Mitta ja integraali, talvi 2016
Hytönen / Hänninen
5. laskuharjoitukset (käsitellään ke 17.2. ja pe 19.2.)

1. Olkoon $\mathscr{F}$ joukon Ω σ-algebra ja $\mu : \mathscr{F} \to [0, \infty]$ mitta. Määritellään uusi joukkokokoelma

$$\bar{\mathscr{F}} := \{A \in \mathscr{P}(\Omega) : \text{ on olemassa joukot } E, F \in \mathscr{F}, \text{ joilla } E \subset A \subset F \text{ ja } \mu(F \setminus E) = 0\}$$

ja joukkofunktio $\bar{\mu} : \bar{\mathscr{F}} \to [0, \infty]$ siten että $\bar{\mu}(A) := \mu(F)$ kun F on sellainen joukko kuin $\bar{\mathscr{F}}$:n määritelmässä. Osoita:

   (a) $\bar{\mathscr{F}}$ on σ-algebra.

   (b) $\bar{\mu}$ on hyvin määritelty (ts. $\bar{\mu}(A)$ ei riipu F:n valinnasta) mitta.

2. Mitta-avaruutta $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ sanotaan *täydelliseksi* (complete), jos $\mathscr{F}$ sisältää kaikki nollamittaisten joukkojen osajoukot, ts. jos $E \in \mathscr{F}$, $\mu(E) = 0$ ja $F \subset E$, niin myös $F \in \bar{\mathscr{F}}$.

   (a) Osoita, että edellisessä tehtävässä määritelty mitta-avaruus $(\Omega, \bar{\mathscr{F}}, \bar{\mu})$ on täydellinen. (Sitä sanotaan alkuperäisen mitta-avaruuden $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *täydellistymäksi* (completion).)

   (b) Anna esimerkki mitta-avaruudesta, joka ei ole täydellinen ja määritä sen täydellistymä. (Vihje: Tämä ei ole vaikea. Esimerkki onnistuu valitsemalla sopiva σ-algebra ja mitta kolmen pisteen avaruudelle $\Omega = \{1, 2, 3\}$.)

3. Olkoon f_n jono mitallisia funktioita. Osoita kummassakin kohdassa, että kaksi annettua väitettä ovat keskenään yhtäpitäviä:

   (a) ”kaikilla n pätee, että $|f_n| \le g$ melkein kaikkialla” ja
   ”melkein kaikkialla pätee, että $|f_n| \le g$ kaikilla n”,

   (b) ”kaikilla n pätee, että $f_n \le f_{n+1}$ melkein kaikkialla” ja
   ”melkein kaikkialla pätee, että $f_n \le f_{n+1}$ kaikilla n”.

   Kirjoita ensin huolellisesti auki, mitä kukin väite tarkoittaa nollamittaisten joukkojen avulla.

4. Todista tärkeiden suppenemislauseiden ”melkein kaikkialla” -versiot, ts. oletus ”$f_n \to f$” voidaan kummassakin korvata oletuksella ”$f_n \to f$ melkein kaikkialla”, ja lisäksi

   (a) dominoidun suppenemisen lauseessa oletus ”$|f_n| \le g$” voidaan korvata edellisen tehtävän a-kohdan ehdolla,

   (b) monotonisen suppenemisen lauseessa oletus ”$f_n \le f_{n+1}$” voidaan korvata edellisen tehtävän b-kohdan ehdolla.

   (Vihje: Todista ensin, että jos kaksi mitallista funktiota h_1, h_2 ovat samat m.k., niin myös niiden integraalit ovat samat, ja määrittele apufunktiot f_n', jotka toteuttavat alkuperäisten suppenemislauseiden oletukset ja $f_n' = f_n$ m.k.)

5. Olkoon $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ on integroituva funktio. Tässä tehtävässä käydään läpi vielä yksi muunnelma mahdollisuudesta määritellä integraali $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu$. Todista seuraavat väittämät käyttämällä pelkästään positiivisten funktioiden ja toisaalta yksinkertaisten $\mathbb{R}^d$-arvoisten funktioiden integrointiteoriaa, mutta ei siis yleisten $\mathbb{R}^d$-arvoisten funktioiden integraalia:

   (a) On olemassa jono yksinkertaisia funktioita $s_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$, joilla $\|s_n - f\|_{L^1} \to 0$. (Huomaa, että L^1-normin määritelmä käyttää vain positiivisten funktioiden integraalia.) (Vihje: Eräs tällainen jono on jo rakennettu monisteessa, vaikka ylläolevaa suppenemistulosta ei olekaan todettu aivan tässä muodossa.)

   (b) Jos s_n on mikä tahansa edellisen kohdan mukainen jono, niin integraalit $\int_\Omega s_n \, \mathrm{d}\mu$ muodostavat Cauchyn jonon. (Huomaa, että tässä käsitellään vain yksinkertaisten funktioiden integraaleja.)

(c) Jos määritellään $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu := \lim_{n\to\infty} \int_\Omega s_n \, \mathrm{d}\mu$, niin raja-arvo ei riipu valitusta jonosta s_n, kunhan se on edellisten kohtien mukainen.

6. Olkoon $f : (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}$ kahden muuttujan funktio. Oletetaan:

   - Kaikilla $t \in (a,b)$ funktio $x \mapsto f(t,x)$ on integroituva.
   - Kaikilla $x \in \Omega$ funktio $t \mapsto f(t,x)$ on derivoituva. Merkitään sen derivaattaa $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$. (Osittaisderivaatta t:n suhteen. Jos merkintä on uusi, älä pelästy: se on vain merkintä.)
   - Funktio $x \mapsto \sup_{t\in(a,b)} |\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x)|$ on integroituva.

   Osoita seuraava hyödyllinen derivaatan ja integraalin vaihtosääntö:

   $$\frac{d}{dt} \int_\Omega f(t,x) \, \mathrm{d}\mu(x) = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} f(t,x) \, \mathrm{d}\mu(x).$$

   Tarkemmin: Osoita, että näillä oletuksilla funktio $t \mapsto \int_\Omega f(t,x) \, \mathrm{d}\mu(x)$ on derivoituva, ja sen derivaatta toteuttaa yllä olevan yhtälön. (Vihje: Derivaatan määritelmä ja väliarvolause. Muista, että raja-arvo $h \to 0$ voidaan yhtäpitävästi laskea tutkimalla raja-arvoja kullakin jonolla $h_n \to 0$.)