yhteen:

$$s_{i,n} := s_{i,n}^+ - s_{i,n}^-, \qquad s^n := (s_{i,n})_{i=1}^d.$$

Nyt pätee:

- $s_{i,n} \to f_i^+ - f_i^- = f_i$, joten $s^n \to (f_i)_{i=1}^d = f$.
- Kukin $s^n : \Omega \to \mathbb{R}^d$ on yksinkertainen. (Vektorifunktio on yksinkertainen jos ja vain jos sen komponentit ovat. Väite lienee uskottava, vaikkakin kaavoin kirjoitettuna hiukan suttuinen.)
- Korkeintaan yksi funktioista f_i^+ ja f_i^- poikkeaa nollasta kussakin pisteessä. Koska $0 \le s_{i,n}^\pm \le f_i^\pm$, seuraa tästä, että korkeintaan yksi funktioista $s_{i,n}^+$ ja $s_{i,n}^-$ poikkeaa nollasta kussakin pisteessä. Siis

  $$|s_{i,n}| = s_{i,n}^+ + s_{i,n}^- =\le f_i^+ = f_i^- = |f_i|,$$

  ja edelleen

  $$|s^n| = \Big(\sum_{i=1}^d |s_{i,n}|^2\Big)^{1/2} \le \Big(\sum_{i=1}^d |f_i|^2\Big)^{1/2} = |f|.$$

Koko väite on todistettu. □

Nyt ollaan valmiita perustelemaan määritelmän 7.8 mielekkyys:

7.15. **Lause.** *Integroituvan funktion integraali*

(1) *on hyvin määritelty (raja-arvo* (7.9) *on olemassa eikä riipu jonosta* s_n*),*
(2) *on lineaarinen,*
(3) *ja toteuttaa epäyhtälön*

$$\Big|\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu\Big| \leq \int_\Omega |f|\,\mathrm{d}\mu. \tag{7.16}$$

Todistus. (1): Olkoon s_n määritelmän 7.8 mukainen jono yksinkertaisia funktioita. Näiden integraalit $\int_\Omega s_n\,\mathrm{d}\mu$ on hyvin määritelty lemman 7.13 nojalla. Todistetaan, että $(\int_\Omega s_n\,\mathrm{d}\mu)_{n=1}^\infty$ on Cauchyn jono, jolloin sillä on raja-arvo avaruuden $\mathbb{R}^d$ täydellisyyden perusteella: Valitaan jonot $n_k, m_k \to \infty$. Tällöin

$$\begin{aligned}\Big|\int_\Omega s_{n_k}\,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega s_{m_k}\,\mathrm{d}\mu\Big| &= \Big|\int_\Omega (s_{n_k} - s_{m_k})\,\mathrm{d}\mu\Big| \\ &= \int_\Omega |s_{n_k} - s_{m_k}|\,\mathrm{d}\mu =: \int_\Omega |f_k|\,\mathrm{d}\mu.\end{aligned} \tag{7.17}$$

Tässä funktio $f_k = s_{n_k} - s_{m_k} \to f - f = 0$, kun $k \to \infty$. Toisaalta $|f_k| \leq |s_{n_k}| + |s_{m_k}| \leq 2\sup_n |s_n| =: g$, missä g on integroituva jonoa s_n koskevan oletuksen perusteella. Siis dominoidun suppenemisen lause 7.7 takaa, että

$$\int_\Omega |f_k|\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega |f_k - 0|\,\mathrm{d}\mu \to 0,$$

mikä yhdessä (7.17):ksen kanssa todistaa halutuun Cauchyn jono -ominaisuuden.

Olkoon sitten s'_n toinen vastaava jono yksinkertaisia funktioita. Tarkastellaan vielä kolmatta jonoa s''_n, missä $s''_{2n-1} := s_n$ ja $s''_{2n} := s'_n$. Nyt tämäkin on vastaava jono: $s''_n \to f$ ja $\sup_n |s''_n| \leq \sup_n |s_n| + \sup_n |s'_n|$ on integroituva. Siis jo todistetun nojalla on jonolla $v_n := \int_\Omega s''_n\,\mathrm{d}\mu$ raja-arvo v. Mutta tällöin molemmilla osajonoilla $(v_{2n-1})_{n=1}^\infty$ ja $(v_{2n})_{n=1}^\infty$ on sama raja-arvo v. Siis integraaleilla $\int_\Omega s_n\,\mathrm{d}\mu = v_{2n-1}$ ja $\int_\Omega s'_n\,\mathrm{d}\mu = v_{2n}$ on sama raja-arvo. (Tässä esiintyvä päättely soveltuu varsin yleisesti vastaavan tapaisiin tilanteisiin.)

(2,3): Loput väittämät seuraavat nyt suoraviivaisesti yksinkertaisten funktioiden integraalin vastaavista ominaisuuksista. Esim. lineaarisuus: Olkoot $s_n \to f_1$ ja $s'_n \to f_2$ määritelmän (7.8) mukaisia jonoja. Tällöin $s_n \pm s'_n \to f_1 \pm f_2$ on myös vastaava jono; erityisesti

$$\sup_n |s_n + s'_n| \leq \sup_n |s_n| + \sup_n |s'_n|$$

on integroituva. Siis

$$\begin{aligned}\int_\Omega f_1\,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega f_2\,\mathrm{d}\mu &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega s_n\,\mathrm{d}\mu + \lim_{n\to\infty}\int_\Omega s'_n\,\mathrm{d}\mu \\ &= \lim_{n\to\infty}\Big(\int_\Omega s_n\,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega s'_n\,\mathrm{d}\mu\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega (s_n + s'_n)\,\mathrm{d}\mu \\ &= \int_\Omega (f_1 + f_2)\,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Vakiolla kertomista koskeva väite ja epäyhtälö (7.16) todistetaan aivan vastaavasti. □

Helppona seurauksena saadaan nyt:

7.18. **Lause** (Dominoitu suppeneminen, versio 2). *Olkoot* $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *jono mitallisia funktioita, joilla on pisteittäinen raja-arvo* $\lim_{n\to\infty} f_n$ *ja integroituva dominoiva funktio* $g \geq |f_n|$. *Tällöin*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Todistus. Merkitään $f := \lim_{n\to\infty} f_n$. Nyt

$$\begin{aligned} \Big| \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \Big| &= \Big| \int_\Omega (f_n - f) \,\mathrm{d}\mu \Big| \\ &\leq \int_\Omega |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu \to 0, \end{aligned}$$

missä viimeinen vaihe seuraa dominoidun suppenemisen aikaisemmasta versiosta lauseessa 7.7. □

8. Funktioavaruus L^1 ja nollamittaiset joukot

Määritellään mitalliselle funktiolle $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ suure

$$\|f\|_{L^1} := \int_\Omega |f| \,\mathrm{d}\mu$$

ja merkitään (kirjain L viittaa Lebesgueen)

$$\begin{aligned} L^1 &:= \{ f : \Omega \to \mathbb{R}^d \mid f \text{ mitallinen}, \|f\|_{L^1} < \infty \} \\ &= \{ f : \Omega \to \mathbb{R}^d \mid f \text{ integroituva} \}. \end{aligned}$$

Usein käytetään pitempää merkintää $L^1(\Omega)$ tai $L^1(\mu)$ tai $L^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$ tai $L^1(\mu;\mathbb{R}^d)$ tai jopa $L^1(\Omega,\mu;\mathbb{R}^d)$. Jos maalijoukkoa ei ole erikseen ilmoitettu, yleensä ymmärretään, että tarkoitetaan tapausta $\mathbb{R}$ (tai kompleksifunktioihin liittyvissä tarkasteluissa $\mathbb{C}$, joka voidaan integrointiteorian kannalta samaistaa $\mathbb{R}^2$:een). Usein käytetään myös lyhyempää merkintää $\|f\|_1 := \|f\|_{L^1}$.

Kuvaus $L^1 \to [0,\infty)$, $f \mapsto \|f\|_{L^1}$ on ”melkein” normi. (Yleensä sitä kutsutaankin L^1-normiksi.) Se totettaa:

(1) $\|f\|_{L^1} \geq 0$,
(2) $\|\alpha f\|_{L^1} = |\alpha| \|f\|_{L^1}$, jos $\alpha \in \mathbb{R}$,
(3) $\|f + g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} + \|g\|_{L^1}$ (kolmioepäyhtälö).

Nämä on kaikki helppo todeta, esim.

$$\begin{aligned} \|f+g\|_{L^1} &= \int_\Omega |f+g| \,\mathrm{d}\mu \\ &\leq \int_\Omega (|f| + |g|) \,\mathrm{d}\mu \qquad (|f+g| \leq |f| + |g| \text{ ja integraali on monotoninen}) \\ &= \int_\Omega |f| \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega |g| \,\mathrm{d}\mu = \|f\|_{L^1} + \|g\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Sen sijaan:

8.1. **Lause.** *Olkoon* $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *mitallinen. Tällöin* $\|f\|_{L^1} = 0$ *jos ja vain jos* $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$ *(mutta* f*:n ei siis välttämättä tarvitse olla nolla kaikissa pisteissä, kunhan se poikkeaa nollasta vain nollamittaisessa joukossa).*

Todistus. Olkoon ensin $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$. Käytetään positiivisen funktion integraalin alkuperäistä määritelmää:

$$\|f\|_{L^1} := \int_\Omega |f| \,\mathrm{d}\mu := \sup \Big\{ \int_\Omega s \,\mathrm{d}\mu : s \in S_{|f|} \Big\},$$

$$S_{|f|} := \Big\{ s : \Omega \to [0,\infty) \text{ yksinkertainen}, s \leq |f| \Big\}.$$

Olkoon $s = \sum_{k=1}^K a_k 1_{A_k} \in S_{|f|}$. Olkoon jokin $a_k > 0$. Tällöin $|f| \geq a_k > 0$ joukolla A_k, joten $A_k \subset \{f \neq 0\}$. Siis $\mu(A_k) \leq \mu(\{f \neq 0\}) = 0$, joten $\mu(A_k) = 0$. Siis $a_k\mu(A_k) = 0$ kaikilla k, sillä vähintään toinen tulontekijöistä a_k ja $\mu(A_k)$ on aina nolla. Siis

$$\int_\Omega s \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^K a_k \mu(A_k) = \sum_{k=1}^K 0 = 0.$$

Kun tämä pätee kaikilla $s \in S_{|f|}$, niin myös $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = 0$.

Olkoon sitten $\|f\|_{L^1} = 0$. Tutkitaan ensin joukkoa $\{|f| > \varepsilon\}$. Nyt

$$\begin{aligned}
\mu(\{|f| > \varepsilon\}) &= \int_\Omega 1_{\{|f|>\varepsilon\}} \, \mathrm{d}\mu \\
&\leq \int_\Omega 1_{\{|f|>\varepsilon\}} \frac{|f|}{\varepsilon} \, \mathrm{d}\mu \qquad \text{(koska } 1 \leq \frac{|f|}{\varepsilon} \text{ joukolla } \{|f| > \varepsilon\} \text{)} \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu = \frac{1}{\varepsilon}\|f\|_{L^1} = 0.
\end{aligned}$$

Siis $\mu(\{|f| > \varepsilon\}) = 0$ kaikilla $\varepsilon > 0$, erityisesti $\mu(\{|f| > 1/n\}) = 0$ kaikilla n. Koska

$$\{f \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^\infty \{|f| > \frac{1}{n}\},$$

niin

$$\mu(\{f \neq 0\}) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(\{|f| > \frac{1}{n}\}) = \sum_{n=1}^\infty 0 = 0.$$

□

8.2. **Huomautus.** Edellinen lause on siitä tyypillinen, että useinkaan mittateorian väittämät eivät koske kaikkia pisteitä vaan ainoastaan ”kaikkia pisteitä lukuunottamatta nollamittaista poikkeusjoukkoa”. Tämä tilanne toistuu niin usein, että sille on annettu oma nimi: *melkein kaikkialla.* Siis: ”ominaisuus P pätee melkein kaikkialla” tarkoittaa ”on olemassa mitallinen joukko E, siten että $\mu(E) = 0$ ja ominaisuus P pätee kaikissa pisteissä $x \in \Omega \setminus E$.”

Todennäköiyyslaskennassa vastaava termi on *melkein varmasti.*

9. Riemann vs. Lebesgue täsmällisesti

Edellä on kehitetty integroimisteoriaa yleiselle mitalle μ. Tärkein yksittäinen erikoistapaus on ns. Lebesguen mitta $\mu = m$. Otetaan vielä hetken annettuna sen olemassaoloa koskeva tulos seuraavassa muodossa. Sen todistukseen palataan vähän myöhemmin:

9.1. **Lause.** *Avaruudella $\Omega = \mathbb{R}$ on olemassa σ-algebra $\mathfrak{M}$ ja mitta $m : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$, joilla on seuraavat ominaisuudet;*

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{M} \subset \mathscr{P}(\Omega),$$

missä $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ on Borelin σ-algebra. Lisäksi

(1) *Kaikilla väleillä $I \in \{(a, b), [a, b], (a, b], [a, b)\}$, missä $a < b$, pätee*

$$m(I) = \ell(I) := b - a \qquad \text{(välin } I \text{ geometrinen pituus).}$$

(2) *Jos $E \in \mathfrak{M}$ ja $t \in \mathbb{R}$, niin joukko $E + t := \{x + t : x \in E\}$ kuuluu myös $\mathfrak{M}$:ään ja toteuttaa*

$$m(E + t) = m(E), \qquad \text{(”siirtoinvarianssi”).}$$

(3) *Jos $E \in \mathfrak{M}$ ja $m(E) = 0$ ja $F \subset E$, niin myös $F \in \mathfrak{M}$. (Mitta-avaruus $(\mathbb{R}, \mathfrak{M}, m)$ on* täydellinen.*)*

Nyt siis otetaan yo. lause annettuna, ja todistetaan sen avulla täsmällisesti kurssin alussa mainittu Riemannin ja Lebesguen integraalien välinen yhteys.

9.2. **Lause.** *Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ väli ja $f : I \to \mathbb{R}$ funktio.*

(a) Jos f on Riemannin mielessä integroituva välillä I, niin se on myös Lebesguen mielessä integroituva, ja integraalit yhtyvät,

$$(L)\int_I f\,\mathrm{d}m = (R)\int_I f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(b) Jos $f \geq 0$ ja sillä on epäoleellinen Riemannin integraali

$$\lim_{\substack{a\to\inf I+\\ b\to\sup I-}} (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

niin se on myös Lebesguen mielessä integroituva, ja integraalit yhtyvät.

(c) Jos f on vaihtuvamerkkinen ja sillä on epäoleellinen Riemannin integraali, niin se ei välttämättä ole Lebesguen mielessä integroituva. Jos kuitenkin Lebesguen integraali on olemassa, niin se yhtyy jälleen epäoleelliseen Riemannin integraaliin.

Todistus. (a): Olkoon $I = [a, b]$ ja tarkastellaan jakoa $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_K = b$. Määritellään suljetut välit $I_k := [a_{k-1}, a_k]$ ja erilliset välit (esim.) $I_1' := I_1$ ja $I_k' := (a_{k-1}, a_k]$ kun $k > 1$. Merkitään vielä

$$m_k := \min_{x\in I_k} f(x), \qquad M_k := \max_{x\in I_k} f(x).$$

Täten ositusta vastaavat Riemannin ala- ja yläsummat ovat

$$\sum_{k=1}^K m_k|I_k| = \int_I g\,\mathrm{d}m, \qquad \sum_{k=1}^K M_k|I_k| = \int_I h\,\mathrm{d}m,$$

kun määritellään

$$g := \sum_{k=1}^K m_k 1_{I_k'}, \qquad h := \sum_{k=1}^K M_k 1_{I_k'}.$$

Integroituvuus Riemannin mielessä tarkoittaa, että jakoa tihentämällä molemmat lähestyvät samaa raja-arvoa.

Tarkastellaan jotakin tihentyvää jakojen jonoa, jolla tämä toteutuu, ja merkitään vastaavia funktioita g_n ja h_n, missä $n = 1, 2, \ldots$. Selvästi $g_n \leq f \leq h_n$ pisteittäin. Siis myös $g := \sup_n g_n \leq f \leq \inf_n h_n =: h$, ja funktiot g ja h ovat mitallisia. Kiinteällä n pätee $g \geq g_n$ ja $h \leq h_n$, joten $0 \leq h - g \leq h_n - g_n$. Siis

$$\int (h-g)\,\mathrm{d}x \leq \int (h_n - g_n)\,\mathrm{d}x \to 0,$$

missä raja-arvo seuraa Riemannin-integroituvuusoletuksesta. Tämä on mahdollista vain, jos $h - g = 0$ melkein kaikkialla. Koska $g \leq f \leq h = g$ melkein kaikkialla, pätee myös $f = g = h$ melkein kaikkialla. Erityisesti f yhtyy mitalliseen funktioon melkein kaikkialla ja on siis itse mitallinen. (Tässä vedotaan mitta-avaruuden täydellisyyteen, tämä on ollut harjoitustehtävänä.) Nyt pisteittäisestä epäyhtälöstä $g_n \leq f \leq h_n$ ja integraalin monotonisuudesta seuraa, että

$$\int g_n\,\mathrm{d}m \leq \int f\,\mathrm{d}m \leq \int h_n\,\mathrm{d}m,$$

ja oikea ja vasen puoli lähestyvät samaa raja-arvoa $(R)\int f\,\mathrm{d}x$.

(b): (a)-kohdan perusteella f on L-integroituva (a, b):llä kun $\inf I < a < b < \sup I$. Erityisesti se on mitallinen kullakin (a, b). Valitaan jokin laskeva jono $a_n \to \inf I$ ja kasvava jono $b_n \to \sup I$. Nyt siis kukin $f_n = 1_{(a_n,b_n)} f$ on mitallinen, ja jonon raja-arvona myös $f = 1_{(a,b)}f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Koska f_n on pisteittäin kasvava jono, niin

$$\begin{aligned}(L)\int_I f\,\mathrm{d}m &= \lim_{n\to\infty}(L)\int_I f_n\,\mathrm{d}m && \text{monotoninen suppeneminen}\\ &= \lim_{n\to\infty}(L)\int_{(a_n,b_n)} f\,\mathrm{d}m && \text{integraaliosajoukolla, määritelmä}\\ &= \lim_{n\to\infty}(R)\int_{a_n}^{b_n} f_n\,\mathrm{d}x && \text{a-kohta,}\end{aligned} \tag{9.3}$$

ja oikea puoli on juuri haluttu epäoleellinen Riemannin integraali.

(c): Jos Lebesguen integraali $(L)\int_I f$ on olemassa, niin sama yhtälö (9.3) pätee käyttämällä ensimmäisessä kohdassa dominoidun suppenemisen lausetta. Toisaalta on helppo tarkistaa, että esim. funktio

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}1_{[n,n+1)}$$

välllä $[1,\infty)$, tai funktio

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot(n+1)\cdot 1_{(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]}$$

välillä $(0,1]$, on integroituva epäoleellisen Riemannin integraalin mielessä, mutta ei Lebesguen mielessä. (Kummassakin tapauksessa epäoleellinen Riemannin integraali vastaa vaihtuvamerkkistä sarjaa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n},$$

kun taas Lebesguen-integroituvuus edellyttäisi vastaavan positiivisen sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

suppenemista.) $\square$

10. Mitta vs. ulkomitta

Seuraava iso tavoitteemme on Lebesguen mitan rakentaminen. Tätä työtä helpottaa ulkomitan käsite, joka on eräänlainen kevennetty versio mitasta: ulkomitan rakentaminen on hiukan helpompaa kuin mitan, mutta toisaalta jokaisen ulkomitan ”sisältä” löytyy varsinainen mitta. Täsmällinen määritelmä ja siihen liittyvät tulokset näyttävät seuraavanlaisilta:

10.1. **Määritelmä.** Funktio $\nu : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,\infty]$ on *ulkomitta* (outer measure / exterior measure), jos

(1) $\nu(\varnothing) = 0$.
(2) $\nu(A) \le \nu(B)$, jos $A \subset B$. (”monotonisuus”)
(3) $\nu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \le \sum_{k=1}^{\infty}\nu(A_k)$ kaikilla joukoilla A_k. (”subadditiivisuus”)

Joukko $F \in \mathscr{P}(\Omega)$ toteuttaa *Carathéodoryn ehdon* ulkomitan ν suhteen, jos

$$\nu(A) = \nu(A\cap F) + \nu(A\cap F^c) \qquad \forall A \in \mathscr{P}(\Omega) \tag{10.2}$$

10.3. **Lause.** *Jos* $\mu : \mathscr{F} \to [0, \infty]$ *on mitta, niin*

$$\mu^*(A) := \inf\{\mu(E) : A \subset E \in \mathscr{F}\}$$

on (sitä vastaava) ulkomitta, joka toteuttaa

$$\mu^*(F) = \mu(F) \qquad \forall F \in \mathscr{F},$$

ja lisäksi jokainen $F \in \mathscr{F}$ *toteuttaa Carathéodoryn ehdon* μ^**:n suhteen.*

10.4. **Lause.** *Jos* $\nu : \mathscr{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ *on ulkomitta ja*

$$\mathscr{M} := \mathscr{M}_\nu := \{F \in \mathscr{P}(\Omega) : F \text{ toteuttaa Carathéodoryn ehdon } \nu\text{:n suhteen}\},$$

niin

- $\mathscr{M}$ *on* σ*-algebra (ns.* ν*-mitallisten joukkojen* σ*-algebra) ja*
- *rajoittuma* $\nu|_{\mathscr{M}} : \mathscr{M} \to [0, \infty]$ *on mitta*

Jos $\mu : \mathscr{F} \to [0, \infty]$ *on mitta ja* $\nu = \mu^*$ *sen ulkomitta, niin* $\mathscr{F} \subset \mathscr{M}$ *ja* $\nu(F) = \mu(F)$ *kaikilla* $F \in \mathscr{F}$*.*

Tulevassa Lebesguen mitan rakentamisessa jälkimmäinen lause 10.4 on "tarpeellisempi", ts. se antaa meille mahdollisuuden löytää aito mitta pelkän ulkomitan avulla. Edellinen lause 10.3 ennen kaikkea motivoi ulkomitan käsitettä.

Lauseen 10.3 todistus. Alkuun on hyvä todeta suoraan määritelmästä seuraava havinto suureesta $\mu^*(A)$: Kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $E \in \mathscr{F}$, jolla $A \subset E$ ja $\mu(E) \le \mu^*(A) + \varepsilon$. (Vastaoletus johtaisi ristiriitaan infimumin määritelmälle *suurimpana* alarajana.) Käydään sitten läpi ulkomitan ehdot:

(1): Koska $\varnothing \subset \varnothing \in \mathscr{F}$, niin $\mu^*(\varnothing) \le \mu(\varnothing) = 0$.

(2): Olkoon $A \subset B$. Nyt on olemassa $E \in \mathscr{F}$, jolla $B \subset E$ ja $\mu(E) \le \mu^*(B) + \varepsilon$. Mutta nyt myös $A \subset B \subset E \in \mathscr{F}$, joten $\mu(A) \le \mu(E) \le \mu^*(B) + \varepsilon$. Koska tämä pätee kaikilla $\varepsilon > 0$, niin $\mu(A) \le \mu(B)$.

(3): Olkoon A_k joukkoja. Kullakin k valitaan $E_k \in \mathscr{F}$, jolla $A_k \subset E_k$ ja $\mu(E_k) \le \mu^*(A_k) + \varepsilon 2^{-k}$. Nyt $\bigcup -k = 1^\infty A_k \subset \bigcup_{k=1}^\infty E_k \in \mathscr{F}$ (sillä σ-algebra $\mathscr{F}$ sisältää joukkojensa numeroituvat yhdisteet), joten

$$\begin{aligned}
\mu^*\Big(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\Big) &\le \mu\Big(\bigcup_{k=1}^\infty E_k\Big) \\
&\le \sum_{k=1}^\infty \mu(E_k) \qquad \text{(mitan subadditiivisuus, ollut harjoituksena)} \\
&\le \sum_{k=1}^\infty [\mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}] \\
&= \sum_{k=1}^\infty \mu^*(A_k) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Koska tämä pätee kaikilla $\varepsilon > 0$, seuraa rajalla $\varepsilon \to 0$ väite.

Carathéodoryn ehto: Olkoon $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ ja $F \in \mathscr{F}$. On olemassa $E \in \mathscr{F}$, jolla $A \subset E$ ja $\mu(E) \le \mu^*(A) + \varepsilon$. Nyt $A \cap F \subset E \cap F \in \mathscr{F}$ ja $A \cap F^c \subset E \cap F^c \in \mathscr{F}$. Siis

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) &\le \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap F^c) \qquad \text{(ulkomitan subadditiivisuus)} \\
&\le \mu(E \cap F) + \mu(E \cap F^c) \\
&= \mu(E) \qquad \text{(mitan additiivisuus erillisillä joukoilla)} \\
&\le \mu^*(A) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Rajalla $\varepsilon \to 0$ seuraa väite. $\square$

Lauseen 10.4 todistus. Käydään läpi σ-algebran ehtoja:

(i) Jos $F = \Omega$, niin

$$\nu(A \cap \Omega) + \nu(A \cap \Omega^c) = \nu(A) + \nu(\varnothing) = \nu(A) + 0 = \nu(A),$$

eli Ω toteuttaa Carathéodoryn ehdon, ja siis $\Omega \in \mathscr{M}$.

(iii) Jos $F \in \mathscr{M}$, niin

$$\nu(A \cap F^c) + \nu(A \cap (F^c)^c) = \nu(A \cap F^c) + \nu(A \cap F^c) = \nu(A)$$

eli $F^c \in \mathscr{M}$. (Carathéodoryn ehto F^c:lle on sama kuin F:lle, vain eri järjestyksessä kirjoitettuna!)

(ii) Olkoot $F_1, F_2, \ldots \in \mathscr{M}$. Näiden yhdisteen tarkastelu on hiukan työläämpää ja etenee vaiheittain:

(1): Osoitetaan, että $F_1 \cup F_2 \in \mathscr{M}$. Olkoon $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ mielivaltainen. (Käytetään tätä kirjainta A:n sijasta selkeyden vuoksi pian selviävästä syystä.) Voidaan laskea:

$$\begin{aligned}
\nu(B) &\leq \nu(B \cap (F_1 \cup F_2)) + \nu(B \cap (F_1 \cup F_2)^c) \quad (\nu\text{:n subadditiivisuus}) \\
&= \nu((B \cap F_1) \cup (B \cap F_1^c \cap F_2)) + \nu(B \cap F_1^c \cap F_2^c) \quad (\text{joukko-oppia}) \\
&\leq \nu(B \cap F_1) + \nu(B \cap F_1^c \cap F_2) + \nu(B \cap F_1^c \cap F_2^c) \quad (\text{subadd.}) \\
&= \nu(B \cap F_1) + \nu(B \cap F_1^c) \quad (\text{Carathéodory: } A = B \cap F_1 \text{ ja } F = F_2) \\
&= \nu(B) \quad (\text{Carathéodory: } A = B \text{ ja } F = F_1).
\end{aligned} \tag{10.5}$$

(2): Oletetaan, että $\bigcup_{k=1}^n F_k \in \mathscr{F}$ jollakin n. Tällöin myös

$$\bigcup_{k=1}^{n+1} F_k = \Big(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\Big) \cup F_{n+1} \in \mathscr{F},$$

kun sovelletaan juuri todistettua kahden joukon yhdistettä koskevaa tulosta. Siis induktion nojalla $\bigcup_{k=1}^n F_k \in \mathscr{F}$ kaikilla n.

(3): Äärettöntä yhdistettä varten todistetaan ensin aputuloksena Carathéodoryn ehdon yleistys: Jos $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$ ovat erillisiä, niin

$$\nu(A \cap [F_1 \cup F_2]) = \nu(A \cap F_1) + \nu(A \cap F_2). \tag{10.6}$$

(Carathéodoryn ehto on tästä erikoistapaus, jossa $F_2 = F_1^c$.) Tämä seuraa tutkimalla tarkemmin laskua (10.5), jossa kaikkien välivaiheiden ja siten erityisesti kolmannen rivin on oltava yhtäsuuria kuin $\nu(B)$. Valitsemalla $B = A \cap [F_1 \cup F_2]$ saadaan

$$\begin{aligned}
\nu(A \cap [F_1 \cup F_2]) &= \nu(A \cap F_1) + \nu(A \cap F_1^c \cap F_2) + \nu(\varnothing) \\
&= \nu(A \cap F_1) + \nu(A \cap F_2) \qquad (F_1, F_2 \text{ erillisiä} \Rightarrow F_1^c \cap F_2 = F_2).
\end{aligned}$$

Tämä todistaa väitteen (10.6).

(4): Todistetaan induktiolla, että erillisillä $F_1, F_2, \ldots \in \mathscr{F}$ pätee

$$\nu\Big(A \cap \bigcup_{k=1}^n F_k\Big) = \sum_{k=1}^n \nu(A \cap F_k) \tag{10.7}$$

kaikilla n. Jos tämä pätee jollain n, niin

$$\begin{aligned}
\nu\Big(A \cap \bigcup_{k=1}^{n+1} F_k\Big) &= \nu\Big(A \cap \Big[\bigcup_{k=1}^{n} F_k \cap F_{n+1}\Big]\Big) \\
&= \nu\Big(A \cap \bigcup_{k=1}^{n} F_k\Big) + \nu(A \cap F_{n+1}) \qquad \text{(todistettu tapaus } n = 2\text{)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \nu(A \cap F_k) + \nu(A \cap F_{n+1}) \qquad \text{(induktio-oletus)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \nu(A \cap F_k).
\end{aligned}$$

Näin (10.7) on todistettu.

(5): Todistetaan vihdoin, että $F := \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \in \mathscr{M}$. Muodostetaan ensin erilliset joukot $D_1 := F_1$,

$$D_n := F_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} F_k = F_n \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{n-1} F_k\Big)^c = \Big(F_n^c \cup \bigcup_{k=1}^{n-1} F_k\Big)^c.$$

Koska on jo todettu, että $\mathscr{M}$-joukkojen komplementit ja äärelliset yhdisteet pysyvät kokoelmassa $\mathscr{M}$, niin nähdään, että $D_n \in \mathscr{M}$ kaikilla n. Lisäksi näillä joukoilla on sama yhdiste

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = F. \tag{10.8}$$

Erillisyyden ansiosta voidaan soveltaa aputulosta (10.7), kun F_k:n paikalla on D_k. Huomataan lisäksi, että

$$\bigcup_{k=1}^{n} D_k \subset F \qquad \Rightarrow \qquad F^c \subset \Big(\bigcup_{k=1}^{n} D_k\Big)^c. \tag{10.9}$$

Olkoon sitten $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ ja lasketaan

$$\begin{aligned}
\nu(A) &\le \nu(A \cap F) + \nu(B \cap F^c) \qquad \text{(subadditiivisuus)} \\
&= \nu\Big(A \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} D_k\Big) + \nu(A \cap F^c) \qquad \text{(yhtälö (10.8))} \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A \cap D_k) + \nu(A \cap F^c) \qquad \text{(subadditiivisuus)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \nu(A \cap D_k) + \nu(A \cap F^c) \qquad \text{(sarjan määritelmä)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big[\sum_{k=1}^{n} \nu(A \cap D_k) + \nu(A \cap F^c)\Big] \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big[\nu\Big(A \cap \bigcup_{k=1}^{n} D_k\Big) + \nu(A \cap F^c)\Big] \qquad \text{(aputulos (10.7))} \\
&\le \lim_{n\to\infty} \Big[\nu\Big(A \cap \bigcup_{k=1}^{n} D_k\Big) + \nu\Big(A \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{n} D_k\Big)^c\Big)\Big] \qquad \text{(aputulos (10.9))} \\
&= \lim_{n\to\infty} \nu(A) = \nu(A) \quad \text{(Carathéodory joukolle } \bigcup_{k=1}^{n} D_k \in \mathscr{M}\text{)}.
\end{aligned} \tag{10.10}$$

Tämä todistaa Carathéodoryn ehdon numeroituvalle yhdisteelle (10.8), ja päättää todistuksen sille, että $\mathscr{M}$ on σ-algebra.

Vielä on tarkistettava, että rajoittuma $\nu : \mathscr{M} \to [0,\infty]$ on mitta. $\nu(\varnothing) = 0$ seuraa suoraan ulkomitan määritelmästä, joten tarkistettavaksi jää täysadditiivisuus erillisillä joukoilla $F_k \in \mathscr{F}$. Taas voidaan hyödyntää jo valmiina edellä olevaa laskua (10.10), jossa $D_k = F_k$, kun F_k:t ovat erillisiä. Koska kaikkien vaiheiden on oltava samat, niin erityisesti kolmas rivi on sama kuin $\nu(A)$. Valitsemalla $A = F = \bigcup_{k=1}^\infty F_k$ ja $D_k = F_k$, saadaan

$$\nu(F) = \sum_{k=1}^\infty \nu(F \cap F_k) + \nu(F \cap F^c) = \sum_{k=1}^\infty \nu(F_k) + \nu(\varnothing) = \sum_{k=1}^\infty \nu(F_k),$$

kuten pitikin.

Tutkitaan lopuksi tapausta, jossa $\nu = \mu^*$. Edellisen lauseen 10.3 perusteella kaikki $F \in \mathscr{F}$ toteuttavat Carathéodoryn ehdon. Kokoelma $\mathscr{M}$ taas sisältää kaikki joukot, jotka toteuttavat Carathéodoryn ehdon, eli erityisesti kaikki $F \in \mathscr{F}$, ja siis $\mathscr{F} \subset \mathscr{M}$. Väite $\nu(F) = \mu^*(F) = \mu(F)$ kaikilla $F \in \mathscr{F}$ on myös osa lausetta 10.3. $\square$

11. Lebesguen ulkomitta ja mitta

11.1. **Määritelmä** (Lebesguen ulkomitta)**.** Lebesguen ulkomitta on seuraava kuvaus $m^* : \mathscr{P}(\mathbb{R}^d) \to [0,\infty]$:

$$m^*(A) := \inf\Big\{\sum_{k=1}^\infty |R_k| : R_k \subset \mathbb{R}^d \text{ suorakulmio}, A \subset \bigcup_{k=1}^\infty R_k\Big\},$$

missä

- *suorakulmio* on muotoa $R = I_1 \times \cdots \times I_d$ oleva joukko, missä kukin $I_i \subset \mathbb{R}$ on lukusuoran (suljettu, avoin tai puoliavoin) väli;
- $|R| := \ell(I_1) \times \cdots \times \ell(I_d)$ on suorakulmion *geometrinen mitta*, missä $\ell(I) := b - a$ on välin $I \in \{[a,b],(a,b),[a,b),(a,b]\}$ *pituus*.

Yllä siis tutkitaan kaikkia mahdollisia tapoja peittää joukko A suorakulmioilla, ja etsitään (ottamalla infimum) mahdollisimman tehokasta tapaa tehdä tämä, niin että peittävien suorakulmioiden geometristen mittojen summa on mahdollisimman pieni.

On kätevää hyväksyä suorakulmioksi (ja väliksi) myös surkastunut tapaus $\varnothing$, jolle $|\varnothing| := \ell(\varnothing) := 0$. (Huomaa myös, että yhden alkion joukko $\{x\} \subset \mathbb{R}$ on suljettu väli $[x,x]$, jonka pituus on $\ell(\{x\}) = x - x = 0$ ilman erillistä sopimustakin. Samoin todetaan, että yhden alkion joukko $\{x\} \subset \mathbb{R}^d$ on suorakulmio, jolla $|\{x\}| = 0$.)

Seuraava lause perustelee yllä annetun nimityksen.

11.2. **Lause.** *m^* on ulkomitta.*

Todistus. Selvästi $m^* : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,\infty]$, sillä jokainen summa $\sum_{k=1}^\infty |R_k|$ saa jonkin arvon väliltä $[0,\infty]$, joten myös näiden arvojen infimum on jokin luku samalta väliltä. (Havaitaan myös, että jokaisella joukolla A on olemassa suorakuimiopeitteitä, esim. joukot $R_k := [-k,k]^d$ peittävät koko $\mathbb{R}^d$:n ja siten minkä tahansa osajoukon $A \subset \mathbb{R}^d$.)

Kuten lauseen 10.3 todistuksessa, kannattaa nytkun kirjata seuraava havainto: Suoraan määritelmästä seuraa, että kaikilla joukoilla A ja kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa suorakulmiot R_k, joilla

$$A \subset \bigcup_{k=1}^\infty R_k, \qquad \sum_{k=1}^\infty |R_k| \le m^*(A) + \varepsilon. \tag{11.3}$$

Käydään sitten läpi ulkomitan ehdot:
(i) Jos $A = \varnothing$, voidaan valita $R_k = \varnothing$ kaikilla k, jolloin

$$0 \leq m^*(\varnothing) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\varnothing| = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0.$$

(ii) Olkoon $A \subset B$. Havainnon (11.3) mukaisesti valitaan suorakulmiopeite $B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k$, jolla $\sum_{k=1}^{\infty} |R_k| \leq m^*(B) + \varepsilon$. Mutta nyt myös $A \subset B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k$, joten

$$m^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |R_k| \leq m^*(B) + \varepsilon,$$

ja rajalla $\varepsilon \to 0$ seuraa väite.
(iii) Olkoot A_k joukkoja. Valitaan kullakin k suorakulmiot $R_{k,j}$, joilla $A_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_{k,j}$ ja $\sum_{j=1}^{\infty} |R_{k,j}| \leq m^*(A_k) + \varepsilon 2^{-k}$. Nyt

$$A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} R_{k,j},$$

ja myös tämä on joukon A numeroituva suorakulmiopeite, sillä kaksoisindeksöity jono $R_{k,j}$ voidaan aina järjestää yksinkertaiseksi jonoksi $\tilde{R}_\ell$ esim. käymällä $(k.j)$-taulukkoa läpi "viistoriveittäin". Siis

$$m^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |R_{k,j}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} (m^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}) = \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A_k) + \varepsilon,$$

ja rajalla $\varepsilon \to 0$ seuraa väite. □

Kun $\nu = m^*$, lauseessa 10.4 määriteltyä σ-algebraa $\mathscr{M}_{m^*}$ sanotaan (Lebesguen) mitallisten joukkojen σ-algebraksi, ja käytetään myös merkintää

$$\mathfrak{M}(\mathbb{R}^d) := \mathscr{M}_{m^*}.$$

11.4. **Lause.** $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$, *tai siis kaikki Borelin joukot ovat mitallisia.*

Todistus. Todistetaan, että kaikki koordinaattisuuntaiset puoliavaruudet

$$H := \{x = (x_i)_{i=1}^d \in \mathbb{R}^d : x_j \in [a, \infty)\},$$

missä $a \in \mathbb{R}$ on jokin luku ja $j \in \{1, \ldots, d\}$ jokin koordinaatti-indeksi, toteuttavat Carathéodoryn ehdon m^*:n suhteen, ja siis kuuluvat kokoelmaan $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ eli ovat mitallisia.

Olkoon $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^d)$ mikä tahansa joukko, ja $\bigcup_{k=1}^{\infty} R_k \supset A$ suorakulmiopeite, jolla $m^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |R_k| + \varepsilon$. Oleellinen havainto on se, että koordinaattisuuntaisten *suorakulmion ja puoliavaruuden leikkaus on jälleen suorakulmio* (mahdollisesti tyhjä)! Nimittäin

$$R \cap H = (I_1 \times \cdots \times I_d) \cap H = I_1 \times \cdots I_{j-1} \times (I_j \cap [a, \infty)) \times I_{j+1} \times \cdots \times I_d,$$

ja selvästi myös $I_j \cap [a, \infty)$ on väli. Vastaavasti myös $R \cap H^c$ on suorakulmio, mikä nähdään korvaamalla $[a, \infty)$ puolisuoralla $(-\infty, a)$ yllä. Lisäksi

$$\begin{aligned}
|R \cap H| + |R \cap H^c| &= \prod_{i \neq j} \ell(I_i) \times \ell(I_j \cap [a, \infty)) + \prod_{i \neq j} \ell(I_i) \times \ell(I_j \cap (-\infty, a)) \\
&= \prod_{i \neq j} \ell(I_i) \times \Big(\ell(I_j \cap [a, \infty)) + \ell(I_j \cap (-\infty, a)) \Big) \\
&\overset{(*)}{=} \prod_{i \neq j} \ell(I_i) \times \ell(I_j) = |R|,
\end{aligned}$$

missä suorien pituuksia koskeva yhtälö $(*)$ on helppo alkeisgeometrinen havainto.

Nyt voidaan suoraan laskea

$$\begin{aligned} m^*(A) &\le m^*(A\cap H) + m^*(A\cap H^c) \\ &\le \sum_{k=1}^\infty |R_k\cap H| + \sum_{k=1}^\infty |R_k\cap H^c| \\ &\le \sum_{k=1}^\infty \Big(|R_k\cap H| + |R_k\cap H^c|\Big) \\ &\le \sum_{k=1}^\infty |R_k| \le m^*(A)+\varepsilon, \end{aligned}$$

ja rajalla $\varepsilon\to 0$ saadaan Carathéodoryn ehto H:lle.

Siis $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ sisältää kaikki puoliavaruudet H. Koska $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ on σ-algebra, se sisältää myös näiden leikkauksina kaikki puoliavoimet suorakulmiot $[a_1,b_1)\times\cdots\times[a_d,b_d)$. Nämä virittävät Borelin σ-algebran $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$, eli $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ on pienin σ-algebra, joka sisältää kaikki ko. suorakulmiot. Koska $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ on eräs σ-algebra joka sisältää samat suorakulmiot, niin se sisältää pienimmän tällaisen σ-algebran, ja siis $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)\subset\mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$. □

Toisinaan on hyödyllistä käyttää ulkomitan määritelmässä pelkästään avoimia suorakulmioita. Tämä on mahdollista:

11.5. **Lemma.** *Jos*

$$m^*_{av}(A) := \inf\Big\{\sum_{k=1}^\infty |R_k| : R_k\subset\mathbb{R}^d \textit{ avoin suorakulmio, } A\subset\bigcup_{k=1}^\infty R_k\Big\}.$$

niin $m^*_{av}(A)=m^*(A)$ *kaikilla* $A\in\mathscr{P}(\mathbb{R}^d)$.

Todistus. $m^*_{av}(A)\ge m^*(A)$: Jokainen avoin suorakulmiopeite on myös suorakulmiopeite, joten $m^*(A)$:n määritelmässä otetaan infimum isommasta kokoelmasta. Isomman kokoelman infimum on pienempi, kuten määritelmästä helposti seuraa.

$m^*_{av}(A)\le m^*(A)$: Olkoon $\bigcup_{k=1}^\infty R_k\supset A$ suorakulmiopeite, jolla $\sum_{k=1}^\infty |R_k|\le m^*(A)+\varepsilon$. Kullakin k määritellään avoin suorakulmio $\tilde{R}_k$, jolla on sama keskipiste kuin R_k:lla, ja jonka kukin sivu on $(1+\varepsilon)$-kertainen R_k:n vastaavaan sivuun nähden. Tällöin $R_k\subset\tilde{R}_k$ ja $|\tilde{R}_k|=(1+\varepsilon)^d|R_k|$. Nyt $\bigcup_{k=1}^\infty\tilde{R}_k\supset A$ on avoin suorakulmiopeite, joten

$$m^*_{av}(A)\le\sum_{k=1}^\infty|\tilde{R}_k| = \sum_{k=1}^\infty(1+\varepsilon)^d|R_k|\le(1+\varepsilon)^d(m^*(A)+\varepsilon).$$

Rajalla $\varepsilon\to 0$ saadaan väite. □

11.6. **Lause.** *Jos* $R\subset\mathbb{R}^d$ *on suljettu suorakulmio, niin* $m^*(R)=|R|$.

Tästä on helppo johtaa sama tulos muunlaisille suorakulmioille, mikä jätetään harjoitustehtäväksi.

Todistus. Epäyhtälö $m^*(R)\le|R|$ seuraa tarkastelemalla suorakulmiopeitettä, jossa $R_1=R$ ja $R_2=R_3=\cdots=\varnothing$.

Toinen suunta on vaativampi ja vetoaa reaalilukujen syvällisempiin ominaisuuksiin. Olkoon R suljettu suorakulmio, ja tarkastellaan mielivaltaisia avoimia suorakulmioita R_k, joilla $R\subset\bigcup_{k=1}^\infty R_k$. Tavoitteena on näyttää, että välttämättä $|R|\le\sum_{k=1}^\infty|R_k|$, sillä tästä seuraa, että $|R|\le m^*_{av}(R)=m^*(R)$.

Nyt R on siis suljettu, ja suorakulmiona välttämättä rajallinen joukko. Tällaiset avaruuden $\mathbb{R}^d$ osajoukot ovat *kompakteja*. Toisaalta $\{R_k\}_{k=1}^\infty$ on R:n avoin peite. Siis kompaktiuden perusteella on olemassa *äärellinen osapeite* $\{R_k\}_{k=1}^K$, jolla $R\subset$

$\bigcup_{k=1}^K R_k$. Nyt riittää osoittaa, että tässä tilanteessa $|R| \le \sum_{k=1}^K |R_k|$. Tämä on ehkä intuitiivisesti "selvää", mutta täsmällinen todistus on yllättävän työläs, ja tehdään seuraavissa lemmoissa erikseen dimensiossa $d = 1$ ja yleisellä $d \ge 1$. (Jos R' ja R'_k ovat suorakulmioita R ja R_k vastaavat puoliavoimet (muotoa $[a_1, b_1) \times \cdots \times [a_d, b_d)$ olevat) suorakulmiot, niin $R' \subset R$ ja $R_k \subset R'_k$, siis myös $R' \subset \bigcup_{k=1}^K R'_k$. Koska $|R| = |R'|$ ja $|R_k| = |R'_k|$, niin riittää todistaa vastaava väite $|R'| \le \sum_{k=1}^K |R'_k|$, missä kaikki suorakulmiot ovat puoliavoimia. Tämä tehdään alla olevissa lemmoissa.) $\square$

11.7. **Huomautus.** Edellä oleva kompaktiustarkastelu vetosi $\mathbb{R}^d$:n erityisominaisuuksiin. Vastaava päättely ei toimi "rationaaliselle suorakulmiolle" $R \cap \mathbb{Q}^d$. Kyseinen joukko on nimittäin numeroituva, $R \cap \mathbb{Q}^d = \{q_k\}_{k=1}^\infty$, ja voidaan siten peittää surkastuneilla suorakulmioilla $R_k = \{q_k\}$, joilla $\sum_{k=1}^\infty |R_k| = \sum_{k=1}^\infty 0 = 0$.

11.8. **Lemma.** *Olkoon* $I = [a, b) \subset \bigcup_{k=1}^K I_k$*, missä* $I_k = [a_k, b_k) \subset \mathbb{R}$*. Tällöin*

$$\ell(I) := b - a \le \sum_{k=1}^K \ell(I_k).$$

Todistus. Jos $K = 1$ ja $I \subset I_1$, niin $a_1 \le a$ ja $b \le b_1$, joten selvästi $\ell(I) = b - a \le b_1 - a_1 = \ell(I_1)$.

Oletetaan väite todeksi jollakin $K - 1$ ja tarkastellaan tapausta K. Jos $I \subset \bigcup_{k=1}^K I_k$, niin erityisesti jonkin välin I_k täytyy sisältää päätepiste a, jolloin $a_k \le a < b_k$. Jos $b \le b_k$, niin $I \subset I_k$ sisältyy jo yhteen väliin ja ollaan jo tarkastellussa tilanteessa $K = 1$. Voidaan siis olettaa, että $a_k \le a < b_k < b$, ja uudelleen indeksoimalla, että $k = K$. Koska I_K ei leikkaa väliä $[b_K, b)$, täytyy olla

$$[b_K, b) \subset \bigcup_{k=1}^{K-1} I_k,$$

joten induktio-oletuksen nojalla

$$b - b_K \le \sum_{k=1}^{K-1} (b_k - a_k).$$

Toisaalta, koska $a_K \le a$, niin $b_K - a \le b_K - a_K$, ja laskemalla yhteen edellisen kaavarivin kanssa saadaan

$$b - a = (b - b_K) + (b_K - a) \le \sum_{k=1}^K (b_k - a_k),$$

mikä induktion nojalla todistaa väitteen. $\square$

11.9. **Lemma.** *Olkoon* $R \subset \bigcup_{k=1}^K R_k$*, missä* R *ja kukin* R_k *on muotoa* $[a_1, b_1) \times \cdots \times [a_d, b_d)$ *oleva puoliavoin suorakulmio. Tällöin*

$$|R| \le \sum_{k=1}^K |R_k|.$$

Todistus. Yleisyyttä menettämättä voidaan olettaa, että $R_k \subset R$. (Jos tämä ei päde, niin tarkastellaan ensin joukkoja $\tilde{R}_k := R_k \cap R$.)

Edetään induktiolla sekä K:n että d:n suhteen. Väite on selvä, kun $K = 1$ ja d on mielivaltainen, ja se on todistettu edellisessä lemmassa, kun $d = 1$ ja K on mielivaltainen. Oletetaan, että väite pätee arvoilla (K', d) ja (K, d'), missä $K' < K$ ja $d' < d$ ja todistetaan se tapauksessa (K, d).

Kirjoitetaan kaikilla $k = 1, \ldots, K$ esitys

$$R_k = I_k \times R'_k = [\alpha_k, \beta_k) \times R'_k,$$

missä $R'_k \subset \mathbb{R}^{d-1}$ on alempiulotteinen suorakulmio ja $I_k = [\alpha_k, \beta_k) \subset \mathbb{R}$ on väli. Merkitään vielä

$$A := \max_{1\leq k\leq K} \alpha_k, \qquad B := \min_{1\leq k\leq K} \beta_k.$$

Tapaus $A \geq B$: Olkoon $H := [B, \infty) \times \mathbb{R}^d$ puoliavaruus. Nyt $R_k \cap H$ ja $R_k \cap H^c$ ovat myös suorakulmioita, ja lisäksi $R_k \cap H = ([\alpha_k, \beta_k) \cap [B, \infty)) \times R'_k = \varnothing$ jos $\beta_k = B$ (eli ainakin yhdellä k) ja samoin $R_k \cap H^c = ([\alpha_k, \beta_k) \cap (-\infty, B)) \times R'_k = \varnothing$ jos $\alpha_k = A \geq B$ (eli ainakin yhdellä k). Siis

$$R \cap H \subset \bigcup_{k=1}^K R_k \cap H = \bigcup_{k:R_k\cap H\neq\varnothing} R_k \cap H,$$

missä oikeanpuoleisessa yhdisteessä on alle K termiä. Siis induktio-oletuksen nojalla

$$|R \cap H| \leq \sum_{k:R_k\cap H\neq\varnothing} |R_k \cap H| = \sum_{k=1}^K |R_k \cap H|$$

ja aivan vastaavasti $|R \cap H^c| \leq \sum_{k=1}^K |R_k \cap H^c|$.

Nyt voidaan laskea

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^K |R_k| &= \sum_{k=1}^K (|R_k \cap H| + |R_k \cap H^c|) \\
&= \sum_{k:R_k\cap H\neq\varnothing} |R_k \cap H| + \sum_{k:R_k\cap H^c} |R_k \cap H^c| \\
&\geq |R \cap H| + |R \cap H^c| = |R|.
\end{aligned}$$

Tapaus $A < B$: Tarkastellaan tällä kertaa joukkoja

$$\begin{aligned}
H_- &:= (-\infty, A) \times \mathbb{R}^{d-1}, \\
H_0 &:= [A, B) \times \mathbb{R}^{d-1}, \\
H_+ &:= [B, \infty) \times \mathbb{R}^{d-1}.
\end{aligned}$$

Nyt

$$R_k \cap H_- = ([\alpha_k, \beta_k) \cap (-\infty, A)) \times R'_k$$

ja tämä on tyhjä, jos $\alpha_k = A$, eli ainakin yhdellä k. Vastaavasti

$$R_k \cap H_+ = ([\alpha_k, \beta_k) \cap [B, \infty)) \times R'_k$$

on tyhjä, jos $\beta_k = B$, eli ainakin yhdellä k. Toisaalta

$$R_k \cap H_0 = ([\alpha_k, \beta_k) \cap [A, B)) \times R'_k = [A, B) \times R'_k,$$

sillä $\alpha_k \leq A < B \leq \beta_k$ kaikilla k. Jos $R = [\alpha, \beta) \times R'$, niin oletuksesta $R_k \subset R$ seuraa erityisesti $[\alpha_k, \beta_k) \subset [\alpha, \beta)$, joten $\alpha \leq \alpha_k \leq A < B \leq \beta_k \leq \beta$, ja siis myös

$$R \cap H_0 = ([\alpha, \beta) \cap [A, B)) \times R' = [A, B) \times R'.$$

Kuten edellisessä tapauksessa,

$$R \cap H_\pm \subset \bigcup_{k=1}^K R_k \cap H_\pm = \bigcup_{k:R_k\cap H_\pm\neq\varnothing} R_k \cap H_\pm,$$

missä viimeisessä yhdisteessä on alle K termiä, ja induktio-oletus K:n suhteen antaa

$$|R \cap H_\pm| \leq \sum_{k:R_k\cap H_\pm\neq\varnothing} |R_k \cap H_\pm| = \sum_{k=1}^K |R_k \cap H_\pm|.$$

Toisaalta

$$R \cap H_0 = [A,B) \times R' \subset \bigcup_{k=1}^{K} R_k \cap H_0 = \bigcup_{k=1}^{K} [A,B) \times R'_k = [A,B) \times \bigcup_{k=1}^{K} R'_k,$$

ja erityisesti

$$R' \subset \bigcup_{k=1}^{K} R'_k.$$

Nyt induktio-oletuksesta dimension suhteen seuraa

$$|R'| \leq \sum_{k=1}^{K} |R'_k|,$$

ja siis

$$|R \cap H_0| = (B-A)|R'| \leq (B-A) \sum_{k=1}^{K} |R'_k| = \sum_{k=1}^{K} |R_k \times H_0|.$$

Laskemalla eri tapaukset yhteen saadaan

$$\begin{aligned} |R| &= |R \cap H_-| + |R \cap H_0| + |R \cap H_+| \\ &\leq \sum_{k=1}^{K} (|R_k \cap H_-| + |R_k \cap H_0| + |R_k \cap H_+|) = \sum_{k=1}^{K} |R_k|. \end{aligned}$$

□

Yhdistämällä edellä olevat tulokset on saatu todistetuksi erittäin tärkeä:

11.10. **Lause** (Lebesguen mitan olemassaolo)**.** *On olemassa σ-algebra $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^d) \subset \mathscr{P}(\mathbb{R}^d)$ ja mitta $m : \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d) \to [0,\infty]$, joilla on seuraavat ominaisuudet:*

(1) *$\mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ sisältää kaikki Borelin joukot (ts. $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^d) \supset \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$) ja kaikki nollamittaisten joukkojen osajoukot.*

(2) *Kaikilla suorakulmioilla $R \subset \mathbb{R}^d$ pätee $m(R) = |R|$.*

(3) *Jos $E \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ ja $y \in \mathbb{R}^d$, niin myös $E + y := \{x + y : x \in E\} \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$, ja lisäksi*

$$m(E+y) = m(E).$$

Todistus. Yllä on rakennettu Lebesguen ulkomitta $m^* : \mathscr{P}(\mathbb{R}^d) \to [0,\infty]$, ja osoitettu, että sen mitallisten joukkojen kokoelma $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^d) := \mathscr{M}_{m^*}$ sisältää Borelin joukot. Ulkomitan rajoittuma $m := m^*|_{\mathscr{M}_{m^*}}$ on aina mitta (lause 10.4). Lisäksi tällä tavoin rakennettu mitta on aina täydellinen, ts. nollamittaisten joukkojen osajoukot ovat mitallisia (harjoitustehtävä). On myös todistettu, että $m^*(R) = |R|$, ja koska $R \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$, niin $m^*(R) = m(R)$. Lisäksi $m^*(A) = m^*(A+y)$ kaikilla joukoilla A (harjoitustehtävä), mistä seuraa, että jos joukko E toteuttaa Carathédoryn ehdon (eli on mitallinen), niin myös $E + y$ toteuttaa sen (myös harjoitustehtävä). Täten lauseen viimeinen väite seuraa jälleen korvaamalla m^* pelkällä m:llä mitallista joukkoa mitattaessa. □

12. Mitaton joukko

Osoitetaan seuraavaksi, että lauseessa 11.10 on välttämättä $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathscr{P}(\mathbb{R}^d)$, ts. kaikken joukkojen mitallisuutta ei voida saavuttaa, jos muut ominaisuudet halutaan säilyttää.

12.1. **Esimerkki.** Määritellään $\mathbb{R}$:n ekvivalenssirelaatio

$$x \sim y \qquad \Leftrightarrow \qquad x - y \in \mathbb{Q}.$$

(On helppo todeta, että $x \sim x$ kaikilla x; jos $x \sim y$ niin $y \sim x$; ja jos $x \sim y$ ja $y \sim z$, niin $x \sim z$.) Tämä määrittelee ekvivalennsiluokat

$$[x] := \{y \in \mathbb{R} : y \sim x\}.$$

Tarkastellaan sellaista joukkoa $E \subset \mathbb{R}$, joka sisältää täsmälleen yhden alkion x kustakin em. ekvivalenssiluokasta. (Tällaisen joukon olemassaolo nojaa ns. *valinta-aksioomaan*, muodollisesti näin: Valinta-aksiooman mukaan on olemassa *valintafunktio* $\phi : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\varnothing\} \to \mathbb{R}$, jolla $\phi(A) \in A$ kaikilla $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\varnothing\}$, ts. ϕ "valitsee" jonkin A:n alkion jokaisella epätyhjällä joukolla A. Nyt voidaan kirjoittaa $E = \{\phi([x]) : x \in \mathbb{R}\}$.) Joukkoa E voidaan vielä muokata niin, että $E \subset [0, 1)$, kun korvataan jokainen $x \in E$ omalla murto-osallaan: jos $n \leq x < n + 1$ ja $n \in \mathbb{Z}$, niin x:n murto-osa on $x - n \in [0, 1)$. Huomaa, että x ja $x - n$ kuuluvat samaan ekvivalenssiluokkaan.

12.2. **Lemma.** *Edellisessä esimerkissä määritelty joukko E toteuttaa $E \notin \mathscr{M}(\mathbb{R})$.*

Todistus. Vastaoletus: $E \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$. Tällöin myös $E+q \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$ kaikilla $q \in \mathbb{Q}$ (jopa kaikilla $q \in \mathbb{R}$, mutta tätä ei nyt tarvita) ja $m(E + q) = m(E)$. Jos $q \in [0, 1)$, niin $E + q \subset [0, 2)$. Määritellään vielä "jaksollinen summa"

$$E\tilde{+}q := [(E + q) \cap [0, 1)] \cup [(E + q) \cap [1, 2) - 1],$$

jossa siis "ylimenevä osa" siirretään takaisin välille $[0, 1)$.

Ylläoleva yhdiste on erillinen: Jos $x \in (E\tilde{+}q)] \cap [(E\tilde{+}q) - 1]$, niin $x = e_1 + q = e_2 + q - 1$ joillakin $e_1, e_2 \in E$, mutta tällöin $e_2 - e_1 = 1$, vaikka selvästi $|e_2 - e_1| < 1$, kun $e_1, e_2 \in [0, 1)$. Täten

$$\begin{aligned} m(E\tilde{+}q) &= m[(E + q) \cap [0, 1)] + m[(E + q) \cap [1, 2) - 1] \qquad \text{(erillisyys)} \\ &= m[(E + q) \cap [0, 1)] + m[(E + q) \cap [1, 2)] \qquad \text{(siirtoinvarianssi)} \\ &= m([(E + q) \cap [0, 1)] \cup [(E + q) \cap [1, 2)]) \qquad \text{(erillisyys)} \\ &= m(E + q) = m(E) \qquad \text{(siirtoinvarianssi).} \end{aligned} \tag{12.3}$$

Joukot $E\tilde{+}q$, missä $q \in \mathbb{Q}$, ovat keskenään erillisiä: Jos $x \in (E\tilde{+}q_1) \cap (E\tilde{+}q_2)$, niin se on muotoa $x = e_1 + q_1 = e_2 + q_2$, missä $e_i \in E$. Mutta tällöin $e_1 - e_2 = q_2 - q_1 \in \mathbb{Q}$, joten $e_1 \sim e_2$. Koska E sisältää vain yhden edustajan joka ekvivalenssiluokasta, niin $e_1 = e_2$. Mutta tällöin myös $q_1 = q_2$, eli x ei kuulunutkaan kahteen *eri* joukkoon $E\tilde{+}q$.

Joukot $E\tilde{+}q$, missä $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$, peittävät koko välin $[0, 1)$: Jokainen $x \in [0, 1)$ kuuluu johonkin ekvivalenssiluokkaan, ja E:n valinnan perusteella ekvivalenssiluokat ovat muotoa $[e]$, missä $e \in E$. Siis $x = e + q$ jollain $e \in E$ ja $q \in \mathbb{Q}$. Nyt $q = x - e \in (-1, 1)$, sillä $x, e \in [0, 1)$. Jos $q \in [0, 1)$, niin $x \in (E + q) \cap [0, 1) \subset E\tilde{+}q$, missä $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$, kuten pitikin. Jos $q \in (-1, 0)$, niin $x = e + (q + 1) - 1$, missä $q + 1 \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$, ja $e + (q + 1) = x + 1 \in [1, 2)$, joten $x \in (E + (q + 1)) \cap [1, 2) - 1 \subset E\tilde{+}(q + 1)$, missä $q + 1 \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$, kuten pitikin. Siis peittävyysväite pätee kummassakin tapauksessa.

Kun numeroidaan $\mathbb{Q} \cap [0, 1)$ (jossain järjestyksessä), voidaan nyt laskea

$$\begin{aligned} 1 = m([0, 1)) &= m\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E\tilde{+}q_n)\Big) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} m(E\tilde{+}q_n) \qquad \text{(erillisyys)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} m(E) \qquad \text{(eputulos (12.3)).} \end{aligned}$$

Tarkastellaan kahta vaihtoehto, $m(E) = 0$ ja $m(E) > 0$, ja todetaan, että molemmat johtavat ristiriitaan. Jos $m(E) = 0$, niin edellinen lasku antaa $1 = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$. Jos taas $m(E)$ on jokin positiivinen luku $\alpha > 0$, niin sama lasku antaa $1 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha = \infty$. Kumpikin on mahdoton, joten vastaoletus joukon E mitallisuudesta johti ristiriitaan. $\square$

On siis todistettu:

12.4. **Lause.** $\mathfrak{M}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathscr{P}(\mathbb{R})$.

Kakkia joukkoja ei voi mitata!

13. Sekalaista lisätietoa mitallisuudesta

13.1. **Esimerkki** (Mitallisia joukkoja)**.** Yllä on osoitettu, että mitalliset joukot sisältävät kaikki Borelin joukot. Borelin σ-algebra $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ on määritelmänsä mukaan $\mathbb{R}^d$:n avoimien joukkojen virittäämä, joten se sisältää ainakin kaikki avoimet joukot. Koska mitallisuus säilyy komplementeissa,, se sisältää myös avoimien komplementteina kaikki suljetut joukot.

Edelleen σ-algebra sisältää kaikki joukkojensa numeroituvat yhdisteet, samoin (komplementin ja De Morganin lain avulla) kaikki joukkojensa numeroituvat leikkaukset. Nämä eivät välttämättä ole suljettuja tai avoimia, vaan antavat lisää esimerkkejä Borelin joukoista ja siten mitallisista joukoista:

Joukkoluokka $\mathscr{G}_\delta$ käsittää kaikki avoimien joukkojen numeroituvat leikkaukset:

$$\mathscr{G}_\delta := \Big\{ \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k : G_k \text{ avoin} \Big\}.$$

Joukkoluokka $\mathscr{F}_\sigma$ käsittää kaikki suljettujen joukkojen numeroituvat yhdisteet:

$$\mathscr{F}_\sigma := \Big\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k : F_k \text{ suljettu} \Big\}.$$

Merkintöjen tausta: δ =Durchschnitt (saks.) = leikkaus, σ = Summe (saks.) = summa/yhdiste. F = ferme (ransk.) = suljettu, ja G on seuraava kirjain, joka on myös samannäköinen kuin O = ouvrier (ransk.) = avoin.

Näitä rakennelmia voidaan edelleen iteroida:

$$\mathscr{G}_{\delta\sigma} : = \Big\{ \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j : G_j \in \mathscr{G}_\delta \Big\},$$

$$\mathscr{F}_{\sigma\delta} : = \Big\{ \bigcap_{j=1}^{\infty} F_j : F_j \in \mathscr{F}_\sigma \Big\},$$

ja niin edelleen. Nämä kaikki ovat siis Borelin joukkoja.

Riemannin teorian avulla voidaan määritellä seuraava alkeellisempi mitallisuuskäsite:

13.2. **Määritelmä.** Joukko $E \subset \mathbb{R}^d$ on *Jordanin-mitallinen*, jos se on rajallinen (ts. sisältyy johonkin palloon) ja sen indikaattori 1_E on Riemannin-integroituva (jonkin suorakulmion $R \supset E$ yli). Tällaisen joukon *Jordanin mitta* on

$$m_J(E) := (R) \int_R 1_E(x)\, \mathrm{d}x.$$

13.3. **Lause.** *Jos $E \subset \mathbb{R}^d$ on Jordanin-mitallinen, niin se on Lebesguen-mitallinen, ja*

$$m_J(E) = m(E).$$

Todistus. Oletuksen ja määritelmän perusteella funktio 1_E on Riemannin mielessä integroituva suorakulmiolla $R \supset E$. Lauseen 9.2 perusteella se on myös Lebesguen mielessä integroituva R:llä, ja

$$(R)\int_R 1_E \,\mathrm{d}x = (L)\int_R 1_E \,\mathrm{d}m.$$

(Vaikka lause 9.2 muotoiltiin ja todistettiin ainoastaan tapauksessa $d = 1$, sen yleistys mielivaltaiseen dimensioon onnistuu triviaalein muunnoksin: riittää korvata Riemannin summissa esiintyvät välit $I_k \subset \mathbb{R}$ suorakulmioilla $R_k \subset \mathbb{R}^d$.)

Nyt funktion 1_E mitallisuus on selvästi yhtäpitävää joukon E mitallisuudelle, ja saadaan

$$m(E) = (L)\int_{\mathbb{R}^d} 1_E \,\mathrm{d}m = (L)\int_R 1_E \,\mathrm{d}m = (R)\int_R 1_E \,\mathrm{d}x = m_J(E),$$

kuten väitettiin. □

Lauseen 13.3 ansiosta kaikki Riemannin integraalin avulla lasketut tutut alkeiskappaleiden mitat (kiekon pinta-ala, kuulan tilavuus jne.) ovat myös vastaavien kappaleiden (sopivan dimensioisia) Lebesguen mittoja, joten näitä ei tarvitse enää Lebesguen teoriassa erikseen uudelleen määrittää.