Mitta ja integraali, talvi 2016
Hytönen / Hänninen
7. laskuharjoitukset (käsitellään ke 2.3. ja pe 4.3.)

1. (a) Monisteessa todistettiin, että $m^*(R) = |R|$, jos $R \subset \mathbb{R}^d$ on suljettu suorakulmio. Johda tämän avulla sama tulos kaikille muillekin suorakulmioille.
   (b) Todista, että jos E toteuttaa Carathédoryn ehdon m^*:n suhteen, niin myös $E + y$ toteuttaa sen kaikilla $y \in \mathbb{R}^d$. (Vihje: Hyödynnä aiemman harjoituksen tulosta, että $m^*(A) = m^*(A + y)$.)

2. Olkoon $E \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ mitallinen joukko ja $\varepsilon > 0$. Osoita:
   (a) On olemassa avoin joukko $G \supset E$, jolla $m(G) \leq m(E) + \varepsilon$.
   (b) Jos $m(E) < \infty$, niin sama G toteuttaa $m(G \setminus E) \leq \varepsilon$.
   (c) Yleisestikin on olemassa avoin $G \supset E$, jolla $m(G \setminus E) \leq \varepsilon$. (Vihje: Osoita, että E voidaan jakaa numeroituvan moneen osaan E_k, joilla $m(E_k) < \infty$, ja hyödynnä edellistä kohtaa.)

3. Olkoon $E \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ mitallinen joukko ja $\varepsilon > 0$. Osoita:
   (a) On olemassa suljettu joukko $F \subset E$, jolla $m(E \setminus F) \leq \varepsilon$. (Vihje: 1(c) ja komplementit.)
   (b) Jos $m(E) < \infty$, niin on olemassa kompakti joukko $K \subset E$, jolla $m(E \setminus F) \leq \varepsilon$.
   (c) Yleisesti on voimassa

$$m(E) = \inf\{m(G) : G \supset E \text{ avoin}\} = \sup\{m(K) : K \subset E \text{ kompakti}\}.$$

   (Siis mielivaltaisen joukon mittaa voidaan aproksimoida ylhäältäpäin avoimien ja alhaaltapäin kompaktien joukkojen avulla.)

4. Olkoon $E \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ mitallinen. Osoita:
   (a) On olemassa $G \in \mathscr{G}_\delta$, jolla $G \supset E$ ja $m(G \setminus E) = 0$.
   (b) On olemassa $F \in \mathscr{F}_\sigma$, jolla $F \subset E$ ja $m(E \setminus F) = 0$.

   (Siis mielivaltainen mitallinen joukko on muotoa $E = G \setminus M = F \cup N$, missä M ja N ovat nollamittaisia. Toisin sanoen mitalliset joukot poikkeavat ainoastaan nollamittaisen joukon verran melko "konkreettisista" joukoista $G \in \mathscr{G}_\delta$ tai $F \in \mathscr{F}_\sigma$.)

5. Mitattoman joukon rakentamisessa valittiin alkioita eri ekvivalenssiluokista. Osoita, että tätä valintaa muokkaamalla tällä tavalla rakennetun joukon *ulkomitta* voidaan valita mielivaltaisen pieneksi. (Vihje: Osoita, että millä tahansa annetulla $\varepsilon > 0$ voidaan ekvivalenssiluokkien edustajien joukko E valita siten, että $E \subset [0, \varepsilon)$.) Perustele, miksi tästä seuraa, että ko. ulkomitta ei voi olla sama kaikilla mahdollisilla E:n valinnoilla.

6. Tarkastellaan avaruudella $[0, 1]$ Lebesguen mittaa $m : \mathfrak{M}[0, 1] \to [0, 1]$([1]) ja pistelaskumittaa $n : \mathscr{P}[0, 1] \to \{0, 1, 2, \ldots\} \cup \{\infty\}$, missä

$$n(A) := \text{ joukon } A \text{ pisteiden lukumäärä.}$$

   Määritellään kahden muuttujan $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ funktio

$$f(x, y) := \begin{cases} 1, & \text{jos } x = y, \\ 0, & \text{jos } x \neq y. \end{cases}$$

[1] $\mathfrak{M}[0, 1] = \{E \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}) : E \subset [0, 1]\}$ on niiden mitallisten joukkojen kokoelma, jotka sisältyvät välille $[0, 1]$.

Totea seuraavat integraalit mielekkäiksi (integroitavat funktiot mitallisia jne.) ja laske ne:

$$\int_{[0,1]} \Big(\int_{[0,1]} f(x,y)\,\mathrm{d}m(x) \Big)\,\mathrm{d}n(y) \qquad \text{ja} \qquad \int_{[0,1]} \Big(\int_{[0,1]} f(x,y)\,\mathrm{d}n(y) \Big)\,\mathrm{d}m(x).$$

(Vihje: Pitäisi tulla eri tulos.) (Huomaa, että luennolla ja Holopaisen monisteessa käsitelty Fubinin lause koskee ainoastaan Lebesguen mittaa, eli sitä ei voi käyttää tässä. Yleisemmin Fubinin lause pätee hyvin monille muillekin mitoille, mutta ei kuitenkaan mielivaltaisille mitoille, kuten tämä esimerkki osoittaa. Ongelma on se, että lukumäärämitalla varustettuna avaruus $[0,1]$ on ”liian iso”: se sisältää ylinumeroituvan määrän erillisiä positiivismittaisia joukkoja, nimittäin kaikki $\{x\}$, missä $x \in [0,1]$.)