Mitta ja integraali, talvi 2016
Hytönen / Hänninen
4. laskuharjoitukset (käsitellään ke 10.2. ja pe 12.2.)

Myös silloin, kun tehtävänanto on ”laske” (eikä ”todista” tai ”osoita”), on oleellista selvittää tarkasti, mihin tuloksiin lasku perustuu ja miksi niitä saa käyttää. Erona on vain se, että laskutehtävässä lopputulosta ei ole annettu valmiiksi, vaan se pitää sekä keksiä että todistaa!

Laskutehtävissä kannattaa myös muistaa edellisissä tehtävissä todettu Riemannin ja Lebesguen integraalin yhteys, joka todistetaan myöhemmin.

1. Laske

   (a) $\displaystyle\int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-n(n+1)x}\,\mathrm{d}x.$

   (b) $\limsup_{n\to\infty} a_n$ ja $\liminf_{n\to\infty} a_n$, kun $\{a_n\}_{n=1}^\infty = \mathbb{Q}$ (numeroituna jossakin järjestyksessä)

   Perustele, mitä tuloksia mahdollisesti käytit!

2. Olkoot $(a_n)_{n=1}^\infty$ ja $(b_n)_{n=1}^\infty$ lukujonoja ja $c \in \mathbb{R}$ vakio. Todista

   (a) $\liminf_{n\to\infty}(c - a_n) = c - \limsup_{n\to\infty} a_n$.
   (Tähän vedottiin dominoidun suppenemisen todistuksessa.)

   (b) $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \le \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$.

3. Mitallisten funktioiden $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$ raja-arvon $\lim_{n\to\infty} f_n$ mitallisuus perusteltiin monisteessa komponenteittain ja ala- ja yläraja-arvon avulla. Anna ohjeita seuraten toisenlainen todistus:

   (a) Osoita, että seuraavat ovat yhtäpitäviä funktiolle $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$:
   - f on mitallinen.
   - $\{f \in B(x,r)\}$ on mitallinen kaikilla avoimilla $B(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^d : |y - x| < r\}$.
   - $\{f \in \bar{B}(x,r)\}$ on mitallinen kaikilla suljetuilla $\bar{B}(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^d : |y - x| \le r\}$.

   (b) Osoita, että jos $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, niin pätee

   $$\{f \in \bar{B}(x,r)\} = \bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{j=1}^\infty \bigcap_{k=j}^\infty \{f_k \in \bar{B}(x, r + \frac{1}{n})\},$$

   ja päättele tästä f:n mitallisuus. (Vihje: Kirjoita em. joukkoon kuuluminen kvanttoreiden $\forall$ ja $\exists$ avulla ja muistele raja-arvon ε-määritelmää, kun $\varepsilon = \frac{1}{n}$.)

4. Tässä tehtävässä tutustutaan yhteen mahdolliseen tapaan määritellä vaihtuvamerkkisen integroituvan funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ integraali. Toista tapaa tutkitaan tarkemmin luennoilla.

   (a) Osoita, että funktiot $f^+ := \max(f, 0)$ ja $f^- := -\min(f, 0)$ ovat integroituvia funktioita $f^+, f^- : \Omega \to [0, \infty)$ ja $f = f^+ - f^-$.

   (b) Määritellään $\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu := \int_\Omega h_1\,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega h_2\,\mathrm{d}\mu$, missä $h_1 = f^+$ ja $h_2 = f^-$. Osoita, että sama lopputulos saadaan käyttämällä mitä tahansa muuta jakoa $f = h_1 - h_2$ kahden integroituvan funktion $h_i : \Omega \to [0, \infty)$ erotukseksi.

   (c) Osoita, että näin määritelty integraali on *lineaarinen*, ts.

   $$\int_\Omega (f_1 + f_2)\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f_1\,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega f_2\,\mathrm{d}\mu, \qquad \int_\Omega \alpha f\,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu,$$

ja lisäksi

$$\Big|\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu\Big| \le \int_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu$$

kaikilla integroituvilla funktioilla $f, f_1, f_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ ja vakioilla $\alpha \in \mathbb{R}$.

5. Olkoon $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ jono integroituvia funktioita, joka toteuttaa monisteessa muotoillun **dominoidun suppenemisen lauseen** oletukset. Todista, että samoilla oletuksilla lause pätee myös muodossa:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu. \tag{1}$$

6. Hyödynnä edellisen tehtävän tulosta ja laske perustellen

   (a) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{1}{x^3 + (-\frac{1}{2})^n x} \, \mathrm{d}x.$

   (b) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{1}{(x^2 + e^{n(x-1)})^{1/3}} \, \mathrm{d}x.$