Mitta ja integraali, talvi 2016
Hytönen / Hänninen
6. laskuharjoitukset (käsitellään ke 24.2. ja pe 26.2.)

1. Olkoon $\Omega = (0, \infty)$ ja $\nu(A) := \sup A$ kaikilla $A \in \mathscr{P}(\Omega)$. (Sovitaan: $\sup \varnothing := 0$([1]) ja $\sup A := \infty$, jos A:lla ei ole ylärajaa.) Osoita:

   (a) ν on ulkomitta.

   (b) $\mathscr{M}_\nu$ on ns. triviaali σ-algebra, eli $\mathscr{M}_\nu = \{\varnothing, \Omega\}$.

   (Opetus: Vaikka jokaisen ulkomitan "sisältä" löytyy mitta, niin mitallisia joukkoja ei välttämättä ole kovin paljon.)

   (Huomatus: Tämä on rajusti yksinkertaistettu versio tilanteesta, jota on tarkasteltu artikkelissa: Y. Do, & C. Thiele, "L^p theory for outer measures and two themes of Lennart Carleson united". *Bulletin of the American Mathematical Society (New Series)* 52 (2015), no. 2, 249–296. Harvinainen tilaisuus ujuttaa aineopintokurssille ajankohtaista tutkimusta!)

2. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^d$ joukko ja $s \geq 0$ ja $\delta > 0$ reaalilukuja. Määritellään

$$\operatorname{diam} A := \sup\{|x-y| : x, y \in A\} \qquad \text{(joukon läpimitta (diameter)),} \quad \text{ja}$$

$$\mathscr{H}^s_\delta(A) := \inf\Big\{ \sum_{k=1}^\infty (\operatorname{diam} A_k)^s : A_k \subset \mathbb{R}^d \text{ joukkoja, joilla } A \subset \bigcup_{k=1}^\infty A_k \text{ ja } \operatorname{diam} A_k \leq \delta \Big\}$$

   (Jos $s = 0$, niin *sovitaan*, että $(\operatorname{diam} \varnothing)^0 := 0$ ja $(\operatorname{diam}\{x\})^0 := 1$. Lauseke "$(\operatorname{diam} A_k)^0$" täytyy siis ymmärtää yhtenä kokonaisuutena; huomaa, että $\operatorname{diam} \varnothing = \operatorname{diam}\{x\} = 0$, eli periaatteessa "$0^0$" määritellään kahdella eri tavalla tilanteesta riippuen.)

   (a) Osoita, että on olemassa raja-arvo $\lim_{\delta \to 0} \mathscr{H}^s_\delta(A)$ (vihje: monotonisuus).

   (b) Merkitään a-kohdan raja-arvoa $\mathscr{H}^s(A) := \lim\limits_{\delta \to 0} \mathscr{H}^s_\delta(A)$.
   Osoita, että $\mathscr{H}^s$ on ulkomitta (ns. s-ulotteinen Hausdorffin ulkomitta).

   (Lisätieto: $\mathscr{M}_{\mathscr{H}^s}$ sisältää Borelin joukot. Ei todisteta tällä kurssilla.)

3. Osoita:

   (a) Jos $\nu : \mathscr{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ ulkomitta ja $\nu(A) = 0$, niin $A \in \mathscr{M}_\nu$.

   (b) Ulkomitan rajoittuma mitaksi $\nu : \mathscr{M}_\nu \to [0, \infty]$ on täydellinen (edellisten tehtävien määritelmän mielessä).

   (c) Jos μ^* on mittaa $\mu : \mathscr{F} \to [0, \infty]$ vastaava ulkomitta ja $\bar{\mu} : \bar{\mathscr{F}} \to [0, \infty]$ on edellisissä tehtävissä määritelty μ:n täydellistymä, niin $\bar{\mathscr{F}} \subset \mathscr{M}_{\mu^*}$ ja pätee $\mu^*(F) = \bar{\mu}(F)$ kaikilla $F \in \bar{\mathscr{F}}$.

4. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^d$ joukko, $\alpha \in \mathbb{R}$ luku ja $y \in \mathbb{R}^d$ vektori. Merkitään

$$\alpha A := \{\alpha x : x \in A\}, \qquad A + y := \{x + y : x \in A\}.$$

   Todista seuraavat Lebesguen ulkomitan invarianssiominaisuudet:

   (a) $m^*(A + y) = m^*(A)$.

   (b) $m^*(\alpha A) = |\alpha|^d m^*(A)$.

   (Vihje: Totea, että suorakulmion R geometrisella mitalla $|R|$ on vastaavat ominaisuudet.)

[1] Sopimus ei ole yleispätevä, vaan koskee vain tätä tehtävää. Toisissa tilanteissa on kätevää sopia $\sup \varnothing := -\infty$.

5. Olkoon $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ mitta-avaruus ja $f : \Omega \to [0, \infty]$ mitallinen. Todista:

(a) Kuvaus $t \mapsto \mu(f > t)$ on mitallinen Lebesguen mitan suhteen. (Vihje: Yleisemmin jokainen vähenevä funktio on mitallinen Lebesguen mitan suhteen. Jos tahdot käyttää tätä tietoa, todista se ensin.)

(b) Seuraava hyödyllinen kaava (ns. *Cavalierin periaate*) on voimassa:

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \int_0^\infty \mu(f > t) \, \mathrm{d}t.$$

(Tässä siis oikea puoli on integraali Lebesguen mitan suhteen välillä $(0, \infty)$.)
(Vihje: Tutki ensin tilannetta, jossa f on yksinkertainen, ja sitten sopivaa raja-arvoa.)

6. (a) Olkoon $f : \Omega \to [0, \infty]$ integroituva (ts. $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu < \infty$). Osoita, että $f < \infty$ melkein kaikkialla.

(b) Olkoon $\{q_n\}_{n=1}^\infty = \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ (numeroituna jossakin järjestyksessä) ja tarkastellaan funktiota $f : (0, 1) \to [0, \infty]$, missä

$$f(x) := \sum_{n=1}^\infty \frac{2^{-n}}{|x - q_n|^{1/2}} \qquad (\frac{1}{0} := \infty).$$

Osoita, että $f(x) < \infty$ melkein kaikilla (Lebesguen mitan suhteen) $x \in (0, 1)$.